



Curitiba, 21.12.2011

Prova 2

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger

Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: Gabarito

Solucoes

1. $dh/dt + 3h = \sin(3t)$, $h(0) = 1$

$$s H(s) - h(0) + 3H(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$H(s + 3) = 1 + \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$H = \frac{1}{s + 3} + \frac{3}{(s^2 + 9)(s+3)}$$

$$H = \frac{1}{s + 3} + \frac{A}{s+3} + \frac{Bs + C}{s^2+9}$$

$$H = \frac{1}{s + 3} + \frac{1/6}{s+3} - \frac{1/6s}{s^2+9} + \frac{3/6}{s^2+9}$$

$$H = \frac{7/6}{s + 3} + 1/6(-\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9})$$

$$h(t) = 7/6 e^{-3t} + 1/6(-\cos(3t) + \sin(3t))$$

2. $u(x) = x - y(x)$

$$u' = 1 - y' = 1 - ((u+1) / \sqrt{x} + 1) = - (u+1)/\sqrt{x}$$

$u=-1$ é solução constante

para $u \neq -1$ se recebe com separação dos variáveis:

$$\int (1/(1+u), du) = - \int (1/\sqrt{x}, dx)$$

$$\ln |1+u| = -2\sqrt{x} + c$$

$$|1+u| = \exp(-2\sqrt{x}+c) = c_2 \exp(-2\sqrt{x}), c_2 > 0$$

$$1+u = \pm c_2 \exp(-2\sqrt{x}), c_2 > 0$$

$$u = c_3 \exp(-2\sqrt{x}) - 1, c_3 \neq 0$$

substituição reversa:

$$y(x) = x - u(x) = x + 1 - c_3 \exp(-2\sqrt{x}), x > 0, c_3 \text{ elemento de } \mathbb{R}.$$

3. $\mathbf{y} = [y(t) \ y'(t) \ y''(t)]^t = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t)]^t$
 $\mathbf{y}' = [y_1'(t) \ y_2'(t) \ y_3'(t)]^t = [y_1'(t) \ y_2'(t) \ y_3'(t)]^t = [y_2(t) \ y_3(t) \ (y_3(t) + 4y_2(t) - 4y_1(t))]^t$
em forma matricial:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= (-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + (-4) + 0 - 0 - 4(-\lambda) - 0$$

$$= \lambda^2(1-\lambda) + 4\lambda - 4$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$$

Autovetores correspondentes:

$$\lambda_1 = 1:$$

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = 1\mathbf{x}_1 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{12} = x_{11} & 1 \\ x_{13} = x_{12} & \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = 1 \\ -4x_{11} + 4x_{12} + x_{13} = x_{13} & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = 2\mathbf{x}_2 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{22} = 2x_{21} & 1 \\ x_{23} = 2x_{22} & \Leftrightarrow \mathbf{x}_2 = 2 \\ -4x_{21} + 4x_{22} + x_{23} = 2x_{23} & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_3 = -2\mathbf{x}_3 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{32} = -2x_{31} & 1 \\ x_{33} = -2x_{32} & \Leftrightarrow \mathbf{x}_3 = -2 \\ -4x_{31} + 4x_{32} + x_{33} = -2x_{33} & 4 \end{matrix}$$

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{x}_3 = c_1 e^t \mathbf{x}_1 + c_2 e^{2t} \mathbf{x}_2 + c_3 e^{-2t} \mathbf{x}_3$$

$$y(t) = y_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$$

Cond. Iniciais:

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$y'(0) = c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 1$$

$$y''(0) = c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 0$$

$$4*1-3: 3c_1 = 4 \Leftrightarrow c_1 = 4/3$$

$$2*2-3: 4/3 - 8c_3 = 2 \Leftrightarrow c_3 = -1/12$$

$$\rightarrow 4/3 + c_2 - 1/12 = 1 \Leftrightarrow c_2 = -1/4$$

$$y(t) = 4/3 e^t + -1/4 e^{2t} - 1/12 e^{-2t}$$

4. a) $\frac{dy}{dt} = -y + t^2$

b) $y(0.0) = 1$

c) resolução: 0.1 e intervalo (0,2)

d) Euler, primeira ordem

5. a) $\frac{d^2 y}{dx^2} = x \cos x$

b) $y(1) = 0.1$ e $y'(1) = -2\sin(1) + \cos(1)$

c) intervalo (1,7)

d) quarta ordem

6. Nos intervalos mais grosseiros tem 6 pontos que significa um resolução de aproximadamente $1/6$. O erro num método de ordem quatro deveria ser da ordem $(1/6)^4 = 7 \cdot 10^{-4}$. No gráfico o erro tem a ordem $10^0 = 1$ que mostra que a solução numérica deveria ser errado. Isto se percebe também na distancia (constante) entre as soluções. A condição inicial não bate. Isto é provavelmente o erro feito que é da ordem 1. Assim, não aprovo o resultado.
7. a) falsa, $\tan \alpha$
b) verdadeira
c) verdadeira
d) falsa, isto é a vantagem das transformadas
e) falsa, $=1$