Universidade Federal do Paraná
Setor de Tecnologia - TC

Matemática Aplicada I
Engenharia Ambiental 2/2011

Curitiba, 26.10.2011

Prova 1

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ____

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1				
2				
3				
4				
5			Porcentagem	
Soma				
Revisão/ Correção				Nota
Final				

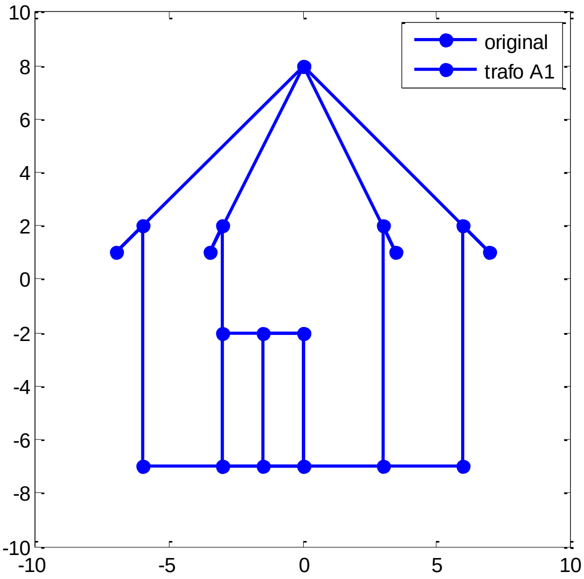
Questões

1. (10 Pontos) O código de Matlab/Octave seguinte representa uma aproximação numérica de um calculo:
   >> X=0:1/2:4;
   >> Y=X.*exp(-X);
   >> Z=trapz(X,Y)
   Z= 0.8867

   a. Faça o calculo do valor de Z exato analiticamente.
   $$\int_0^4 xe^{-x}dx = \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^4 = 0{,}9084$$
   b. Explique por que existe uma diferença entre o valor do método numérico e analítico (no máximo duas frases).
   O numero de trapézios é baixo. A aproximação com trapézios não é preciso.
   c. Qual modificação simples no código poderia melhorar o resultado numérico?
   X=0:1/100:4;
   d. Quais outros métodos numéricos existem para descrever (mencione dois e descreva os usado no Maximo uma frase).
   Usar aproximações com polinômios ou series Taylor que são muito fáceis para integrar e resolver analiticamente.

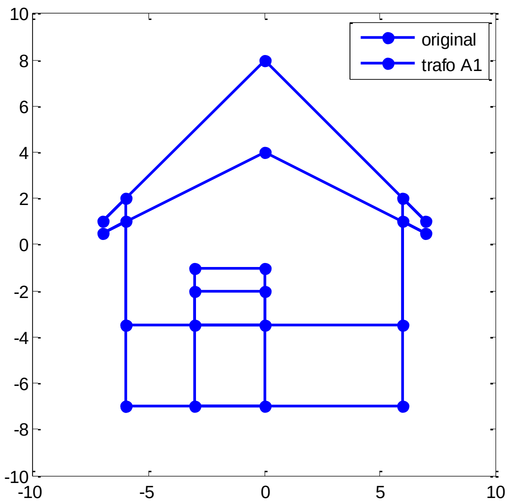
2. (25 Pontos) A matriz X =[-6 -6 -7 0 7 6 6 -3 -3 0 0; -7 2 1 8 1 2 -7 -7 -2 -2 -7] representa pontos de uma casa (figura 1):

   a. Calcule o determinante, os autovalores, autovetores e o produto interno dos autovetores de cada Matriz A_i (veja em baixo). Determine demais características das matrizes A_i explicando assim o efeito da transformação $A_iX = B$ aplicando as diferentes matrizes A_i à casa X. Descreva este efeito em palavras (uma frase) ou com um desenho esquemático, não é necessário calcular B!
      i. A_1=[0,5 0 ; 0 1];
      - *Determinante positivo det(A_1)=1/2, mantem sentido (porta na esquerda)*
      - *Matriz é simétrica → autovalores reais e perpendiculares*
      - *(0,5-λ_1)(1-λ_2)=0 → Autovalores 0,5 e 1*
      - *Autovetores correspondentes $[1\ ,\ 0]^T$ e $[0\ ,\ 1]^T$*
      - *Produto interno = 0 → autovetores perpendiculares*
      - *Matriz é diagonal, assim somente muda escala.*
      - *Redução de escala no eixo horizontal (*0,5). Eixo vertical mantido.*



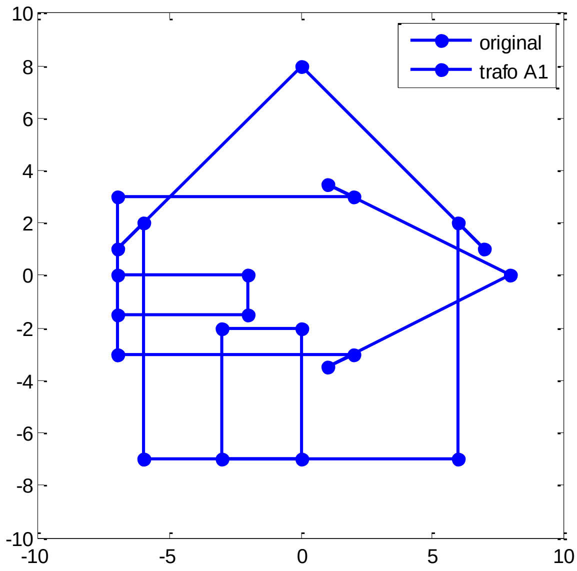
ii. A_2=[1 0 ; 0 0,5];

- *Determinante positivo det(A_2)=1/2, mantem sentido (porta na esquerda)*
- *Matriz é simétrica → autovalores reais e perpendiculares*
- *Autovalores 0,5 e 1*
- *Autovetores correspondentes [0 , 1]^T e [1 , 0]^T*
- *Produto interno = 0 → autovetores perpendiculares*
- *Matriz é diagonal, assim somente muda escala.*
- *Redução de escala no eixo vertical (*0,5). Eixo horizontal mantido.*



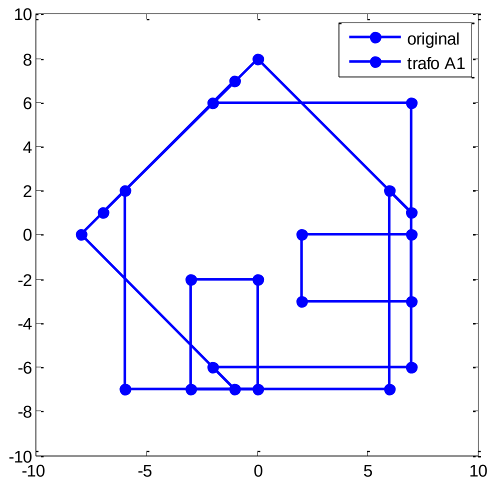
iii. A_3=[0 1 ; 0,5 0];

- *Determinante negativo det(A_3)=-1/2, não-mantem sentido (porta vai ficar na direita)*
- *Autovalores sqrt(1/2) e -sqrt(1/2)*
- *Autovetores correspondentes [2sqrt(1/2) , 1]^T e [-2sqrt(1/2) , 1]^T*
- *Produto interno = -0,33 → autovetores não perpendiculares*
- *Matriz é anti-diagonal, assim muda escala e trocam coordenadas.*
- *Redução de escala no eixo vertical.*



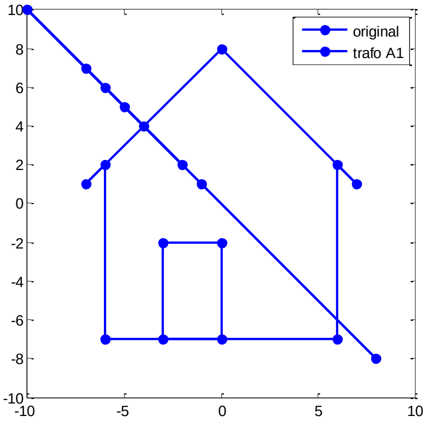
iv. A_4=[cos(90°) -sin(90°);sin(90°) cos(90°)]

- *Determinante positivo det(A_5)=1, mantem sentido (porta vai ficar na direita), det=1 significa matriz ortogonal*
- *Autovalores i e -i*
- *Autovetores correspondentes [sqrt(1/2) , sqrt(-1/2)]^T e [sqrt(1/2) , sqrt(-1/2)]^T*
- *Matriz é anti-simétrica → autovalores complexas e perpendiculares*
- *Matriz de rotação*
- *Rotacao por 90° no sentido anti-horario*



v. A_5=[1 1; -1 -1]

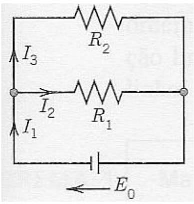
- *Determinante det(A_6)=0, transformação para uma linha*
- *Autovalores 0 e 0*
- *Autovetor correspondentes [1 -1]^T*
- *Matriz é anti-simétrica → autovalores complexas ou zero*
- *Transformacao para uma linha como diagonal segunda*



3. (10 Pontos) Demonstre que os vetores
   $m = (4, -2, 0, 0)^T$, $n = (-2, 4, -2, 0)^T$, $o = (0, -2, 4, -2)^T$, $p = (0, 0, -2, 4)^T$
   a. criam uma base em R^4, e
   b. calcule as coordenadas de $q = (3, 3, 3, 3)^T$, e
   c. calcule o ângulo entre o vetor m e q.

   veja exercicio

4. Usando as leis de Kirchhoff, calcule as correntes dos circuitos.



   $I_2 = E_o/R_1$, $I_3 = E_o/R_2$, $I_1 = (R_1 + R_2)E_o/(R_1R_2)$

5. (6 Pontos) Experimentos mostram que, num campo de temperatura $T=3x^2y - y^3$, o calor flui na direção de máximo decréscimo da temperatura T ($q=-\nabla T$).
   a. Encontre essa direção em geral e num dado ponto P:(4,-2). Esboce a direção em P, usando uma seta.
      $q = -\nabla T = [-6xy\ ,\ -(3x^2 - 3y^2)]^T = [48\ ,\ -36]^T$

   b. Calcule a taxa de variação da temperatura em geral, considerando que a taxa pode ser representado como Taxa = $\alpha^2\nabla^2T$, com α sendo uma constante.
      $Taxa = \alpha^2\nabla^2 T = \alpha^2\ [6y\ ,\ -6y)]^T$

6. Seja a curva $r(t) = \cos(t)(\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2^{1/2}\mathrm{sen}(t)\mathbf{k}$, onde $0 \le t \le \infty$. Encontre o comprimento s(t) da cuva entre t=0 e um valor arbitrário de t, sabendo que s(t=0)=0. Neste problema {**i**, **j**, **k**} são a base ortonormal cartesiana do R³.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r' \bullet r'}\, d\tilde{t}$$

$$r' = -\mathrm{sen}(t)(\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2^{1/2}\cos(t)\mathbf{k}$$
$$r' \bullet r' = 2\mathrm{sem}^2(t) + 2\cos^2(t) = 2$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r' \bullet r'}\, d\tilde{t} = \int_0^t \sqrt{2}\, d\tilde{t} = \sqrt{2}t$$

7. Avalie as frases seguintes, escrevendo se são verdadeiras ou falsas (*resposta certa: pontuação positiva; resposta errada: pontuação negativa; sem resposta: 0, pontuação mínima nesta questão: 0)*:

   a. "A inversa de uma matriz n x n existe se o rank da matriz é equal n e assim a matriz sendo singular."

      a afirmação é falsa, porque uma matriz n x n com rank n não é singular

   b. "Na comparacao de modelos computacionais com resultados analiticos se pode dizer que o erro numerico absoluto é sempre maior que o erro numerico relativo"

      a afirmação é falsa, porque somente vale para |x| > 1 e não para todos x com $e_{abs} = |x-x_n|$ e $e_{rel} = |x-x_n| / |x|$

   c. "Fixando um sistema de coordenadas na superficie da terra (em rotacao) introduz aceleracoes adicionais em comparacao com um sistema que não considera a rotacao da terra"

      a afirmação é verdadeira

   d. "Os campos de gradiente são irrotacionais, assim rot(grad f) = 0"

      a afirmação é verdadeira

   e. "Os campos de gradiente são irrotacionais, assim div(rot vetor) = 0"

      a afirmação é verdadeira

   f. "A aplicacao do Teorema da divergencia de Gauss permite a transformacao de integrais triplas sobre uma regiao em integrais duplas sobre a superficie do contorno da regiao"

      a afirmação é verdadeira

   g. "A equacao 3,4y' + 7,4+a(x)y = 8,3-b(x) é classificada como equacao diferencial parcial linear de primeira ordem e inhomogenea"

      a afirmação é verdadeira