**Responsável:** Rafael de Carvalho Bueno
**Disciplina:** Mecânica dos Fluídos II
**Professor:** Tobias Bleninger
**Tema:** Ondas Internas
**Data:** 29/05/2017
**Contato** rafael.bueno.itt@gmail.com

# Modelagem das Ondas Internas

A modelagem de ondas internas, como a maioria das modelagens, são feitas a partir de algumas simplificações. Neste caso vamos abordar a importância de uma modelagem consistente com o sistema avaliado. O nosso objetivo é avaliar uma onda interna que propaga-se no meio do Oceano Atlântico.
Na modelagem matemática, as ondas são representadas como funções senoidais, que por sua vez descrevem o deslocamento da interface entre as camadas.

$$\eta(x,t) = a\cos(kx - \omega t) = Re\ a\ e^{i(kx-\omega t)} \tag{1}$$

$$\zeta(x,t) = b\cos(kx - \omega t) = Re\ a\ e^{i(kx-\omega t)} \tag{2}$$

onde $\eta$ e $\zeta$ são, respectivamente, as funções da onda superficial e da onda interna. $a$ e $b$ são as amplitudes das ondas em cada camada, $\omega$ é a frequência angular da onda e $k$ é o número de onda.
Vamos considerar algumas condições para a modelagem do sistema:

1. Os fluidos 1 e 2 são imiscíveis;
2. O escoamento é não-viscoso e irrotacional em ambas as camadas do sistema;
3. As ondas internas são ondas lineares com baixa amplitude ($a << \lambda$);

- **Equação da conservação da massa**

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

Considerando o escoamento em cada camada irrotacional é possível utilizar a base teórica de escoamentos potências nas equações 3 e 4. Assim, a equação da conservação da massa para cada camada pode ser reescrita como a equação de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0 \tag{6}$$

onde $\phi_1$ é o potencial de velocidade da camada 1 e $\phi_2$ é o potencial de velocidade da camada 2. Assim, utilizando a base de escoamentos potenciais, reduzimos o número de variáveis independentes do nosso sistema, facilitando a solução do sistema de equações diferenciais.

- **Condições de contorno**

Para a obtenção da solução do sistema de equações diferenciais formado pelas equações 5 – 6 é preciso definir as condições de contorno e a condição inicial que satisfazem as condições do sistema proposto. A condição na extremidade inferior do sistema é a ausência de fluxo perpendicular ao contorno, matematicamente descrita, respectivamente, como

$$\left.\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right|_{z=-\infty} = 0 \tag{7}$$

A condição de contorno para as duas regiões de interface entre os fluidos será uma condição cinemática relacionada à velocidade vertical da oscilação, dada por

$$w_1 = \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{a}{\lambda}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

O termo convectivo da condição de contorno cinemática pode ser desprezado, visto que a amplitude da onda é pequena se comparada ao seu comprimento. Utilizando o conceito do potencial de velocidade, é possível definir a condição de contorno cinemática na interface como sendo

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{8}$$

A condição cinemática para a interface interna é obtida de forma semelhante ao obtido para a onda superficial.

$$w_i = \left.\frac{\partial \phi_i}{\partial z}\right|_{z=-H} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_i \frac{b}{\lambda}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right|_{z=-H} = \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right|_{z=-H} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \tag{9}$$

onde a equação 8 é a condição cinemática da onda superficial e a equação 9 é a condição cinemática da onda interna.

- **Equação da quantidade de movimento**

A equação da quantidade de movimento deve ser reproduzida para as duas linhas de corrente que satisfazem cada onda. De forma geral ela é dada por

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + f_i + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{10}$$

Para a obtenção da equação da quantidade de movimento, a equação 10 é simplificada para um escoamento não viscoso, sem os efeitos de Corioli, portanto o único termo gravitacional é aceleração gravitacional. Também é desconsiderada a velocidade convectiva, devido à amplitude de onda ser muito menor que o comprimento de onda. Considerando o problema 2D e olhando apenas para a componente $z$ da equação da quantidade de movimento, temos que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g \tag{11}$$

colocando em função do potencial de velocidade, a equação 11 torna-se

$$\frac{\partial}{\partial dt}\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g \tag{12}$$

Integrando a equação 12 em relação a z, encontramos a equação de Bernoulli para escoamentos não permanentes.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = C \tag{13}$$

Por toda linha de corrente a equação de Bernoulli 13 é constante. No entanto, as equações são diferentes para as ondas superficiais e internas. Assim, para as ondas internas, sabendo que as pressões em 1 e 2 na linda de corrente são iguais e o nível 1 e 2 coincide com a função senoidal da onda, temos

$$\rho_1 \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right|_{z=-H} = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + g\zeta\Delta\rho \tag{14}$$

A equação da quantidade de movimento para onda superficial é muito mais simples, visto que o ar, camada *zero*, tem massa específica desprezível. Assim,

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right|_{z=0} = +g\eta \tag{15}$$

As soluções do potencial de velocidades da camada 1 e 2 são na forma

$$\phi_1 = (A_1 e^{kz} + B_1 e^{-kz}) e^{i(kx-\omega t)} \tag{16}$$

$$\phi_2 = A_2 e^{kz} e^{i(kx-\omega t)} \tag{17}$$

As constantes das equações 16 e 17 são obtidas a partir das condições de contorno do problema. Da condição de contorno 8 é possivel encontrar a relação entre $A_1$, $A_2$ e $a$.

$$A_1 - B_1 = \frac{-ia\omega}{k} \tag{18}$$

A partir da condição de contorno 15, encontramos a segunda relação entre as constantes $A_1$ e $A_2$.

$$A_1 + B_1 = \frac{ga}{i\omega} = \frac{-iga}{\omega} \tag{19}$$

Da relação 18 e 19 é possível encontrar o valor das constantes $A_1$ e $B_1$

$$A_1 = -\frac{ia}{2}\left(\frac{\omega}{k} + \frac{g}{\omega}\right) \tag{20}$$

$$B_1 = \frac{ia}{2}\left(\frac{\omega}{k} - \frac{g}{\omega}\right) \tag{21}$$

Através da equação de contorno 9 para a primeira camada é possível determinar uma relação entre as amplitudes $a$ e $b$.

$$b = \frac{ka}{2\omega}\left(\left(\frac{\omega}{k} + \frac{g}{\omega}\right)e^{-kH} + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{g}{\omega}\right)e^{kH}\right) \tag{22}$$

Da condição de contorno 9 para a segunda camada do sistemas, é possível encontrar a última constante do sistema, $A_2$.

$$A_2 = -\frac{ia}{2}\left(\left(\frac{\omega}{k} + \frac{g}{\omega}\right) + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{g}{\omega}\right)e^{2H}\right) \tag{23}$$

Aplicando as velocidades potenciais na equação de Bernoulli para escoamentos não permanentes e utilizando as constantes 20, 21 e 23, temos

$$\rho_1 \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right|_{z=-H} = \rho_2 \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right|_{z=-H} + \Delta\rho g \zeta$$

$$-i\omega\rho_1\left(-\frac{ia}{2}\left(\frac{\omega^2+kg}{k\omega}\right)e^{-kH}+\frac{ia}{2}\left(\frac{\omega^2-kg}{k\omega}\right)e^{kH}\right)e^{i(kx-\omega t)} =$$

$$-i\omega\rho_2\left(-\frac{ia}{2}\left(\frac{\omega^2+kg}{k\omega}\right)-\frac{ia}{2}\left(\frac{\omega^2-kg}{k\omega}\right)e^{2kH}\right)e^{i(kx-\omega t}e^{-kH}+\Delta\rho\ g\ b\ e^{i(kx-\omega t)}$$

$$-\frac{\rho_1 a}{2k}(\omega^2+kg)e^{-kH}+\frac{\rho_1 a}{2k}(\omega^2-kg)e^{kH} = -\frac{\rho_2 a}{2k}(\omega^2+kg)e^{-kH}-\frac{\rho_2 a}{2k}(\omega^2-kg)e^{kH}$$
$$+\frac{\Delta\rho g a}{2\omega^2}((\omega^2+kg)+(\omega^2-kg)e^{2kH})e^{-kH}$$

Dividindo tudo por $kg$ e chamando o termo $\omega^2/kg$ de $y$, encontramos

$$\rho_1(y-1)e^{kH}-\rho_1(y+1)e^{-kH} = -\rho_2(y+1)e^{-kH}-\rho_2(y-1)e^{kH}+\frac{\Delta\rho}{y}((y+1)e^{-kH}+(y-1)e^{kH})$$

$$\rho_1((y-1)e^{kH}-(y+1)e^{-kH}) = \left(\frac{\Delta\rho}{y}-\rho_2\right)((y+1)e^{-kH}+(y-1)e^{kH})$$
$$+\frac{\Delta\rho}{y}((y+1)e^{-kH}+(y-1)e^{kH})$$

$$(y-1)\left(\rho_1-\left(\frac{\Delta\rho}{y}-\rho_2\right)\right)e^{kH}-\rho_1(y+1)e^{-kH}-\left(\frac{\Delta\rho}{y}-\rho_2\right)(y+1)e^{-kH}=0$$

$$(y-1)\left(\rho_1 e^{kH}-\frac{\Delta\rho}{y}e^{kH}+\rho_2 e^{kH}\right)+(y+1)\rho_1 e^{-kH}\left(\frac{y\Delta\rho-\Delta\rho}{y}\right)=0$$

$$(y-1)\left(y(\rho_1 e^{kH}+\rho_2 e^{kH})-\Delta\rho e^{kH}+(y+1)e^{-kH}\Delta\rho\right)=0$$

$$(y-1)\left(y(2\rho_1\sinh kH+2\rho_2\cosh kH)-2\Delta\rho\sinh kH\right)=0$$

$$\left(\frac{\omega^2}{kg}-1\right)\left(\frac{\omega^2}{kg}(\rho_1\sinh kH+\rho_2\cosh kH)-\Delta\rho\sinh kH\right)=0 \tag{24}$$

A primeira raiz da equação 24 é

$$\omega^2 = kg \tag{25}$$

Este modo é denominado **modo barotrópico** ou **modo externo**. Neste modo as ondas superficiais são maiores do que as ondas internas. Ambas as ondas estão em fase.
A segunda raiz da equação 24 é dada por

$$\omega^2 = \frac{kg\Delta\rho\sinh kH}{(\rho_1\sinh kH+\rho_2\cosh kH)} \tag{26}$$

Este modo é denominado **modo baroclínico** ou **modo interno**. Neste caso, as ondas internas são maiores do que as ondas superficiais. Além disso elas se apresentam fora de fase.

Aqui trabalhamos com uma forma de solução da equação de dispersão, existem diversas formas de modelagem de ondas internas em duas camadas. O sistema pode ser alterado e uma nova solução obtida através de novas condições de contorno. É possível também aumentar o número de camadas ou trabalhar com um sistema continuamente estratificado. No entanto, neste caso o sistema não será irrotacional, tornando a solução bem mais complexa.

## Referências

KUNDU, P. K.; COHEN, L. M. **Fluid mechanics**, 638 pp. Academic, Calif, 1990.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. **Introduction to fluid mechanics**. New York: John Wiley  Sons, 1985.

BATCHELOR, George Keith. **An introduction to fluid dynamics.** Cambridge university press, 2000.

ALFORD, Matthew H. et al. **The formation and fate of internal waves in the South China Sea.** Nature, v. 521, n. 7550, p. 65-69, 2015.