

MÁRCIO FROELICH FRIEDRICH

APLICAÇÃO DE MODELAGEM FÍSICA E COMPUTACIONAL
A UM ESCOAMENTO FLUVIAL

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre. Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. José Junji Ota

CURITIBA

2004

TERMO DE APROVAÇÃO

MÁRCIO FROELICH FRIEDRICH

APLICAÇÃO DE MODELAGEM FÍSICA E COMPUTACIONAL A UM ESCOAMENTO FLUVIAL

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela comissão formada pelos professores:

Orientador: Prof. José Junji Ota, Ph. D.
Departamento de Hidráulica e Saneamento
Setor de Tecnologia, UFPR

Prof. Paulo Cesar Colonna Rosman, Ph. D.
Área de Engenharia Costeira & Oceanográfica – COPPE/UFRJ
Departamento de Recursos Hídricos & Meio Ambiente – E. Poli./UFRJ

Prof. Maurício Dziedzic, Ph. D.
Coordenação do Curso de Engenharia Civil
Núcleo de Ciências Exatas e Tecnológicas, UnicenP

Prof. André Luiz Tonso Fabiani, M. Sc.
Departamento de Hidráulica e Saneamento
Setor de Tecnologia, UFPR

Curitiba, 27 de agosto de 2004

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Luiz Hélio Friedrich e Marlene T. Froelich Friedrich, por me apoiarem sempre e não medirem esforços para me oferecer todas as oportunidades de uma boa educação.

À Universidade Federal do Paraná, pela oferta do curso de Pós-Graduação em Engenharia Hidráulica e aos seus professores, pelos conhecimentos transmitidos durante o curso.

Ao Centro de Hidráulica e Hidrologia Prof. Parigot de Souza (LACTEC/ CEHPAR), especialmente ao seu Coordenador Ralph Carvalho Groszewicz, pelo apoio e incentivo irrestrito   realização do curso, pela disponibilização de suas instalações, funcionários e materiais necessários para a utilização do modelo físico e do modelo computacional.

Ao Professor José Junji Ota, pela amizade, apoio, sugestão do tema e orientações durante o desenvolvimento desta dissertação.

Aos funcionários do LACTEC/ CEHPAR Altev r Luiz Scremin, Gilberto Silva de Moraes, Sebast o Lairto do Santos, Valdinei de Lucena e ao estagiário Danilo Fontana, pelo extenso trabalho realizado no modelo físico.

 s estagiárias Simone Borim da Silva e Maria Cristina L. G. Martinelo e ao estagiário André Crestani, pelo valioso auxílio na geração da malha computacional e no estudo do modelo RMA2.

Aos demais colegas de trabalho da Divisão de Hidráulica do LACTEC/CEHPAR, pelo incentivo e auxílios diversos recebidos durante este trabalho.

Ao Professor Roberto Mayerle da Universidade Christian Albrechts (Kiel, Alemanha), pela orientação na escolha do programa computacional e pelas contribuições oferecidas durante este trabalho.

Aos amigos da Diretoria do Aeroclube de Planadores de Balsa Nova, por compreenderem minha ausência e assumirem meus encargos durante o período de elaboração desta dissertação.

Aos Professores Paulo Cesar Colonna Rosman, André Luiz Tonso Fabiani e Maurício Dziedzic pelas várias sugestões e correções feitas ao trabalho.

A Deus, por tudo.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iii
LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE TABELAS	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS	xvi
RESUMO	xvii
ABSTRACT	xviii
1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS	3
2.1 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	4
2.2 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	5
3 TURBULÊNCIA	9
3.1 NOÇÕES FUNDAMENTAIS	9
3.2 ORIGENS DA TURBULÊNCIA	13
3.3 MODELOS DE ESCOAMENTO MÉDIO VIA MÉTODOS CONVENCIONAIS	14
3.3.1 Média Temporal de Reynolds e Média Relaxada	14
3.3.2 Média Estatística	18
3.4 ESQUEMAS DE FECHAMENTO DA TURBULÊNCIA	19
3.4.1 Esquemas Utilizando o Conceito da Viscosidade Turbulenta	21
3.4.2 Modelos Simulando o Transporte das Tensões de Reynolds	34
3.4.3 Escolha do Modelo de Turbulência	36
3.5 MODELOS DE ESCOAMENTO MÉDIO VIA TÉCNICAS DE FILTRAGEM	36
3.5.1 Procedimentos de Filtragem	37

3.5.2	Equações Governantes para o Escoamento de Grande Escala . . .	40
4	ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL	43
4.1	INTRODUÇÃO	43
4.2	INTEGRAÇÃO NA DIREÇÃO z DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	43
4.3	SIMPLIFICAÇÃO PARA ÁGUAS RASAS	45
4.3.1	Hipótese da Distribuição Hidrostática de Pressões	46
4.4	INTEGRAÇÃO NA DIREÇÃO z DAS EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO NAS DIREÇÕES x E y	47
4.5	CORREÇÃO PARA CORRENTES SECUNDÁRIAS	50
4.5.1	Formulação do Transporte da Vorticidade	51
5	MODELAGEM FÍSICA	53
5.1	INTRODUÇÃO	53
5.2	SIMILARIDADE GEOMÉTRICA	53
5.3	SIMILARIDADE CINEMÁTICA	54
5.4	SIMILARIDADE DINÂMICA	54
5.4.1	Dedução das Relações de Similaridade Dinâmica a Partir das Equações de Navier-Stokes	55
6	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL	59
6.1	INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	61
6.2	DEFINIÇÃO DOS ELEMENTOS	62
6.2.1	Elementos Unidimensionais Lineares	63
6.2.2	Elementos Unidimensionais Quadráticos	65
6.2.3	Elementos Bidimensionais Lineares	65
6.2.4	Elementos Bidimensionais Quadráticos	66
6.2.5	Transformação de Coordenadas	68
6.3	MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS DE GALERKIN	70
6.3.1	Formulação Fraca	72
6.4	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS	73

6.4.1	Classificação dos Métodos para Solução de Sistemas Não-Lineares	73
6.4.2	Método Iterativo de Newton-Raphson	74
6.5	INTEGRAÇÃO POR QUADRATURA DE GAUSS	76
6.6	ESQUEMA DE SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	78
7	ENSAIOS NO MODELO FÍSICO	81
7.1	CONSTRUÇÃO DO MODELO FÍSICO	81
7.2	CALIBRAGEM DO MODELO FÍSICO	83
7.3	ENSAIOS REALIZADOS PARA COMPARAÇÃO COM O MODELO COMPUTACIONAL	85
7.3.1	Resultados Medidos no Modelo Físico	88
7.3.2	Registro Fotográfico dos Ensaios	92
8	ELABORAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL E ANÁLISES DE SENSIBILIDADE	94
8.1	ELABORAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL	94
8.2	INFLUÊNCIA DA VISCOSIDADE TURBULENTA	97
8.2.1	Limites de Convergência da Solução Numérica	98
8.2.2	Influência sobre o Campo de Velocidades	100
8.2.3	Influência do Número de Reynolds da Malha sobre os Níveis de Água	103
8.3	INFLUÊNCIA DA RUGOSIDADE DO LEITO	106
8.3.1	Problemas de Convergência e Ocorrência de Escoamento Supercrítico	108
8.4	INFLUÊNCIA DA CONDIÇÃO DE CONTORNO NA ENTRADA	114
8.5	INFLUÊNCIA DO EFEITO DAS CORRENTES SECUNDÁRIAS	115
9	CALIBRAGEM E VALIDAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL COM BASE NAS MEDIÇÕES NO MODELO FÍSICO	121
9.1	CALIBRAGEM DO MODELO COMPUTACIONAL	121
9.1.1	Condição de Contorno na Seção de Entrada	122
9.1.2	Calibragem do Número de Reynolds da malha	123
9.1.3	Calibragem da Rugosidade do Leito e das Margens	128

9.2	SIMULAÇÃO DOS ENSAIOS COM O MODELO COMPUTACIONAL CALIBRADO	134
9.2.1	Resultados – Configuração do Campo de Escoamento	135
9.2.2	Resultados – Níveis de Água	140
9.2.3	Resultados – Velocidades	142
10	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	163
10.1	CONCLUSÕES	163
10.1.1	Operação do Modelo Computacional	163
10.1.2	Processo de Modelagem Computacional	165
10.1.3	Validação dos Resultados	166
10.2	RECOMENDAÇÕES	168
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	170
	OBRAS CONSULTADAS	173
	APÊNDICE 1 - ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS DA MALHA	174
	APÊNDICE 2 - ARQUIVOS DE ENTRADA DAS SIMULAÇÕES 1b E 4a CALIBRADAS	176

LISTA DE FIGURAS

2.1	TENSÕES ATUANTES NAS FACES DE UM VOLUME INFINITESIMAL DE FLUIDO	6
3.1	TÍPICO ESPECTRO DE UM ESCOAMENTO TURBULENTO	10
3.2	FORMAÇÃO DE TURBULÊNCIA JUNTO A UM CONTORNO SÓLIDO	14
3.3	REPRESENTAÇÃO DO COMPRIMENTO DE MISTURA	23
6.1	SUBDIVISÃO DO DOMÍNIO EM ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS .	63
6.2	ELEMENTO UNIDIMENSIONAL LINEAR	64
6.3	ELEMENTO UNIDIMENSIONAL QUADRÁTICO	65
6.4	ELEMENTOS BIDIMENSIONAIS LINEARES	66
6.5	ELEMENTOS BIDIMENSIONAIS QUADRÁTICOS	66
6.6	MALHA DE ELEMENTOS FINITOS BIDIMENSIONAIS QUADRÁTICOS	68
6.7	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS EM UM ELEMENTO TRIANGULAR E EM UM QUADRANGULAR	69
6.8	MÉTODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON	75
6.9	QUADRATURA DE GAUSS COM SETE PONTOS PARA ELEMENTO TRIANGULAR	77
6.10	QUADRATURA DE GAUSS COM NOVE PONTOS PARA ELEMENTO QUADRANGULAR	78
7.1	CONSTRUÇÃO DO MODELO FÍSICO – POSICIONAMENTO DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS DO LEITO DO RIO	82
7.2	CONSTRUÇÃO DO MODELO FÍSICO – MOLDAGEM DA SUPERFÍCIE DE CIMENTO	82
7.3	CONFIGURAÇÃO FINAL DO MODELO FÍSICO CALIBRADO	83
7.4	CURVA DE DESCARGA NA SEÇÃO DA RÉGUA PL-Ponte	84
7.5	CURVA DE DESCARGA NA SEÇÃO DA RÉGUA PL-11	84
7.6	CURVA DE DESCARGA NA SEÇÃO DA RÉGUA PL-16	85
7.7	DETALHE DA REGIÃO DE CORREDEIRAS — ENSAIO 1a	86
7.8	DETALHE DA REGIÃO DE CORREDEIRAS — ENSAIO 2a	86
7.9	MEDIDORES DE VAZÃO TIPO VERTEDOR TRIANGULAR E RETANGULAR	87

7.10	RÉGUA LINIMÉTRICA PARA MEDIÇÃO DE NÍVEIS DE ÁGUA NO MODELO	88
7.11	SEÇÕES DE MEDIÇÃO DE VELOCIDADES E NÍVEIS DE ÁGUA NO MODELO FÍSICO	89
7.12	ARANHA – DISPOSITIVO MÓVEL PARA MEDIÇÃO DE NÍVEIS DE ÁGUA	90
7.13	MEDIDOR ELETROMAGNÉTICO DE VELOCIDADES	90
7.14	DISPOSITIVO DE SUPORTE PARA O MEDIDOR ELETROMAGNÉTICO DE VELOCIDADES	91
7.15	VARIAÇÃO DA VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO – ENSAIO 3a – SEÇÃO S3 – PONTO 5861 NA REGIÃO DO ESCOAMENTO PRINCIPAL	92
7.16	VARIAÇÃO DA VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO – ENSAIO 3a – SEÇÃO S3 – PONTO 5871 NA REGIÃO DE CORRENTES DE RETORNO	92
8.1	MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS SIMULAÇÕES DOS ENSAIOS 3b, 4a E 4b	96
8.2	MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS SIMULAÇÕES DOS ENSAIOS 1a, 1b E 2a	97
8.3	VARIAÇÃO DA VELOCIDADE NO NÓ 5861 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$	101
8.4	VARIAÇÃO DA VELOCIDADE NO NÓ 5871 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$	101
8.5	CAMPO DE VELOCIDADES PARA DIFERENTES VALORES DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$	102
8.6	CONFIGURAÇÃO DO ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO – ENSAIO 2a – TRECHO DE MONTANTE	104
8.7	VARIAÇÃO DO NÍVEL DE ÁGUA NO NÓ 5861 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$	105
8.8	VARIAÇÃO DO NÍVEL DE ÁGUA NO NÓ 5871 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$	105
8.9	NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$	106

8.10	NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 2a – VARIAÇÃO DA RUGOSIDADE – $Re^{malha} = 20$	107
8.11	VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 2a – VARIAÇÃO DA RUGOSIDADE – $Re^{malha} = 20$	109
8.12	DIREÇÕES DAS VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 2a – VARIAÇÃO DA RUGOSIDADE – $Re^{malha} = 20$	110
8.13	CAMPO DE VELOCIDADES EM CADA SIMULAÇÃO – ENSAIO 2a – VARIAÇÃO DA RUGOSIDADE – $Re^{malha} = 20$	111
8.14	CONFIGURAÇÃO DO ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO – EN- SAIO 2a – TRECHO DE JUSANTE	112
8.15	NÚMERO DE FROUDE LOCAL NA SIMULAÇÃO DO ENSAIO 2a COM $n = 0,031$	113
8.16	VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE IMPOSIÇÃO DAS VELOCIDADES NA SEÇÃO DE ENTRADA	114
8.17	VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – VARIAÇÃO DA DIREÇÃO DAS VELOCIDADES DA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE MONTANTE – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$	116
8.18	NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – VARIAÇÃO DA DIREÇÃO DAS VELOCIDADES DA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE MONTANTE – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$	117
8.19	VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 4a – VARIAÇÃO DOS EFEITOS DAS CORRENTES SECUNDÁRIAS – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$	118
8.20	NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 4a – VARIAÇÃO DOS EFEITOS DAS CORRENTES SE- CUNDÁRIAS – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$	119
8.21	NÍVEIS DE ÁGUA AO LONGO DA SEÇÃO S2 – ENSAIO 4a – VARIA- ÇÃO DOS EFEITOS DAS CORRENTES SECUNDÁRIAS – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$	120
8.22	ISOLINHAS DE NÍVEIS DE ÁGUA – REGIÃO DE DIVERGÊNCIA DA SIMULAÇÃO DO ENSAIO 4a	121
9.1	VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 2b – $Re^{malha} = 10, 20$ e 30	124
9.2	VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 4a – $Re^{malha} = 10, 20$ e 30	125
9.3	VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 3a – $n_{margem} = 0,040, 0,065$ E $0,090$	129

9.4	NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 3a – $n_{margem} = 0,040, 0,065$ E $0,090$	131
9.5	REGIÕES COM RUGOSIDADE AUMENTADA NO MODELO FÍSICO	131
9.6	VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S3 A S5 E NÍVEIS DE ÁGUA AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 1a – $n_{canais} = 0,031, 0,040$ E $0,050$	132
9.7	MAPA DE COEFICIENTES DE RUGOSIDADE DO MODELO COMPUTACIONAL CALIBRADO	133
9.8	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1a	136
9.9	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1b	137
9.10	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2a	137
9.11	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2b	138
9.12	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3a	138
9.13	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3b	139
9.14	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4a	139
9.15	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4b	140
9.16	NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO	141
9.17	NÍVEIS DE ÁGUA LOCAIS NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4a	143
9.18	MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1a	146
9.19	DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1a	147
9.20	MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1b	148
9.21	DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1b	149

9.22	MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2a	150
9.23	DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2a	151
9.24	MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2b	152
9.25	DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2b	153
9.26	MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3a	154
9.27	DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3a	155
9.28	MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3b	156
9.29	DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3b	157
9.30	MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4a	158
9.31	DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4a	159
9.32	MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4b	160
9.33	DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4b	161
9.34	CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – TRECHO DE JUSANTE – ENSAIO 4b	162

LISTA DE TABELAS

6.1	COMPARAÇÃO ENTRE ALGUNS MODELOS COMPUTACIONAIS EXISTENTES	59
7.1	ENSAIOS REALIZADOS NO MODELO FÍSICO	87
8.1	COEFICIENTES DE VISCOSIDADE TURBULENTA RESULTANTES PARA ALGUNS NÚMEROS DE PÉCLET	100
9.1	DIFERENÇAS NORMALIZADAS ENTRE AS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 – ENSAIO 2b – $Re^{malha} = 10, 20$ e 30	126
9.2	DIFERENÇAS NORMALIZADAS ENTRE AS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 – ENSAIO 4a – $Re^{malha} = 10, 20$ e 30	127
9.3	DIFERENÇAS NORMALIZADAS ENTRE AS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 – ENSAIO 3a – $n_{margem} = 0,040, 0,065$ E $0,090$	130
9.4	DIFERENÇAS NORMALIZADAS ENTRE AS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 – ENSAIO 1a – $n_{canais} = 0,031, 0,040$ E $0,050$	134

LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{a}$	–	vetor aceleração
A_e	–	área do elemento
A_s	–	coeficiente empírico da equação de transporte da vorticidade
C_f	–	coeficiente de resistência
D_s	–	coeficiente empírico da equação de transporte da vorticidade
E_T	–	energia interna
F_i	–	função de forma
$\vec{F}$	–	vetor força de massa por unidade de volume
Fr	–	número de Froude
G	–	geração de energia cinética turbulenta
g	–	aceleração da gravidade
h	–	profundidade do escoamento
$\vec{i}$	–	versor na direção x
i	–	índice / contador genérico
$\vec{j}$	–	versor na direção y
J	–	matriz jacobiana
$\vec{k}$	–	versor na direção z
k	–	energia cinética turbulenta por unidade de massa
K	–	matriz de coeficientes globais
L	–	comprimento de referência
L	–	escala espacial característica dos grandes vórtices do escoamento
L_r	–	escala de comprimentos
m	–	massa
n	–	coeficiente de rugosidade de Manning
$\vec{n}$	–	vetor unitário normal à velocidade
N_i	–	função de base
p	–	pressão hidrostática
$\vec{P}$	–	vetor força de superfície por unidade de volume
Q	–	calor
r	–	raio de curvatura
R	–	constante do gás
$\vec{R}$	–	vetor força resultante
R	–	domínio
R_h	–	raio hidráulico
Re	–	número de Reynolds
Re^{malha}	–	número de Reynolds da malha
S	–	aceleração devida às correntes secundárias
T	–	temperatura
T	–	escala de tempo do escoamento médio
t	–	tempo
u	–	velocidade na direção x
u'	–	flutuação de velocidade na direção x
$\bar{u}$	–	componente de grande escala da velocidade u
$\tilde{u}$	–	representação funcional da variável u

u_e – escala de velocidade da turbulência
 U – velocidade média na seção transversal
 U – velocidade na direção x integrada na direção vertical
 v – velocidade na direção y
 V – velocidade na direção y integrada na direção vertical
 V – escala de velocidade característica dos grandes vórtices do escoamento
 $\vec{V}$ – vetor velocidade
 V_ω – velocidade do vento
 V_r – escala de velocidades
 V_o – velocidade de referência
 w – velocidade na direção z
 w – fator de ponderação da integração de Gauss
 W – trabalho
 W_i – função de ponderação
 x – uma das três direções do sistema de eixos cartesiano
 y – uma das três direções do sistema de eixos cartesiano
 z – uma das três direção do sistema de eixos cartesiano
 z_e – escala de comprimento da turbulência

Δx – tamanho do elemento
 ε – taxa de dissipação de energia
 ε – erro residual
 ϕ – latitude
 η – eixo do sistema de coordenadas local do elemento
 ξ – eixo do sistema de coordenadas local do elemento
 κ – constante de von Kármán
 ℓ – comprimento de mistura ou escala de comprimento da turbulência
 $\mathcal{L}$ – operador diferencial
 μ – viscosidade molecular dinâmica
 μ_t – viscosidade turbulenta dinâmica
 ν_t – viscosidade turbulenta cinemática
 Π – tensor de tensões
 ρ – densidade absoluta
 σ – tensão normal
 $\bar{\sigma}$ – média temporal da tensão σ
 τ – tensão tangencial
 τ_s – tensão tangencial promediada na profundidade
 $\forall ol$ – volume
 ω – vorticidade
 Ω – velocidade de rotação angular da Terra
 ψ – direção do vento
 $\vec{\nabla}$ – operador vetorial
 ζ – coeficiente empírico de vento

RESUMO

Este trabalho apresenta resultados de uma simulação de escoamento em um trecho de rio em dois modelos: um modelo físico de escala geométrica 1:100 e um modelo computacional de elementos finitos (RMA2), bidimensional em planta. O modelo físico foi calibrado com base em níveis de água medidos no protótipo. Foram realizados oito ensaios no modelo físico, com vazões entre 296 m³/s e 3758 m³/s. Nesses ensaios, foram efetuadas medições de velocidades e de níveis de água em diversos pontos e fotografias com flutuantes para registro das linhas de corrente. O modelo computacional foi calibrado e validado através dessas medições. Uma análise de sensibilidade no modelo computacional foi também realizada, analisando os seguintes itens: coeficiente do modelo de turbulência (Re^{malha}), coeficiente de rugosidade do leito (Manning), influência das condições de contorno e efeito do escoamento secundário na curva do rio. Os resultados obtidos com o modelo computacional foram muito semelhantes aos resultados do modelo físico, demonstrando que o modelo RMA2 é adequado para simular este tipo de escoamento. O modelo físico, por sua vez, mostrou-se uma ferramenta poderosa para direcionar a calibração do modelo computacional.

ABSTRACT

This study presents results from a simulation of a river flow by two models: a 1:100 physical model and a two-dimensional depth-averaged finite element model (RMA2). Water level measurements at the prototype were used to calibrate the physical model. Eight simulations were carried out in the physical model, with discharges ranging from 296 m³/s to 3758 m³/s. In these simulations, velocities and water levels were measured at several points. Photographs were taken using surface tracers to reveal flow patterns. These measurements were used to calibrate the computational model. A sensitivity analysis was also carried out, in which the following aspects were studied: turbulence coefficient (Re^{mesh}), roughness coefficient (Manning), upstream boundary condition and secondary flow effects. The velocities and water levels obtained from the computational model were quite similar to those from the physical model, what proved the suitability of RMA2 model to simulate this river flow. The physical model proved to be a powerful tool to guide the calibration of the computational model.

1 INTRODUÇÃO

O escoamento em rios é um tema relacionado com diversos setores da atividade humana, como a construção de aproveitamentos hidrelétricos, o transporte fluvial, estudos ambientais relacionados à qualidade da água, o transporte de poluentes e de sedimentos, proteção das margens, lazer e ictiofauna. Prever o comportamento da água sempre foi um grande desafio para engenheiros e pesquisadores. Ensaaios em modelos físicos reduzidos são freqüentemente utilizados para orientar essas previsões e subsidiar o projeto de obras de engenharia. Com o desenvolvimento tecnológico dos recursos computacionais, modelos matemáticos têm se apresentado como uma alternativa cada vez mais atraente para a simulação dos mais diversos fenômenos físicos envolvendo fluidos.

Há cerca de três décadas, modelos matemáticos processados em computador começaram a ser utilizados para fins práticos. Bem mais recente, entretanto, é a utilização desses modelos por pessoas que não os próprios autores dos programas. De certa forma, a difusão desses modelos acompanhou a popularização dos microcomputadores pessoais de grande capacidade de processamento e armazenamento, iniciada no final da década de 1980.

Este trabalho apresenta os resultados da utilização de dois modelos: um físico e um computacional. Os modelos foram utilizados para a simulação de um escoamento fluvial. O domínio escolhido foi um trecho do Rio Jacuí, no estado do Rio Grande do Sul. O modelo físico, construído no Centro de Hidráulica e Hidrologia Prof. Parigot de Souza (CEHPAR), seguiu padrões usuais de simulação de escoamentos com superfície livre: critério de semelhança de Froude e escala geométrica 1:100. O modelo computacional utilizado foi o RMA2, desenvolvido pelo *Resource Management Associates* a partir da década de 1970 para simulações hidrodinâmicas bidimensionais. O modelo físico foi calibrado com base em níveis de água medidos no protótipo. A calibração do modelo computacional foi realizada através da comparação de seus resultados com diversas medições no modelo físico. Portanto, está implícita neste trabalho a confiança depositada nos re-

sultados do modelo físico calibrado, respaldada pela experiência de 45 anos do CEHPAR com o uso de modelos físicos.

Este estudo nasceu do interesse em verificar a eficiência de uma ferramenta de DFC¹ que pudesse ser aplicada nos trabalhos desenvolvidos no CEHPAR. Não se pretendeu aqui fazer uma contribuição inédita às pesquisas da DFC, pelo contrário, o trabalho não está na fronteira da ciência e o seu enfoque é essencialmente de um trabalho de engenharia. Todavia, a sua importância reside na presença de uma grande quantidade de informações obtidas no modelo físico, muito úteis no trabalho de calibração e de validação do modelo computacional. Os dados necessários para a calibragem de modelos computacionais são geralmente escassos, ou mesmo inexistentes. Neste trabalho, entretanto, o modelo físico permitiu a obtenção de dados em uma faixa de vazões privilegiada, com a vazão máxima sendo mais de dez vezes superior à vazão mínima.

A utilização do modelo RMA2 não é trivial. A escolha de parâmetros físicos e numéricos é difícil e precisa estar sustentada por medições de campo ou de modelo físico. Para a determinação de coeficientes de rugosidade, a utilização de medições de níveis de água pode ser suficiente em algumas situações. No entanto, para a calibração do modelo de turbulência, medições de velocidades parecem imprescindíveis.

Espera-se que este trabalho seja ao mesmo tempo uma fonte de informações e de dúvidas que incitem outros pesquisadores a estender e aprofundar os aspectos aqui abordados.

¹Dinâmica dos fluidos computacional.

2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS

As equações introduzidas neste capítulo são as equações clássicas governantes do movimento dos fluidos. Este capítulo foi baseado, em sua quase totalidade, nos trabalhos de SCHLICHTING (1968) e DAILY e HARLEMAN (1966). Todas as equações são apresentadas para um sistema de coordenadas retangulares.

O escoamento de um fluido newtoniano, homogêneo, compressível e viscoso em um espaço tridimensional é conhecido quando é possível, em cada instante de tempo, determinar as 5 variáveis seguintes:

- a) $\vec{u} = u\vec{i}$: velocidade na direção x ($\vec{i}$ é o vetor unitário nessa direção);
- b) $\vec{v} = v\vec{j}$: velocidade na direção y ($\vec{j}$ é o vetor unitário nessa direção);
- c) $\vec{w} = w\vec{k}$: velocidade na direção z ($\vec{k}$ é o vetor unitário nessa direção);
- d) p : pressão;
- e) ρ : densidade.

É necessário um sistema de 5 equações para sua determinação, composto por:

- a) equação de Navier-Stokes na direção x;
- b) equação de Navier-Stokes na direção y;
- c) equação de Navier-Stokes na direção z;
- d) equação da continuidade;
- e) equação termodinâmica de estado.

Para os casos em que, além da densidade ρ e da pressão p , a temperatura é também uma variável na equação de estado:

$$p = \rho R T, \quad (2.1)$$

uma sexta equação — a primeira lei da termodinâmica — se faz necessária:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE_T}{dt} + \frac{dW}{dt}. \quad (2.2)$$

No caso do escoamento de um fluido suposto incompressível e isotérmico, a densidade ρ e a temperatura T são constantes e as equações (2.1) e (2.2) não são mais necessárias. O sistema passa a ser formado apenas pelas equações de Navier-Stokes e da continuidade.

2.1 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A equação da continuidade expressa, para um determinado volume de controle, o balanço entre a variação da densidade no interior do volume e os fluxos de massa entrando e saindo do mesmo por unidade de tempo. A equação geral da continuidade para escoamento compressível não-permanente de um fluido homogêneo é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$

Expandindo as derivadas de produto e rearranjando os termos chega-se a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)}_{\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho} + \underbrace{\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})} = 0.$$

Usando notação vetorial¹ a equação geral da continuidade resulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0. \quad (2.4)$$

A primeira parcela da equação (2.4) é chamada *contribuição local*, a segunda, indicada por alguns autores por $\frac{d\rho}{dt}$, é dita *contribuição convectiva* e o divergente da velocidade $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ na terceira parcela representa a *variação volumétrica instantânea*. É comum encontrar a primeira e a segunda parcela da equação representadas por um só termo: a derivada total ou substantiva da densidade $(\frac{D\rho}{Dt})$.

¹ $\vec{\nabla}$ = operador vetorial = $\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$
 $\vec{\nabla} a$ = gradiente do escalar a = vetor = $\frac{\partial a}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{k}$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{b}$ = divergente do vetor $\vec{b}$ = escalar = $\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}$
 $\vec{\nabla} \times \vec{b}$ = rotacional do vetor $\vec{b}$ = vetor = $(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) \vec{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \vec{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \vec{k}$

Para um *escoamento incompressível*, em que a densidade ρ é constante, os dois primeiros termos da equação (2.4) desaparecem e a equação da continuidade é simplificada para:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \equiv \quad \frac{d(\forall ol)}{dt} = 0, \quad (2.5)$$

onde $\forall ol$ é o volume do fluido em escoamento. A equação 2.5 é condição suficiente e necessária para escoamento incompressível (“condição de incompressibilidade”).

2.2 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As equações de Navier-Stokes traduzem o princípio da conservação da quantidade de movimento. Sua dedução parte da segunda lei de Newton:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{R}.$$

Tomando a equação por unidade de volume, supondo densidade ρ constante e separando o segundo membro em resultante das forças de massa por unidade de volume, $\vec{F}$, e forças de superfície por unidade de volume, $\vec{P}$, resulta:

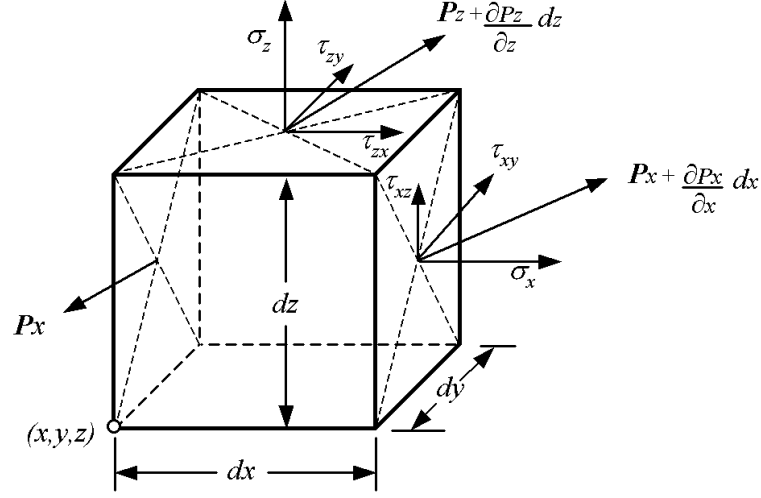
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} + \vec{P}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) = \vec{F} + \vec{P}. \quad (2.6)$$

As forças de superfície $\vec{P}$ atuantes no volume infinitesimal de lados dx , dy e dz (figura 2.1), quando analisadas nas três direções cartesianas, dão origem ao seguinte tensor de tensões:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

FIGURA 2.1 – TENSÕES ATUANTES NAS FACES DE UM VOLUME INFINITESIMAL DE FLUIDO



FONTE: SCHLICHTING (1968)

Essas tensões² são dadas pelas *equações constitutivas de um fluido newtoniano isotrópico*:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -p + \tau_{xx} ; \\ \sigma_y &= -p + \tau_{yy} ; \\ \sigma_z &= -p + \tau_{zz} ;\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) ; & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ; \\ \tau_{yy} &= -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) ; & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) ; \\ \tau_{zz} &= -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) ; & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) .\end{aligned}\tag{2.9}$$

²Verifica-se que há dois tipos de tensões: as normais de tração ou de compressão, representadas por σ_{xx} , e as tensões de atrito tangenciais às faces, no caso τ_{xy} e τ_{xz} . Todas as tensões dependentes de movimentos, i.e. tensões dinâmicas, são representadas pela letra τ . Por conta disso, as tensões normais são divididas em duas partes: uma existente mesmo em situação estática (p) e outra só existente em situação dinâmica (τ_{xx}) (ROSMAN, 1997).

Procedendo-se a decomposição da equação (2.6) nas direções x , y e z e substituindo-se a força de superfície $\vec{P}$ pelas suas componentes obtém-se:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right); \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right); \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (2.10)$$

Inserindo-se as equações constitutivas (2.8) e (2.9) no lugar das tensões normais e tangenciais, são obtidas as *equações de Navier-Stokes para fluido compressível com viscosidade variável*:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]; \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]; \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right].\end{aligned}\quad (2.11)$$

Em um escoamento incompressível, que corresponde ao caso estudado neste trabalho, o divergente da velocidade é nulo e as equações (2.11) podem ser escritas sem o termo $\frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. Se a viscosidade for considerada constante, o que geralmente ocorre em um escoamento incompressível pois as variações da temperatura T são pequenas e a viscosidade é basicamente apenas função da temperatura, as equações de Navier-Stokes podem

ser simplificadas para:

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) ; \\
 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) ; \\
 \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) .
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

ou, na forma vetorial:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V} . \tag{2.13}$$

3 TURBULÊNCIA

3.1 NOÇÕES FUNDAMENTAIS

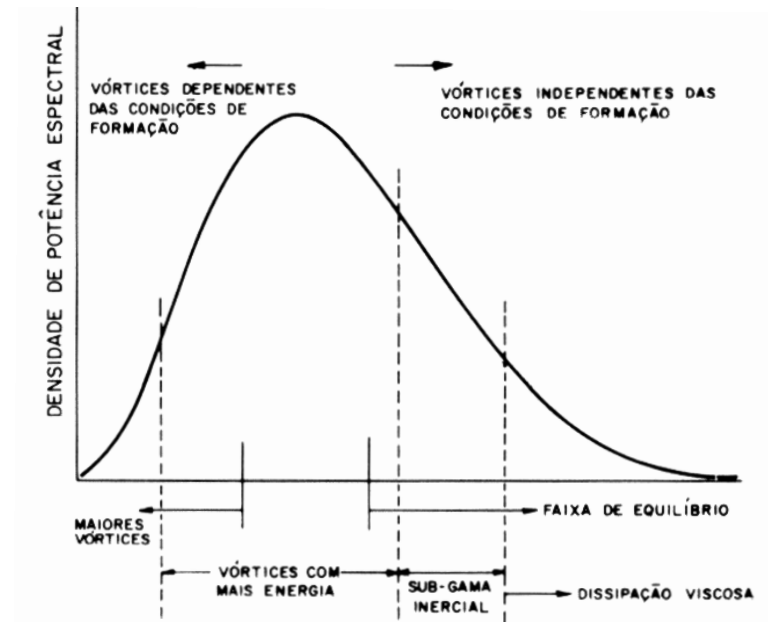
A principal característica dos escoamentos turbulentos é a presença de uma miríade de vórtices, numa vasta gama de escalas espaciais e temporais, fluindo simultaneamente.

O resultado da presença desses vórtices é um escoamento tão complexo em seus detalhes que parece inacessível a um tratamento matemático, mas é preciso considerar que o movimento de mistura resultante é muito importante para o desenvolvimento do escoamento e para o equilíbrio das forças. Os efeitos causados pela turbulência são como se a viscosidade do fluido fosse multiplicada por mil, dez mil ou mais (SCHLICHTING, 1968). Em números de Reynolds elevados existe uma transferência contínua de energia do movimento principal para os vórtices de maior tamanho. Tais vórtices geram outros menores, e estes outros menores ainda, num processo de transferência de energia formando uma cascata contínua de escalas decrescentes, em direção a uma gama de tamanhos onde a energia é dissipada pelas tensões viscosas, atingindo-se um estado de equilíbrio. Embora exista dissipação de energia em todo o processo, a maior parcela é dissipada quando os vórtices atingem as menores escalas. Esse processo é conhecido por *cascata de Kolmogoroff*, recebendo o nome do pesquisador que o descreveu pela primeira vez, em 1941 (SCHLICHTING, 1968; ROSMAN, 1989). A figura 3.1 mostra um típico espectro de potência para escoamentos turbulentos, isto é, um gráfico representando a distribuição da energia cinética turbulenta ao longo das escalas espaciais do escoamento.

Os maiores vórtices são bastante anisotrópicos uma vez que dependem fortemente da geometria do corpo d'água e do modo de formação. Quando se observa os grandes vórtices, apesar de um comportamento algo flutuante, eles demonstram ter componentes bem determinísticas. Em corpos d'água rasos,¹ o comprimento característico dos maiores vórtices é geralmente muito maior do que as escalas de profundidade.

¹Para escoamento em águas rasas ver item 4.3.

FIGURA 3.1 – TÍPICO ESPECTRO DE UM ESCOAMENTO TURBULENTO

FONTE: BEDFORD² *apud* ROSMAN (1989)

Ao se focalizar vórtices cada vez menores, a influência da geometria do problema vai desaparecendo e o comportamento dos vórtices parece crescentemente aleatório. Na maioria dos escoamentos geofísicos há uma faixa de escalas de pequenos vórtices onde prevalece a isotropia. Evidentemente, no caso de escoamentos em corpos d'água rasos, para haver prevalência da isotropia é preciso que as escalas envolvidas sejam inferiores às da profundidade. Vórtices nessa situação estão numa gama de escalas chamada sub-gama inercial. Os escoamentos geofísicos de interesse na engenharia sempre têm espectros com subgama inercial por terem números de Reynolds bem maiores que 10^5 , condição suficiente para que tenham um espectro de turbulência complexo como o da figura 3.1 (TENNEKES; LUMLEY, 1972).

Não há, até o presente, soluções gerais analíticas para as equações de movimento dos fluidos devido à natureza matemática complexa das equações de Navier-Stokes: são equações diferenciais parciais de segunda ordem não-lineares. As soluções existentes são discretas, calculadas através de métodos numéricos.

²BEDFORD, K. W., **Spectra preservation capabilities of Great Lakes transport models**. IN: Transport models for inland and coastal waters. Editor: H. B. Fischer, Academic Press, 1981.

Para resolver numericamente as equações de Navier-Stokes tal como são, é preciso resolver o problema até as escalas onde as tensões viscosas tenham significado físico, ou seja, dentro de escalas capazes de resolver os vórtices onde a dissipação viscosa ocorre. Resolver um problema até certa gama de escalas significa utilizar, no modelo numérico correspondente, discretizações espaciais e temporais compatíveis. ALDAMA³ e YOSHISAWA⁴, citados por ROSMAN (1989), mostram que, para resolver um vórtice de tamanho L por exemplo, é preciso haver pontos discretos com espaçamento inferior a $L/2$, e no mínimo $L/4$ para uma resolução razoável. Isto é, o modelo numérico para resolver um problema dentro de tais escalas teria um número avassalador de equações, de acordo com o desenvolvimento a seguir.

Conforme será mostrado no item 3.4.1.2, a partir de considerações dimensionais, a escala espacial ℓ_k , típica dos vórtices onde a dissipação viscosa ocorre, é da ordem de $\nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$, onde ε denota a taxa de dissipação de energia e ν a viscosidade cinemática. Experimentos mostram que a taxa ε está fortemente relacionada à escala de velocidade V e à escala espacial L , características aos grandes vórtices de um dado escoamento, sendo da ordem de V^3/L . Das expressões para ℓ_k e ε obtém-se:

$$\frac{L}{\ell_k} = \mathcal{O}(Re^{3/4}), \quad (3.1)$$

sendo $Re = (V L)/\nu$ o número de Reynolds. Das relações acima, conclui-se que o número de pontos de discretização N necessários para resolver tal escoamento até a escala de dissipação viscosa seria (ROSMAN, 1989):

$$N = \mathcal{O}\left(\left[\frac{L}{\ell_k}\right]^3\right) = \mathcal{O}(Re^{9/4}). \quad (3.2)$$

³ALDAMA, A. A. **Theory and applications of two and three-scale filtering approaches for turbulent flow simulations**, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1985.

⁴YOSHISAWA, A. **Encyclopaedia of fluid mechanics – Vol. 6 – Complex flow phenomena and modeling**, ed. N. P. Cheremisinoff, Gulf Publishing Company, 1987.

Nos escoamentos geofísicos, freqüentemente o número de Reynolds é superior a 10^8 , devido às vastas dimensões espaciais dos corpos d'água. Conseqüentemente, para utilizarmos as equações de Navier-Stokes tais como são, teríamos que resolver sistemas da ordem de 10^{18} equações simultâneas. Tal tarefa excede a capacidade dos atuais computadores e provavelmente a de qualquer computador no futuro previsível. E mesmo que houvesse computadores capazes de lidar com tantas equações, restaria ainda uma quase impossibilidade física: obter condições de contorno apropriadas para as escalas da dissipação viscosa (ROSMAN, 1989). Segundo BRADSHAW, CEBECI e WHITELAW (1981), os escoamentos turbulentos contêm flutuações de energia com freqüências de zero a 10 kHz ou mais, com uma faixa igualmente larga de variação de comprimentos de onda.

A solução numérica direta das equações instantâneas de Navier-Stokes⁵ é uma possibilidade real, mas improvável em um futuro próximo. Apenas escoamentos relativamente simples e com baixos números de Reynolds podem ser calculados por simulação direta de Navier-Stokes, com os computadores atuais. Todavia, a fronteira está avançando continuamente na medida em que os computadores e os algoritmos evoluem. A cada avanço na capacidade computacional, torna-se possível aplicar DNS e LES a escoamentos de complexidade progressivamente maior (TANNEHILL; ANDERSON; PLETCHER, 1997).

Uma solução possível para esse aparente impasse seria modelar estatisticamente os escoamentos turbulentos. A teoria para uma mecânica dos fluidos em bases estatísticas está bem desenvolvida, mas o emprego de modelos estatísticos para escoamentos geofísicos não é prático. Para se obter então um modelo determinístico resolvível, é preciso ser menos ambicioso e almejar apenas modelar as características gerais dos escoamentos turbulentos (ROSMAN, 1989).

A necessidade de resolver problemas de engenharia introduziu uma simplificação padrão: a *separação*. Através da separação, cada variável global de um escoamento

⁵Em inglês *direct numerical simulation* (DNS).

turbulento é dividida em uma parte “média” ou de grande escala, $\bar{u}$, a ser propriamente definida, e numa parte de “flutuação” ou de pequena escala, u' , da qual apenas os efeitos gerais e não os detalhes aparecem no modelo. Matematicamente, pode-se expressar a separação como:

$$u = \bar{u} + u' . \quad (3.3)$$

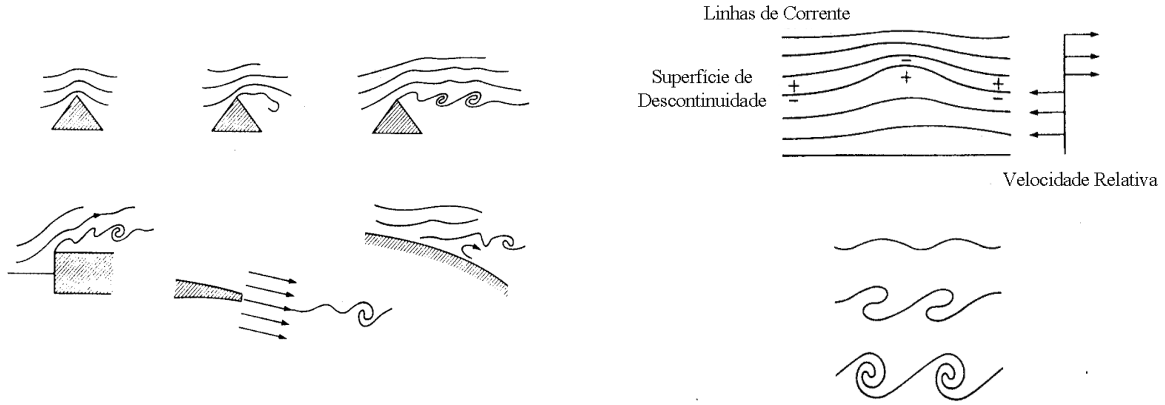
Pode-se assim obter um modelo determinístico para o escoamento “médio” ou de grande escala. O número de pontos de discretização necessários para resolver um escoamento turbulento tridimensional apenas nos aspectos gerais, ou de grande escala, reduz-se para no máximo algo da ordem de 10^5 (ROSMAN, 1989). Modelos dessa ordem são compatíveis com a capacidade de processamentos dos computadores atuais.

Nas seções 3.3 e 3.5, são apresentados brevemente métodos para separar as variáveis turbulentas, visando a obter modelos matemáticos para o escoamento “médio”, ou talvez mais propriamente, escoamento de grande escala.

3.2 ORIGENS DA TURBULÊNCIA

A turbulência não pode sustentar-se sozinha, depende do ambiente em que ocorre para obter energia. Uma fonte de geração de turbulência (geração de vórtices) são as diferenças de velocidade que ocorrem entre camadas adjacentes de fluido, causadas, por exemplo, pela irregularidade de um contorno sólido. Existe, nesse caso, uma tendência de formação de ondulações nas linhas de corrente, como indicado na figura 3.2. Se for aplicada a equação de Bernoulli sobre os tubos de corrente mostrados na figura 3.2, conclui-se que existe uma região de alta pressão no lado côncavo de cada crista de onda e uma de baixa pressão no lado convexo. Conseqüentemente, a superfície ondulada é instável e tende a amplificar-se, curvando-se na direção do fluxo e desprendendo-se em vórtices separados (DAILY; HARLEMAN, 1966).

FIGURA 3.2 – FORMAÇÃO DE TURBULÊNCIA JUNTO A UM CONTORNO SÓLIDO



FONTE: DAILY; HARLEMAN (1966)

Outras fontes de turbulência existem, tais como as flutuações causadas por variação de temperatura e densidade. O escoamento cisalhante ou de tensão cisalhante⁶ é uma fonte comum de energia para as flutuações turbulentas de velocidade. Escoamentos turbulentos são geralmente escoamentos cisalhantes.

3.3 MODELOS DE ESCOAMENTO MÉDIO VIA MÉTODOS CONVENCIONAIS

Esta seção está baseada no trabalho de ROSMAN (1989).

3.3.1 Média Temporal de Reynolds e Média Relaxada

Historicamente, o método da separação foi introduzido por Osborne Reynolds em 1885, quando derivou as agora chamadas equações de Reynolds para o escoamento médio. Reynolds definiu a parte média $\bar{u}(x_i)$ das variáveis turbulentas instantâneas $u(x_i)$ através da seguinte promediação:

$$\bar{u}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(x_i, t') dt', \quad (3.4)$$

onde $x_i = (x_1, x_2, x_3)$ é o vetor posição, t o tempo e T a escala de tempo do escoamento médio.

⁶Do termo inglês *shear flow*.

Usando a equação (3.3) e uma sobrebarra para indicar a promediação acima, pode-se mostrar que são verdadeiros os conhecidos postulados de Reynolds:

$$\overline{\overline{u}} = \overline{u} , \quad \overline{u'} = 0 , \quad \overline{\overline{u} u'} = 0 . \quad (3.5)$$

Usando a notação indicial, onde índices repetidos num dado termo indicam somatório para todos os valores do índice, as equações de Navier-Stokes para escoamentos turbulentos podem ser resumidamente escritas como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = F , \quad (3.6)$$

onde u_i representa a componente na direção i do vetor velocidade, $i, j = 1, 2, 3$ são os índices indicativos das três direções cartesianas, e F representa as forças externas divididas pela massa específica do fluido. Promediando a equação (3.6) via média de Reynolds (equação 3.4) e usando a separação (equação 3.3), podemos escrever a conhecida equação de Reynolds para o escoamento médio:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} + \overline{\overline{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \overline{u}_j} + \overline{u'_i u'_j}) = \overline{F} , \quad (3.7)$$

que após fazermos uso dos postulados em 3.5 torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\overline{u}_i \overline{u}_j}) = \overline{F} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) . \quad (3.8)$$

O último termo em (3.8), representando correlações entre flutuações de velocidade, é usualmente referido como tensões turbulentas ou de Reynolds. Evidentemente, para se resolver apenas o escoamento médio ou de grande escala não se pode simplesmente deixar as tensões turbulentas em função de correlações de velocidades de pequena escala (“flutuações”). Seria preciso então, ou reescrever tais termos através de uma parametrização utilizando apenas termos de grande escala, ou escrever equações adicionais para

tais termos, de modo que o número de equações fosse igual ao de incógnitas. Os procedimentos para representação apropriada das tensões de Reynolds são conhecidos como modelagem da turbulência e são apresentados no item 3.4.

A principal limitação da média de Reynolds é que tal operação só tem sentido para escoamentos estatisticamente estacionários, isto é, escoamentos com médias, variâncias e outras propriedades constantes, o que resulta em equações independentes do tempo (SCHLICHTING, 1968; TENNEKES; LUMLEY, 1972; BRADSHAW, 1981). Conseqüentemente, as equações de Reynolds são inadequadas para modelar a grande maioria dos escoamentos geofísicos. Por isso, na prática da engenharia, o requerimento da estacionariedade é relaxado e equações em regime não permanente são obtidas via médias temporais pelo método Krilov-Bogoliukov-Mitropolski (NIHOUL⁷, *apud* ROSMAN, 1989). Isto é, aplica-se uma *média temporal relaxada*, com base num idealizado período intermediário T , suficientemente pequeno para deixar os fenômenos de grande escala que se deseja modelar passarem quase intactos, mas suficientemente grande para idealmente eliminar os rápidos processo flutuantes de pequena escala (WHITE⁸, *apud* ROSMAN, 1989; RODI, 1981). Dessa forma, a equação (3.4) modifica-se para:

$$\bar{u}(x_i, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(x_i, t') dt' , \quad (3.9)$$

onde usamos a mesma sobrebarra usada no caso da média de Reynolds, para indicar o paralelismo das duas operações.

A equação do movimento para o escoamento “médio” via média temporal relaxada seria então:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = \bar{F} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) . \quad (3.10)$$

⁷NIHOUL, J. C. J. **Modeling of marine systems**, ed. J. C. J. Nihoul, Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.

⁸WHITE, F. M. **Viscous fluid flow**. McGraw Hill, 1974.

Entretanto, tal média temporal relaxada tem sérias inconsistências quando aplicada à maioria dos escoamentos geofísicos. Os postulados de Reynolds, expressões (3.5), que são verdadeiros para escoamentos estatisticamente estacionários (“escoamentos permanentes”), são também assumidos como verdadeiros para o caso da média relaxada no tempo. No entanto, se por meio da equação (3.4) as variáveis médias são independentes do tempo, da média temporal relaxada (3.9) resultam variáveis com dependência temporal. Conseqüentemente, a validade dos postulados de Reynolds nesse caso é no máximo uma aproximação. Conforme indicado por ALDAMA (1985), para podermos desprezar os termos cruzados envolvendo a média de produtos das partes “média” e “flutuante” de uma variável turbulenta, por exemplo $\overline{\bar{u}_i u'_j}$, seria necessário que não houvesse interação entre as escalas características representativas das duas partes. Isso significa que tal escoamento teria um espectro com dois picos distintos e separados por uma região de pouca ou nenhuma energia. Um pico seria característico do escoamento de grande escala ou “médio” e o outro, do escoamento de pequena escala ou “flutuações”. No vazio entre os dois picos encontrar-se-ia a escala de separação, ou seja, o idealizado período intermediário T , que aparece na média temporal relaxada (3.9).

Sabe-se muito bem, no entanto, que os escoamentos geofísicos em sua quase totalidade apresentam espectros cheios, isto é, não há múltiplos picos distintos nem tampouco vazios pronunciados. Isso mostra claramente que assumir a validade dos postulados de Reynolds no caso da média temporal relaxada não passa de grosseira aproximação, forçada por necessidades práticas. E, a bem da verdade, as equações do movimento obtidas por tal método deveriam ser escritas como (ROSMAN, 1989):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = \bar{F} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{u'_i u'_j}) . \quad (3.11)$$

Portanto, no caso da média temporal relaxada, a modelação da turbulência envolve muito mais do que apenas correlações de componentes de pequena escala da velocidade global. Enquanto na equação de Reynolds (3.8), as tensões turbulentas a se-

rem modeladas são $(\overline{u'_i u'_j})$, no caso da média temporal relaxada deve-se que modelar $(\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i u'_j} + \overline{u'_i u_j})$.

Esse é um fato muito pouco discutido na literatura sobre o assunto, mas que deve ser compreendido pelo modelador.

3.3.2 Média Estatística

Um modo mais rigoroso e tecnicamente correto de efetuar a separação decorre da introdução do conceito de média estatística (*ensemble average*). Por este método, a média das variáveis turbulentas é definida estatisticamente, isto é:

$$\langle u(x_i, t) \rangle \equiv \overline{u}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u^{(n)}(x_i, t), \quad (3.12)$$

onde n representa o número da realização e N o total de realizações⁹.

O conceito por trás da promediação estatística é que, embora o valor instantâneo das variáveis turbulentas flutue de uma realização para outra, a partir de um dado ponto no tempo e no espaço, suas estatísticas convergirão para um valor fixo (constante) após um número suficientemente grande de realizações. Da equação (3.12), fica claro que ao contrário da média temporal de Reynolds (3.4), a promediação estatística não apresenta restrições concernentes à estacionariedade do escoamento e, portanto, escoamentos médios não permanentes são corretamente definidos.

Mantendo presente as diferenças conceituais entre as equações (3.4) e (3.12), pode-se escrever os postulados para a promediação estatística como (3.5) e as equações do movimento promediadas estatisticamente como (3.10).

A dificuldade teórica com a promediação estatística aparece na modelação das tensões turbulentas. Nessa modelação, busca-se reintroduzir nas equações promediadas

⁹Para se manter o paralelismo com os métodos já apresentados, utiliza-se a sobrebarra para indicar a promediação estatística, estando as diferenças conceituais de cada método indicadas no texto.

parte da informação perdida com a mudança de escalas. Isto é, antes da promediação, as equações representavam os mínimos detalhes do escoamento e, após, apenas os aspectos de grande escala ou médios são resolvidos. Uma informação básica a ser reintroduzida refere-se às escalas temporais e espaciais características do escoamento médio, independente do método de promediação utilizado. No entanto, na promediação temporal relaxada, ao menos a escala temporal de separação entre pequena e grande escala está explicitada, vide equação (3.9), ao passo que a promediação estatística, a priori, não tem qualquer relação com escalas físicas, e nem pode ser um método aplicável na prática a escoamentos geofísicos. No caso de processos estacionários poder-se-ia invocar a hipótese de ergodicidade e igualar médias estatísticas a médias temporais. Todavia, escoamentos geofísicos de nosso interesse geralmente estão longe de ser processos estacionários. Conseqüentemente, a promediação estatística serve mais como ferramenta de análise teórica e as médias temporais relaxadas, apesar das inconsistências mencionadas, são as efetivamente utilizadas na prática.

A questão da própria definição do que seja escoamento médio ou de grande escala é bastante complexa e transcende o objetivo deste texto. A seção 3.5 apresenta brevemente uma metodologia alternativa, que potencialmente tem muitas vantagens em relação aos métodos convencionais já discutidos.

3.4 ESQUEMAS DE FECHAMENTO DA TURBULÊNCIA

As equações de Reynolds formam um sistema aberto, onde o número de incógnitas é maior do que o número de equações, em virtude da inclusão das tensões turbulentas de Reynolds. O processo de transformar as equações exatas e insolúveis em equações aproximadas e solúveis é chamado *modelagem da turbulência* (BRADSHAW; CEBECI; WHITELAW, 1981).

As equações de Reynolds contêm correlações turbulentas de segunda ordem como $\overline{u'v'}$; as equações para o transporte desses termos (seção 3.4.2.2) contêm, entre outras

incógnitas turbulentas, correlações de terceira ordem como $\overline{u'v'w'}$; essas, por sua vez, podem ser modeladas por equações diferenciais de transporte contendo correlações de quarta ordem e assim sucessivamente. Portanto, um conjunto infinito de equações promediadas no tempo seria necessário para reproduzir toda a informação contida nas equações instantâneas de Navier-Stokes. Então, para o cálculo das velocidades médias, o conjunto de equações precisa ser “fechado”, isto é, truncado em um certo nível de detalhamento e as informações perdidas a partir desse nível devem ser introduzidas através de dados experimentais ou fórmulas empíricas.

Os esquemas de fechamento da turbulência mais comuns podem ser organizados da seguinte forma:

- a) esquemas utilizando o conceito da viscosidade turbulenta (de Boussinesq) ou modelos de 1ª ordem:
 - a.1) modelos algébricos:
 - comprimento de mistura de Prandtl (1925);
 - similaridade de von Kármán (1930);
 - viscosidade em função de escalas de velocidade e comprimento (1954 a 1966);
 - a.2) modelos com uma equação diferencial:
 - transporte da energia cinética turbulenta k de Prandtl (1945);
 - transporte da viscosidade cinemática de torvelinho de Nee e Kovasznyay (1969);
 - a.3) modelos com duas equações diferenciais:
 - modelo $k - \varepsilon$;
 - outros;
- b) modelos simulando o transporte das tensões de Reynolds ou modelos de 2ª ordem:
 - b.1) modelos algébricos;

- b.2) modelos com equações diferenciais;
- c) modelos de simulação de grandes vórtices¹⁰ e técnicas de filtragem.

3.4.1 Esquemas Utilizando o Conceito da Viscosidade Turbulenta

Esta seção foi escrita com base em SCHLICHTING (1968) e ROUSE (1961).

Uma questão de fundamental importância no escoamento turbulento consiste no fato de que as flutuações u' , v' e w' influenciam o movimento médio descrito por u , v e w de uma forma tal que este exibe um aparente aumento na resistência à deformação. Em outras palavras, a presença das flutuações manifesta-se através de um aparente aumento da viscosidade do fluido (SCHLICHTING, 1968).

Com o intuito de relacionar as tensões de Reynolds com características mais facilmente mensuráveis do escoamento, Boussinesq introduziu em 1877 a noção de viscosidade turbulenta (LAUNDER; SPALDING, 1972).

Em analogia ao coeficiente de viscosidade da lei de resistência de Newton para escoamento laminar:

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3.13)$$

Boussinesq propôs o coeficiente de mistura¹¹ μ_t através do qual pode-se expressar as tensões de Reynolds em termos do gradiente da velocidade média, como em:

$$\overline{\tau'_{xz}} = -\rho \overline{u'w'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (3.14)$$

Diferentemente da viscosidade molecular μ , a viscosidade turbulenta μ_t não é uma característica intrínseca do fluido mas da intensidade das flutuações turbulentas do escoamento. Por isso, μ_t varia largamente em magnitude tanto de um escoamento para

¹⁰Em inglês *large eddy simulation* (LES).

¹¹O coeficiente μ_t foi inicialmente chamado coeficiente de viscosidade *molar*, para diferenciá-lo do coeficiente de viscosidade molecular do fluido, tendo mais tarde recebido a denominação de coeficiente de viscosidade *aparente*, *virtual* ou *turbulenta* (do inglês *eddy viscosity*).

outro quanto de um ponto para outro no mesmo escoamento. Na verdade μ_t deve depender da velocidade média $\bar{u}$ ¹². Isso pode ser deduzido lembrando-se que as forças de resistência no movimento turbulento são aproximadamente proporcionais ao quadrado da velocidade média, em vez da proporção direta característica do escoamento laminar. De acordo com a equação (3.14), isso implica que μ_t é aproximadamente proporcional à primeira potência da velocidade média.

A viscosidade turbulenta serviu de base para a formulação de diversos modelos de turbulência, mas não constitui por si só um modelo, pois resta ainda expressá-la em termos de grandezas conhecidas ou calculáveis.

3.4.1.1 Modelos algébricos para μ_t

Os modelos algébricos são aqueles que não utilizam equações diferenciais na determinação da viscosidade turbulenta μ_t . Nesse caso, a energia cinética turbulenta k não aparece na fórmula da viscosidade μ_t e assume-se que o movimento médio não é afetado pela intensidade da turbulência. A distribuição da escala de comprimento (ℓ no caso do modelo de Prandtl) pode também ser especificada por uma equação algébrica (BRADSHAW; CEBECI; WHITELAW, 1981).

Comprimento de mistura de Prandtl

Em 1925, Ludwig Prandtl introduziu uma dimensão linear característica chamada *comprimento de mistura*, análoga, até certo ponto, ao caminho livre médio da teoria cinética dos gases (LAUNDER; SPALDING, 1972). Esse comprimento pode ser considerado como a distância média que uma partícula de fluido percorre antes de igualar sua quantidade de movimento àquela das partículas da região em que chegou.

¹²E, no caso da DFC, depende da escala de discretização.

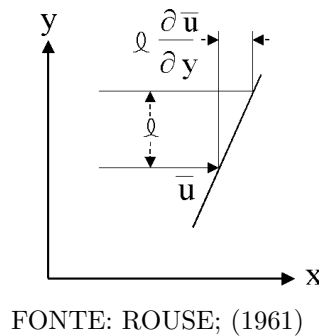
Assim como no caso das flutuações turbulentas da velocidade, é razoável que a magnitude do comprimento de mistura varie não apenas de ponto para ponto, mas em um dado ponto varie com a direção. Prandtl, no entanto, restringiu sua análise ao caso elementar de escoamento cisalhante, onde:

$$\bar{u} = \bar{u}(z) ; \quad \bar{v} = 0 ; \quad \bar{w} = 0 , \quad (3.15)$$

definindo o comprimento de mistura como uma distância normal à direção do escoamento principal médio. Ele relacionou as componentes de flutuação com o gradiente transversal de velocidade, considerando que a partícula de fluido cruzando o comprimento de mistura ℓ normal ao escoamento, antes de alterar sua quantidade de movimento, causaria uma flutuação ao final de sua jornada proporcional ao produto entre ℓ e o gradiente da velocidade média, como na figura 3.3. Assim, a seguinte proporcionalidade média pode ser escrita (ROUSE, 1961):

$$\overline{|u'|} \sim \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} .$$

FIGURA 3.3 – REPRESENTAÇÃO DO COMPRIMENTO DE MISTURA



FONTE: ROUSE; (1961)

Adicionalmente, Prandtl concluiu que, se duas partículas aproximam-se uma da outra em uma dada direção, em virtude da continuidade, o fluido entre as partículas afasta-se transversalmente a essa direção, com uma velocidade que depende da velocidade de aproximação das partículas. Se, por outro lado, as partículas afastam-se, o espaço vazio entre elas precisa ser preenchido pelo fluido ao redor, dando origem a uma flutuação transversal no sentido oposto. Em outras palavras, deve haver uma proporcionalidade

entre as componentes de flutuação em duas direções normais, assim expressa:

$$\overline{|u'|} \sim \overline{|w'|}.$$

Como as tensões turbulentas podem ser expressas em função dessas componentes, tem-se:

$$\overline{\tau'_{xz}} = -\rho \overline{u'w'} \sim \rho \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{|w'|} \sim \rho \ell^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|.$$

Considerando que tanto o comprimento ℓ quanto o coeficiente de proporcionalidade são desconhecidos, é conveniente agrupá-los em um só termo. Então, se o coeficiente de proporcionalidade for absorvido por ℓ pode-se escrever a igualdade:

$$\overline{\tau'_{xz}} = \rho \ell^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|. \quad (3.16)$$

Comparando a hipótese de Boussinesq (3.14) com a equação (3.16), resulta para a viscosidade turbulenta de Prandtl:

$$\mu_t = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|. \quad (3.17)$$

Sabe-se através de experimentos que o arrasto turbulento é aproximadamente proporcional ao quadrado da velocidade e a mesma conclusão é obtida da equação (3.16) se o comprimento de mistura ℓ for considerado independente da magnitude da velocidade, sendo apenas uma função das coordenadas espaciais. Prandtl propôs que o comprimento de mistura seja proporcional à distância do contorno sólido mais próximo.

A formulação do comprimento de mistura mostrou boa concordância com resultados experimentais para escoamentos de camadas limites bidimensionais. Na realidade, ao mesmo tempo em que a teoria do comprimento de mistura proposta por Prandtl tem um grande valor esquemático, uma investigação mais apurada mostra que ela está longe de ser matematicamente ou fisicamente correta. Basta, para isso, considerar o quanto é

difícil imaginar partículas de fluido deslocando-se por uma certa distância transversal e subitamente tendo sua quantidade de movimento alterada (ROUSE, 1961).

Hipótese de similaridade de von Kármán

Seria bastante útil conhecer uma regra que estabelecesse a dependência entre o comprimento de mistura e as coordenadas espaciais do escoamento. Von Kármán propôs tal regra apoiando-se em duas suposições (ROUSE, 1961):

- a) o mecanismo da turbulência é independente da viscosidade molecular do fluido exceto na vizinhança imediata dos contornos sólidos;
- b) a estrutura da turbulência é estatisticamente similar (mesmo fator de correlação entre as flutuações) em todos os pontos do escoamento, variando apenas nas escalas de tempo e de comprimento.

As duas hipóteses estão de acordo com medições experimentais. A escala de comprimento pode ser representada por uma quantia ℓ similar ao comprimento de mistura de Prandtl mas não necessariamente representando o mesmo conceito do processo de mistura, enquanto a escala de tempo é relacionada com o gradiente da velocidade média.

Von Kármán demonstrou que, se tais hipóteses forem aplicadas ao caso do escoamento cisalhante da equação (3.15), pode-se chegar às seguintes conclusões¹³:

- a) As componentes de flutuação são proporcionais ao comprimento ℓ e ao gradiente $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$;
- b) As tensões turbulentas são proporcionais a $\rho \ell^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2$;
- c) O comprimento ℓ é proporcional a $\frac{\partial \bar{u}/\partial z}{\partial^2 \bar{u}/\partial z^2}$. Assim, ℓ é independente da magnitude da velocidade, sendo função apenas da distribuição da velocidade.

¹³Uma demonstração mais detalhada do procedimento seguido por von Kármán pode ser encontrada em SCHLICHTING (1968).

Aplicando essas conclusões à fórmula da tensão de Reynolds e agrupando as constantes de proporcionalidade na constante κ , von Kármán chegou à expressão:

$$\overline{\tau'_{xz}} = -\rho \kappa^2 \frac{(\partial \bar{u}/\partial z)^4}{(\partial^2 \bar{u}/\partial z^2)^2}. \quad (3.18)$$

Evidências experimentais consubstanciam a formulação de von Kármán e indicam que o fator de proporcionalidade κ tem a natureza de uma constante universal, com um valor aproximado de 0,40.

Viscosidade μ_t em função de escalas de velocidade e comprimento

Há um outro grupo de fórmulas algébricas que têm em comum o fato da viscosidade de torvelinho ser determinada pelas escalas de velocidade u_e e de comprimento z_e do escoamento médio, na forma:

$$\mu_t = \rho u_e z_e f(z), \quad (3.19)$$

onde $f(z)$ refere-se a uma função espacial com limitado grau de generalidade (LAUNDER; SPALDING, 1972).

Vários autores fazem diferentes escolhas para u_e e z_e . CLAUSER¹⁴ e Mellor¹⁵ adotam a velocidade do escoamento fora da camada limite e a espessura de deslocamento da camada limite. Para escoamentos em tubulações, JONSSON e SPARROW¹⁶ utilizam a velocidade de corte e o raio do tubo. A função $f(z)$ deve ser escolhida para cada escoamento, atuando como um parâmetro de ajuste (LAUNDER; SPALDING, 1972).

¹⁴CLAUSER, F. H. **The turbulent boundary layer**. Adv. in App. Mech. IV, pt. 1, New York: Academic Press, 1956.

¹⁵MELLOR, G. L. **Turbulent boundary layers with arbitrary pressure gradients and divergent or convergent cross flows**. Dept. Aerospace and Mech. Sci., Princetown Univ., Rep 775. 1966.

¹⁶JONSSON, V. K.; SPARROW, E. M. **Turbulent diffusivity for momentum in concentric annuli**. J. Basic Eng. 88, 550, 1966.

O modelo computacional RMA2 utiliza um modelo deste tipo, onde a escala de comprimentos é dada pela dimensão do elemento na direção do escoamento¹⁷, a escala de velocidades é a própria magnitude da velocidade no elemento e a função é o inverso do número de Reynolds da malha. Dessa forma, a viscosidade turbulenta de cada elemento ν_t^e resulta no modelo RMA2:

$$\nu_t^e = V \Delta x \frac{1}{Re^{malha}}, \quad (3.20)$$

onde Δx é o comprimento do elemento e Re^{malha} é o número de Reynolds da malha.

O número de Reynolds da malha¹⁸ (Re^{malha}) é um valor adimensional que deve ser calibrado. Assim como o número de Reynolds, ele indica a razão entre as intensidades dos fenômenos convectivos e difusivos. Quanto maior o número de Reynolds da malha, menor a intensidade da difusão, ou seja, mais livres estarão os vetores velocidade para mudar de direção e mais desordenado parecerá o campo de escoamento.

3.4.1.2 Modelos para μ_t com uma equação diferencial

A extensiva aplicação do modelo do comprimento de mistura de Prandtl expôs suas limitações, particularmente a falta de universalidade dos dados de entrada empíricos. Um das principais falhas do modelo é que ele está baseado na hipótese implícita de que a turbulência está em equilíbrio local, ou seja, que em cada ponto do escoamento a energia turbulenta é dissipada com a mesma taxa que é produzida, de forma que não há influência da produção de turbulência em outros pontos ou em instantes anteriores. Assim, o modelo não pode considerar os efeitos temporais e de transporte. Ele fornece uma viscosidade turbulenta nula sempre que o gradiente de velocidade é zero, o que conduz a simulações não realistas em muitos casos (RODI, 19--).

¹⁷O tamanho dos elementos determina a escala dos fenômenos resolvíveis. Segundo ROSMAN (2000), para ser razoavelmente resolvido em uma malha numérica, um fenômeno precisa ter uma escala pelo menos quatro vezes maior do que a escala de discretização e oito vezes maior para ser bem resolvido.

¹⁸O manual do usuário do modelo RMA2 utiliza o termo *número de Péclet* em lugar do número de Reynolds da malha. Cabe citar aqui que o número de Péclet é normalmente utilizado quando se trata de difusividade de massa, e não de quantidade de movimento.

Para superar essas limitações, foram propostos modelos onde um parâmetro característico da turbulência é determinado através de uma equação diferencial de transporte. A energia cinética turbulenta média por unidade de massa:

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

é o parâmetro normalmente utilizado, pois caracteriza a intensidade das flutuações e representa a escala de velocidades das mesmas.

Aqui, é preciso salientar que os efeitos de transporte sobre a escala de comprimento — por exemplo ℓ — são igualmente importantes. Uma fórmula algébrica precisa para ℓ raramente pode ser determinada exceto para escoamentos unidirecionais em canais. Todavia, nesses escoamentos, o modelo de comprimento de mistura fornece resultados bons a um custo matemático muito menor. Por isso, modelos de uma só equação diferencial não são adotados com frequência porque apresentam um ganho pequeno de precisão e de generalidade a um custo computacional elevado.

Modelo de Prandtl do transporte da energia cinética turbulenta k

Em 1945, Prandtl sugeriu para a escala de velocidade da turbulência, no lugar de $\ell \frac{\partial u}{\partial y}$ de seu modelo do comprimento de mistura, a raiz quadrada da energia cinética turbulenta k , resultando a seguinte equação para a viscosidade turbulenta:

$$\mu_t = \rho \ell \sqrt{k}. \quad (3.21)$$

Nessa equação k é determinado através de uma equação diferencial e ℓ através de uma fórmula algébrica (LAUNDER; SPALDING, 1972).

É interessante verificar que relações entre a viscosidade cinemática ν , a taxa de dissipação de energia por unidade de massa ε e as escalas de comprimento ℓ_k , de velocidade u_k e de tempo t_k podem ser obtidas através de uma análise dimensional na escala dos

menores vórtices, como apresentado nos parágrafos seguintes. As equações 3.21 e 3.27 estão relacionadas com esse conceito.

Em escalas de comprimento muito pequeno, a viscosidade molecular pode ser efetiva em reduzir as flutuações de velocidade. A geração de flutuações de pequena escala deve-se aos termos não-lineares das equações de Navier-Stokes; os termos viscosos impedem a geração de escalas de movimento infinitamente pequenas através da dissipação da energia de pequena escala em calor. Seria razoável esperar que em números de Reynolds elevados, a magnitude relativa da viscosidade seria tão pequena que os efeitos viscosos no escoamento tenderiam a desaparecer. Os termos não-lineares nas equações de Navier-Stokes agem contra essa tendência gerando movimentos em escalas pequenas o suficiente para serem afetadas pela viscosidade. A menor escala de movimento automaticamente ajusta-se ao valor da viscosidade. Parece não haver modo de eliminar a viscosidade: assim que a escala do campo de escoamento torna-se tão grande que os efeitos viscosos seriam possivelmente negligenciados, o escoamento cria movimentos de pequena escala, mantendo assim os efeitos viscosos (em particular as taxas de dissipação) em patamares finitos (TENNEKES; LUMLEY, 1972).

Como movimentos de pequena escala tendem a possuir escalas de tempo pequenas, pode-se assumir que esses movimento são estatisticamente independentes da relativamente lenta turbulência de grande escala e do escoamento de grande escala. Se essa hipótese faz sentido, o movimento de pequena escala deve depender apenas da taxa em que ele recebe energia do escoamento de grande escala e da viscosidade cinemática. É razoável assumir que a taxa de transferência (fornecimento) de energia é igual à taxa de dissipação de energia, porque a taxa líquida de variação da energia de pequena escala é relacionada à escala de tempo do escoamento como um todo. A taxa líquida de variação da energia, portanto, deve ser pequena comparada à taxa em que a energia é dissipada (TENNEKES; LUMLEY, 1972).

Essa discussão sugere que os parâmetros que governam o movimento de pequena escala incluem pelo menos a taxa de dissipação de energia por unidade de massa ε (m^2s^{-3}) e a viscosidade cinemática ν (m^2s^{-1}). Através de análise dimensional com esses dois parâmetros, são deduzidas as seguintes escalas de comprimento, velocidade e tempo:

$$\ell_k = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} ; \quad (3.22)$$

$$u_k = \nu^{1/4} \varepsilon^{1/4} ; \quad (3.23)$$

$$t_k = \frac{\nu^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}} . \quad (3.24)$$

Essas escalas são chamadas *micro-escalas de Kolmogoroff* ou, na literatura russa, escalas “internas”. O número de Reynolds formado com ℓ_k e u_k é igual a um:

$$\frac{\ell_k u_k}{\nu} = 1 , \quad (3.25)$$

ilustrando que a dissipação viscosa se ajusta ao fornecimento de energia através do ajuste das escalas de comprimento (TENNEKES; LUMLEY, 1972). Adicionalmente, reflete a idéia de que, nas menores escalas do movimento, a força de inércia do vórtice é aproximadamente igual à sua força de transporte viscoso, ou a viscosidade turbulenta é aproximadamente igual à viscosidade molecular (RUBIN; ATKINSON, 2001).

Combinando-se as equações 3.23 e 3.22 de forma a isolar ν e ε , chega-se a:

$$\nu = \ell_k u_k \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{u_k^3}{\ell_k} , \quad (3.26)$$

equações que assumem forma similar às equações 3.21 e 3.27 quando se adota a raiz quadrada da energia cinética turbulenta, $k^{1/2}$ no lugar da escala de velocidades u_k .

Modelo de Nee e Kovasznay do transporte da viscosidade turbulenta μ_t

NEE e KOVASZNAY¹⁹, citados por LAUNDER e SPALDING (1972), propuseram um modelo onde a variável dependente da equação diferencial de transporte é a própria viscosidade turbulenta cinemática ν_t ($= \mu_t/\rho$). Na equação de transporte de ν_t surge a escala de comprimento da turbulência, fornecida através de fórmula empírica.

3.4.1.3 Modelos para μ_t com duas equações diferenciais

Essa classe de modelos inclui aqueles em que uma segunda grandeza característica da turbulência é determinada através de uma equação diferencial. Essa grandeza está, em geral, relacionada com a distribuição da escala de comprimento da turbulência que, como já mencionado, é difícil de ser determinada empiricamente para casos mais complexos do que o escoamento unidirecional em canal.

Modelos de duas equações diferenciais têm caráter mais geral do que os modelos de ordem zero (modelos algébricos) ou de uma equação, possuindo menor variação dos coeficientes empíricos de calibração.

Modelo $k - \varepsilon$

O modelo $k - \varepsilon$ é o modelo de duas equações mais comumente empregado. Adicionalmente à equação para k , este modelo utiliza, na determinação da escala de comprimento, uma equação diferencial para a taxa de dissipação de energia ε :

$$\varepsilon \approx \frac{k^{3/2}}{\ell}. \quad (3.27)$$

A equação de transporte de k (a mesma utilizada nos modelos de uma equação descritos acima) é obtida multiplicando-se as equações de Navier-Stokes em cada direção

¹⁹NEE, V. W.; KOVASZNAY, L. S. G. **Simple phenomenological theory of turbulent shear flows: Physics of Fluids**, vol. 12, n° 3, pgs. 473-484. 1969.

por sua flutuação de velocidade correspondente e somando-se as três equações promediadas no tempo (LAUNDER; SPALDING, 1972).

As equações semi-empíricas para k e ε usualmente empregadas são:

$$\underbrace{u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} + w \frac{\partial k}{\partial z}}_{\text{convecção}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right)}_{\text{difusão}} + \underbrace{G}_{\text{geração}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{dissipação}} \quad \text{e} \quad (3.28)$$

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} G - C_{\varepsilon 2} \varepsilon), \quad (3.29)$$

sendo $\nu_t = \mu_t / \rho$ a viscosidade turbulenta cinemática. A geração de energia turbulenta G é dada, para escoamentos quaisquer em canais, em notação tensorial, por:

$$G = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.30)$$

A equação para ε é formada empiricamente de modo que sua forma seja similar à da equação de k . Uma vez que as distribuições de k e ε através do escoamento são conhecidas, a distribuição da viscosidade turbulenta ν_t é calculada através da relação:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (3.31)$$

O modelo $k - \varepsilon$ envolve cinco constantes empíricas cujos valores freqüentemente utilizados são, segundo BRADSHAW, CEBECI e WHITELAW (1981):

$$C_\mu = 0,09; \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92; \quad \sigma_k = 1,0; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3. \quad (3.32)$$

Os mesmos autores listam pequenas variações sobre esses coeficientes, sugeridas por diversos autores para diferentes tipos de turbulência e de escoamentos.

Outros modelos de duas equações para μ_t

Kolmogoroff (1942) foi o primeiro pesquisador a propor um modelo de duas equações, considerando a energia turbulenta k e a frequência característica média dos movimentos turbulentos f . A ausência de recursos computacionais adequados em sua época impediram Kolmogoroff de verificar que a escolha de f não era adequada, mas a importância da sua proposta reside em apontar a necessidade de uma equação diferencial para uma característica da turbulência adicional a k (LAUNDER; SPALDING, 1972), para melhorar os resultados do modelo.

Os pesquisadores seguintes, citados por LAUNDER e SPALDING (1972), utilizaram outras grandezas, relacionadas direta ou indiretamente à escala de comprimento da turbulência: ROTTA²⁰ e SPALDING²¹ utilizaram a própria escala ℓ , SPALDING²² propôs o uso da flutuação da vorticidade ω , ROTTA²³, RODI e SPALDING²⁴ e NG e SPALDING²⁵ utilizaram o produto $k\ell$ na segunda equação de transporte.

²⁰ROTTA, J. **Statistische theorie nichthomogener turbulenz**. Zeitsch. für Physik, 129, 547, e 131, 51. 1951.

²¹SPALDING, D. B. **The calculation of the length scale of turbulence in some turbulent boundary layers remote from walls**. Imperial College, Heat Transfer Section REP TWF/TN/31. 1967.

²²SPALDING, D. B. **The prediction of two-dimensional, steady turbulent flows**. Imperial College, Heat Transfer Section REP EF/TN/A/16. 1969.

²³ROTTA, J. **Über eine methode zur berechnung turbulenter scherströmungen**. Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen, Rep 69 A 14. 1968.

ROTTA, J. **Recent attempts to develop a generally applicable calculation method for turbulent shear flow layers**. Proceedings of AGARD Conference on Turbulent Shear Flows, London. 1971.

²⁴RODI, W.; SPALDING, D. B. **A two parameter model of turbulence and its application to free jets**. Wärme und Stoffübertragung 3, 85. 1970.

²⁵NG, K. H.; SPALDING, D. B. **Some applications of a model of turbulence to boundary layers near walls**. Physics of Fluids, 15. 1972.

3.4.2 Modelos Simulando o Transporte das Tensões de Reynolds

Existem modelos de turbulência que simulam o transporte das próprias tensões turbulentas (divididas por ρ):

$$\begin{array}{ccc} \overline{u'v'}; & \overline{u'w'}; & \overline{v'w'}; \\ \overline{u'^2}; & \overline{v'^2}; & \overline{w'^2}, \end{array}$$

sem envolver o conceito da viscosidade turbulenta e sem assumir que as tensões turbulentas são proporcionais aos gradientes das velocidades médias.

As tensões turbulentas são regidas por equações diferenciais e, diferentemente das tensões puramente viscosas, não são simplesmente funções dos gradientes de velocidade (BRADSHAW; CEBECI; WHITELAW, 1981). Essas equações contém termos de convecção, difusão, geração e dissipação similares aos da equação de k ; na verdade, a equação de k é a metade da soma das equações das três tensões turbulentas normais. Adicionalmente, observa-se que as equações das tensões turbulentas contém um termo de correlação entre as flutuações de pressão e o gradiente de velocidade que redistribui a energia entre as três componentes de velocidade e atua como um termo dissipativo nas equações das tensões tangenciais turbulentas.

Modelos desse tipo requerem, além das equações das tensões turbulentas, a solução de uma equação para determinar a distribuição da escala de comprimento, por exemplo a equação de ε (NEZU; NAKAGAWA, 1993). A escala de comprimento utilizada para modelar as tensões turbulentas é a dos maiores vórtices, que contém a maior parte da contribuição para $\overline{u'_i u'_j}$ (BRADSHAW; CEBECI; WHITELAW, 1981).

3.4.2.1 Modelos algébricos para o transporte das tensões turbulentas

Como a solução das equações de transporte para cada tensão turbulenta é computacionalmente cara, alguns pesquisadores transformaram as equações em expressões

algébricas inserindo hipóteses simplificadoras sobre os termos de convecção e difusão. NEZU e NAKAGAWA (1993) citam os trabalhos de HOSSAIN²⁶, CELIK e RODI²⁷ e NAOT e RODI²⁸, que empregaram modelos desse tipo para escoamentos 2D e 3D em canais.

3.4.2.2 Modelos com equações diferenciais para o transporte das tensões turbulentas

A equação exata de transporte de $-\overline{u'w'}$ pode ser obtida multiplicando-se a equação de Navier-Stokes na direção x por w' e na direção z por u' , fazendo-se a média temporal e somando-se as duas. Para viscosidade e densidade uniformes e sem forças externas, a equação assume a seguinte forma, em notação vetorial:

$$\underbrace{u_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}}_{\text{convecção}} = - \underbrace{\left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}_{\text{geração}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k}}_{\text{dissipação}} + \underbrace{\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)}_{\text{redistribuição}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_j u'_k} + \Delta_{ik} \frac{\overline{u'_i p'}}{\rho} + \Delta_{ik} \frac{\overline{u'_j p'}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right)}_{\text{difusão}} \quad (3.33)$$

Os termos da equação (3.33), com exceção das parcelas de convecção e de geração, necessitam ser modelados, isto é, hipóteses simplificadoras e empíricas são necessárias para relacioná-los a grandezas conhecidas do escoamento (BRADSHAW; CEBECI; WHITE-LAW, 1981). Outra opção, matematicamente mais cara, é resolver equações diferenciais adicionais para cada um desses termos, que por sua vez irão conter novos termos regidos por equações diferenciais. Dessa forma, a cadeia de equações pode estender-se até o nível em que se decida introduzir fórmulas algébricas para fazer o fechamento do conjunto de

²⁶HOSSAIN, M. S. **Mathematische Modellierung Turbulenter Auftriebsströmungen**. Ph. D. Thesis, University of Karlsruhe, Germany. 1980.

²⁷CELIK, I.; RODI, **Simulation of free-surface effects in turbulent channel flows**. Physico-chemical Hydrodynamics, 5: 217-222. 1984.

²⁸NAOT, D.; RODI, W. **Calculation of secondary currents in channel flow: proceedings of the american society of civil engineers** v. 108, n° HY8, pgs. 948-968. 1982.

equações. DAVIDOV²⁹ propôs um modelo com 23 equações diferenciais de transporte e KOLAVANDIN³⁰, com 28 equações (LAUNDER; SPALDING, 1972).

3.4.3 Escolha do Modelo de Turbulência

LAUNDER e SPALDING (1972) listam aspectos relevantes da decisão sobre um determinado modelo de turbulência:

- a) o “melhor” modelo depende do escoamento a ser modelado;
- b) quanto maior o conhecimento existente sobre o escoamento, maior é a chance de que um modelo simples seja suficiente;
- c) se o sacrifício da simplicidade não se traduz em benefícios tangíveis de precisão e abrangência de aplicação, o modelo precisa ser melhorado.

3.5 MODELOS DE ESCOAMENTO MÉDIO VIA TÉCNICAS DE FILTRAGEM

Com técnicas de filtragem, busca-se os mesmos objetivos que os das técnicas convencionais, ou seja, reduzir drasticamente a magnitude do problema de simular escoamentos turbulentos, resolvendo apenas o escoamento de grande escala ou “médio” e tratando o escoamento dissipativo de pequena escala via modelos simplificados. A principal diferença das técnicas de filtragem está na maneira de definir as variáveis médias, ou mais propriamente, quantidades filtradas (escaladas) (ROSMAN, 1989).

Usualmente, as técnicas de filtragem aparecem associadas com a chamada “simulação de grandes vórtices” (do inglês *Large Eddy Simulation* – LES). Nas aplicações de LES trabalha-se com vórtices na subgama inicial, o que no caso de corpos d’água rasos implica em escalas espaciais da ordem da profundidade. Além disso, através da LES busca-se a reprodução do espectro do escoamento até a escala da subgama inercial. O

²⁹DAVIDOV, B. I. **On the statistical dynamics of incompressible turbulent fluid.** Dokl. AN SSSR 136, 47. 1961.

³⁰KOLAVANDIN, B. A.; VATUTIN, I. A. **On the statistical theory of non-uniform turbulence.** Int. Seminar on Heat and Mass Transfer, Herceg Novi, Yugoslavia. 1969.

esforço computacional requerido numa simulação deste tipo é cerca de 10 vezes inferior ao necessário para uma simulação numérica direta (DNS) (TANNEHILL; ANDERSON; PLETCHER, 1997).

Através da técnica da filtragem, o interesse não está em modelar as flutuações transientes de vórtices relativamente isotrópicos com escala de comprimento da ordem de profundidade. O objetivo é modelar o escoamento típico dos grandes vórtices horizontais, fortemente dependentes da geometria horizontal do corpo d'água em vista e com um comportamento francamente determinístico se comparado ao dos vórtices na escala da profundidade. Dessa forma, as técnicas de filtragem são utilizadas apenas como um método aperfeiçoado para definir quantidades “médias”, ou melhor, de grande escala (DAKHOUL; BEDFORD³¹, *apud* ROSMAN, 1989).

3.5.1 Procedimentos de Filtragem

Filtrar uma função v significa fazer a convolução de v com uma função peso ou filtro G . Chamando de $\bar{v}$ a parte filtrada de v , podemos escrever:

$$\bar{v}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi') G(\xi - \xi') d\xi' , \quad (3.34)$$

onde ξ e ξ' são argumentos no domínio de v e G . A função filtro pode, em princípio, ser qualquer função que satisfaça a condição de preservar constantes, isto é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) d\xi = 1 , \quad (3.35)$$

e para o qual existam os dois primeiros momentos.

³¹DAKHOUL, Y.M. and BEDFORD, K.W., *Improved averaging method for turbulent flow simulation. Part I. Theoretical development and application to Burger's transport*, Int. J. Num. Methods in Fluids, 1986a,b.

Fazendo $\xi = t$ e $G = 1/T$ se $t - T/2 \leq \xi \leq t + T/2$, senão $G = 0$, tem-se de volta a promediação de Reynolds ou a temporal relaxada, dependendo da escala T do filtro (ROSMAN, 1989).

Inúmeras funções filtro já foram investigadas, e para o caso de escoamentos turbulentos parece inquestionável que filtros Gaussianos têm muitas vantagens sobre possíveis outros. Conforme BEDFORD e DAKHOUL³², e ALDAMA (1985), citados por ROSMAN (1989), pode-se definir filtro espaço-temporal Gaussiano como:

$$G(x_1, x_2, x_3, t) = \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\lambda_t} e^{[-6(t/\lambda_t)^2]} \prod_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} e^{[-6(x_i/\lambda_i)^2]}, \quad (3.36)$$

onde λ_i e λ_t são respectivamente as larguras espaciais e temporais do filtro Gaussiano, ou em outras palavras, as escalas do filtro no espaço e no tempo.

Aplicando-se o teorema de Gauss, pode-se mostrar que a operação de filtragem é comutativa com derivadas espaciais e temporais, se tivermos filtros Gaussianos permanentes e homogêneos, isto é, com λ_i e λ_t constantes (ALDAMA e FINDIKAKIS³³, *apud* ROSMAN, 1989). Portanto, filtrando-se a equação de Navier-Stokes (3.6), obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = \bar{F}, \quad (3.37)$$

onde $\bar{u}_i$ representa a componente de grande escala, ou resolvível, de u_i . Note que agora as sobrebarras indicam a operação de filtragem definida pela equação (3.34), com G definido pela equação (3.36) e $\xi \equiv (x_1, x_2, x_3, t)$.

Usando o teorema da convolução e transformadas de Fourier e sem usar separação, pode-se mostrar que, se λ_i e λ_t são pequenos em relação às escalas espaciais e temporais dos grandes vórtices de escoamento “médio”, a seguinte expansão em série é correta

³²BEDFORD, K.; DAKHOUL, Y. *Applying LES turbulence modeling to open channel flow*, Proceedings, 1982 ASCE Hydr. Div. Specialty Conference, Jackson, Mississippi, 1982.

³³FINDIKAKIS, A. N. *Finite element simulation of turbulente stratified flows*, Ph. D. diss, Dept. of Civil Engineering, Stanford University, 1980.

(ROSMAN³⁴ e ABBOTT; LARSEN³⁵ *apud* ROSMAN, 1989):

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \frac{\lambda_k^2}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \frac{\lambda_t^2}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} + \mathcal{O} [(\lambda_k^4, \lambda_t^4, \lambda_k^2, \lambda_t^2) \cdot D.A.O.] , \quad (3.38)$$

onde *D.A.O.* significa derivadas de alta ordem. Em 1985, ALDAMA chegou a resultado semelhante através da separação, isto é, chamando de u'_i a componente de pequena escala ou não resolvível de u_i e de $\overline{u_i}$ a componente de grande escala ou resolvível, escreve-se:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{u'_i \overline{u_j}} + \overline{u'_i u'_j} . \quad (3.39)$$

Contrastando com as promediações de Reynolds, temporal relaxada e estatística, não há postulados como 3.5 para o caso da filtragem. Assim, os termos cruzados $\overline{\overline{u_i} u'_j}$ não são nulos, e $\overline{\overline{u_i}} \neq \overline{u_i}$. Entretanto, ALDAMA (1985) provou que a seguinte série é assintótica:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \frac{\lambda_k^2}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \frac{\lambda_t^2}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} + \overline{u'_i u'_j} , \quad (3.40)$$

onde os termos de mais alta ordem estão embutidos em $\overline{u'_i u'_j}$. Analisando as equações (3.38), (3.39) e (3.40), fica claro que os termos de filtragem, isto é, os termos envolvendo λ_i e λ_t , trazem em si informação sobre as componentes de grande escala do escoamento e, devido aos termos cruzados, também sobre a interação entre as componentes de grande e de pequena escala. Esse é um resultado teórico muito poderoso, cuja discussão está além dos objetivos deste texto.

Substituindo a expansão (3.40) acima na equação (3.37), obtém-se:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = \overline{F} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\lambda_k^2}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \frac{\lambda_t^2}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} + \overline{u'_i u'_j} \right) . \quad (3.41)$$

³⁴ROSMAN, P.C.C., *Modeling shallow water bodies via filtering techniques*, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1987.

³⁵ABBOTT, M.B. and LARSEN, J., *Modelling circulation in depth-integrated flows. Part2: A reconciliation*, Journal of Hydraulic Research, IAHR 23(5), 1985.

Comparando a equação (3.41) com os resultados obtidos via promediações convencionais, equação (3.10) ou (3.11), podemos ressaltar duas vantagens potenciais. Primeiro, o termo a ser modelado na equação (3.41) envolve apenas termos de pequena escala, ao contrário da equação (3.11). Segundo, com a técnica de filtragem obtêm-se equações para o escoamento de grande escala onde aparecem explicitamente nos termos de filtragem as escalas espaciais e temporais relativas ao escoamento resolvível (ROSMAN, 1989).

De fato, as escalas do filtro λ_k e λ_t definem as mínimas escalas espaciais e temporais resolvíveis pela equação filtrada. Há uma evidente correlação entre os valores de λ_k e λ_t e a discretização a ser usada no modelo numérico. Através de experimentação numérica, KWAK³⁶ *et al.*, LOVE³⁷ e ALDAMA (1985), citados por ROSMAN (1989), mostraram que os valores de $\lambda_k = 2\Delta x_k$ e $\lambda_t = 2\Delta t$ são adequados. Do teorema da amostragem sabe-se que o comprimento e o período dos menores vórtices resolvíveis são, respectivamente, $2\Delta x_k$ e $2\Delta t$. Conseqüentemente, tomando esses valores para as escalas do filtro no espaço e no tempo, na verdade está-se definindo escalas de Nyquist no espaço e no tempo. Isso porque os números de onda de Nyquist são $\pi/\Delta x_k$, o que equivale a $2\pi/\lambda_k$, e a frequência de Nyquist $\pi/\Delta t = 2\pi/\lambda_t$. Assim, vê-se que através da técnicas de filtragem, as equações são “preparadas” para serem resolvidas numericamente, colocando-se numa escala conforme com a discretização numérica adotada.

3.5.2 Equações Governantes para o Escoamento de Grande Escala

3.5.2.1 Equação da continuidade

CSANADY³⁸, citado por ROSMAN (1989), discute a validade da hipótese de incompressibilidade da água e conclui que, para as condições usuais em corpos d’água rasos, a hipótese é perfeitamente justificável. Assim, a equação da continuidade reduz-se

³⁶KWAK, D.; REYNOLDS, W. C.; FERZIGER, J. H. **Three-dimensional time dependent computation of turbulent flow**, Report no. TF-5, Dept. of Mech. Engineering, Stanford University, 1975.

³⁷LOVE, M. D. **Subgrid modeling studies with Burger’s equation**, Cambridge University Press, 1980.

³⁸CSANADY, G.T., *Circulation in the coastal ocean*, Reidel, 1982.

a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 . \quad (3.42)$$

Como essa equação é linear, a aplicação de qualquer dos métodos de promediação ou filtragem é trivial, resultando em:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 . \quad (3.43)$$

A equação acima expressa que a qualquer instante a taxa líquida de fluxos de entrada e de saída num dado volume de controle fixo no espaço é sempre nula (continuidade de volume).

3.5.2.2 Equação da conservação da quantidade de movimento

Antes de escrever a equação de Navier-Stokes, correspondente à segunda Lei de Newton num referencial Euleriano, é necessário explicitar uma aproximação básica, a chamada aproximação de Boussinesq. Em corpos de água rasos, os gradientes de densidade são tipicamente da ordem de um por mil, por isso, a substituição da massa específica real $\rho(x_i, t)$ por um valor de referência constante ρ_0 não apresenta problema, exceto no termo de pressão. No termo de pressão, conforme comenta CSANADY (1982), embora os gradientes de densidade sejam pequenos, muitas vezes não são desprezíveis. Isso posto, pode-se escrever a seguinte equação do movimento para o escoamento de grande escala ou resolvível:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - g \delta_{i3} + 2 \epsilon_{ijk} \bar{u}_j \Omega_k + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} , \quad (3.44)$$

onde $\bar{p}$ é o termo de pressão. No termo representando as forças de Coriolis, Ω_k são as componentes da velocidade angular da Terra num sistema de coordenadas locais. A magnitude de Ω_k é de 2π radianos em 24 horas, ou $\Omega \cong 0,7292 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

As tensões $\bar{\tau}_{ij}$ merecem uma explicação à parte, pois dependendo da aplicação de filtragem ou de promediações convencionais, o resultado é bem diferente. De uma forma geral, pode-se escrever:

$$\bar{\tau}_{ij} = \rho_0 \left[K_{ij} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\lambda_k^2}{12} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \frac{\lambda_t^2}{12} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} \right], \quad (3.45)$$

onde, se não se utilizar as técnicas de filtragem, deve-se ignorar os termos envolvendo λ_k e λ_t e, neste caso, K_{ij} deve ser chamado de coeficiente de viscosidade turbulenta. O termo de viscosidade turbulenta resulta da modelagem das correlações de pequena escala ou parte flutuante do escoamento real. Caso se considere o emprego de filtragem para definição do escoamento “médio”, K_{ij} pode ter valores muito diferentes, e deve ser chamado de coeficiente de viscosidade turbulenta filtrado. Valores adequados para K_{ij} quando os termos de filtragem estão presentes certamente não são os mesmos apresentados na literatura baseada em métodos convencionais de promediação.

É evidente que a importante diferença entre as equações filtradas e as equações promediadas convencionalmente está nos termos de filtragem. É preciso ressaltar que λ_k e λ_t não são parâmetros arbitrários com os quais se poderia “calibrar” um modelo numérico. São valores definidos pelo modelador como as menores escalas físicas de interesse no problema sendo investigado e estão, portanto, relacionados com as escalas de discretização.

4 ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL

4.1 INTRODUÇÃO

Diversos casos de escoamento na engenharia são passíveis de modelagem através de um modelo bidimensional em planta, comumente chamado modelo 2DH. A aproximação de um escoamento 3D para um modelo 2DH é adequada quando os perfis verticais de velocidade não afastam-se significativamente do perfil logarítmico típico de um escoamento turbulento e não há interesse particular em processos de estratificação no corpo d'água. Um modelo 2DH, portanto, calcula apenas as velocidades médias U e V , integradas na direção vertical, e a cota da superfície livre em cada ponto discreto do domínio.

As equações utilizadas em um modelo 2DH resultam da integração, na direção vertical, das equações gerais do movimento dos fluidos, como apresentado a seguir.

4.2 INTEGRAÇÃO NA DIREÇÃO z DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

As etapas de integração da equação da continuidade na direção vertical aqui demonstradas seguem, em linhas gerais, o desenvolvimento apresentado por CHAUDHRY (1993), ROSMAN (1989) e ROSMAN (1997).

Considera-se, a princípio, a equação da continuidade de volume para escoamento de um fluido suposto incompressível em um sistema ortogonal de eixos cartesianos¹:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Integrando na direção z resulta:

$$\int_a^{a+h} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_a^{a+h} \frac{\partial v}{\partial y} dz + w|_{a+h} - w|_a = 0, \quad (4.1)$$

¹Por facilidade de notação, a barra indicadora de média temporal foi suprimida deste ponto em diante.

sendo a a cota z do fundo do canal e h a profundidade do escoamento medida na direção vertical z . As integrais da equação (4.1) podem ser avaliadas através da regra de Leibnitz para integração de derivadas:

$$\int_a^{a+h} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^{a+h} u dz + u|_a \frac{\partial a}{\partial x} - u|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial x}; \quad (4.2)$$

$$\int_a^{a+h} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^{a+h} v dz + v|_a \frac{\partial a}{\partial y} - v|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial y}, \quad (4.3)$$

onde é necessário aplicar-se condições de contorno adequadas, de modo a se evitar incógnitas específicas dos contornos da superfície $(a+h)$ e do fundo (a) .

A superfície do fundo S_F pode ser definida pelos pontos com cota igual a $a(x, y, t)$, ou seja:

$$S_F(x, y, z, t) \equiv z - a(x, y, t) = 0. \quad (4.4)$$

De modo similar, pode-se definir a superfície livre S_L através dos pontos com cota igual a $(a+h)(x, y, t)$:

$$S_L(x, y, z, t) \equiv z - (a+h)(x, y, t) = 0. \quad (4.5)$$

A superfície livre e o fundo são superfícies permanentes, isto é, ambas podem sofrer alterações de posição localmente, mas as superfícies como um todo tem velocidade zero, pois permanecem delimitando os limites superior e inferior de um volume de partículas de água em escoamento. Este modelo conceitual das condições de contorno cinemáticas da superfície livre e do fundo podem ser modelados matematicamente como se mostra a seguir. Para tal, utiliza-se como exemplo (ROSMAN, 1997):

$$\frac{dS_L}{dt} = 0, \quad (4.6)$$

que em uma descrição Euleriana torna-se:

$$\frac{dS_L}{dt} = \frac{\partial S_L}{\partial t} + u \frac{\partial S_L}{\partial x} + v \frac{\partial S_L}{\partial y} + w \frac{\partial S_L}{\partial z} = 0. \quad (4.7)$$

Inserindo em (4.7) a equação da superfície livre (4.5), chega-se à *condição de contorno cinemática na superfície livre*:

$$-\frac{\partial(a+h)}{\partial t} - u|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial x} - v|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + w|_{a+h} = 0, \quad \text{em } z = (a+h)(x, y, t). \quad (4.8)$$

Fazendo o mesmo desenvolvimento para a superfície do fundo, pode-se escrever a *condição de contorno cinemática na superfície do fundo*:

$$-\frac{\partial a}{\partial t} - u|_a \frac{\partial a}{\partial x} - v|_a \frac{\partial a}{\partial y} + w|_a = 0, \quad \text{em } z = a(x, y, t). \quad (4.9)$$

Inserindo as relações (4.2), (4.3), (4.8) e (4.9) em (4.1) obtém-se a forma final da equação da continuidade integrada na vertical para escoamento incompressível:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial U}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial y} + U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (4.10)$$

onde U e V são as velocidades em x e y médias na vertical:

$$U(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} u(x, y, z, t) dz \quad \text{e} \quad V(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} v(x, y, z, t) dz. \quad (4.11)$$

4.3 SIMPLIFICAÇÃO PARA ÁGUAS RASAS

Escoamentos de grande escala, nos quais as escalas dos movimentos horizontais são pelo menos 20 vezes maiores do que a profundidade², podem ser considerados como quase horizontais ou escoamentos em águas rasas³ (ROSMAN, 2000). A consequência prática de um corpo de água ser considerado raso na escala de um dado fenômeno é

²Este é um número padrão da teoria de ondas. Por convenção, uma onda está em águas rasas sempre que seu comprimento for 20 vezes maior que a profundidade da região de propagação.

³Na realidade o conceito de águas rasas tem mais relação com o comprimento do fenômeno de interesse do que com a geometria aparente do corpo de água. Uma baía, por exemplo, é um corpo de água raso para correntes de maré; entretanto, pode ser um corpo de água profundo para escoamentos referentes a ondas geradas por vento na baía.

que a equação da quantidade de movimento na direção vertical pode ser simplificada, reduzindo-se à expressão da pressão hidrostática (ROSMAN, 1997).

4.3.1 Hipótese da Distribuição Hidrostática de Pressões

A equação da conservação da quantidade de movimento para a direção z , a partir da equação (3.44), é dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), \quad (4.12)$$

onde a aceleração da gravidade g resulta do termo de força por unidade de volume F_z dividida pela densidade ρ . A pressão p em um ponto numa profundidade z , pode ser obtida através da integração da equação (4.12) ao longo da coluna d'água⁴, da cota z até a superfície livre ($a + h$):

$$\begin{aligned} \int_z^{a+h} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= \int_z^{a+h} g dz + \\ &+ \underbrace{\int_z^{a+h} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz}_{p_d \approx 0 \quad \text{em corpos de água rasas}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

A chamada *aproximação hidrostática* consiste em considerar a pressão dinâmica p_d nula na equação (4.13). Considerando também a pressão $p|_{a+h}$ na superfície livre (pressão atmosférica) igual a zero, para se trabalhar diretamente com a pressão relativa, resulta:

$$p|_z = \rho g (a + h - z). \quad (4.14)$$

⁴Considera-se aqui, como em todo o restante deste trabalho, fluido homogêneo ($\rho \neq \rho(x, y, z, t)$).

4.4 INTEGRAÇÃO NA DIREÇÃO z DAS EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO NAS DIREÇÕES x E y

Partindo da equação (3.44) para a direção x ($i = 1$), inicialmente sem incluir a força de Coriolis, obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = \frac{F_x}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right). \quad (4.15)$$

A integração em z dos quatro termos do primeiro membro, aplicando a regra de Leibnitz, fornece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a+h} u \, dz + u|_a \frac{\partial a}{\partial t} - u|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial t} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_a^{a+h} u^2 \, dz + u^2|_a \frac{\partial a}{\partial x} - u^2|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_a^{a+h} uv \, dz + uv|_a \frac{\partial a}{\partial y} - uv|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \\ - uw|_a + uw|_{a+h}. \end{aligned}$$

Os dois últimos termos de cada linha anulam-se através da aplicação das condições de contorno cinemáticas na superfície livre (equação 4.8) e no fundo (equação 4.9), resultando⁵, através de (4.11):

$$h \frac{\partial U}{\partial t} + hU \frac{\partial U}{\partial x} + hV \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (4.16)$$

O termo $\frac{F_x}{\rho}$ de (4.15) representa as forças por unidade de massa na direção x . Em alguns casos de escoamentos de grandes dimensões pode tornar-se relevante a força de Coriolis:

$$F_x^{Coriolis} = 2 \rho h \Omega V \sin(\phi), \quad (4.17)$$

em que Ω é a velocidade de rotação angular da Terra e ϕ a latitude local.

⁵A rigor, nesta dedução restariam os termos com correlações de desvios de velocidades médias na vertical $\int \tilde{u}^2 \, dz$ e $\int \tilde{u}\tilde{v} \, dz$, que são assimilados pelo modelo de turbulência.

Aplicando a regra de Leibnitz, a relação (4.14) e considerando nula a pressão $p|_{a+h}$ (pressão atmosférica), o termo de pressão pode ser assim integrado ao longo da profundidade:

$$\int_a^{a+h} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^{a+h} p dz - p|_a \frac{\partial a}{\partial x} + p|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial x} \quad (4.18)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^{a+h} \rho g (a+h-z) dz - \rho g h \frac{\partial a}{\partial x} \quad (4.19)$$

$$= -g h \frac{\partial(a+h)}{\partial x} . \quad (4.20)$$

Integrando o último termo da equação 4.15, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_a^{a+h} \tau_{xx} dz + \tau_{xx}|_a \frac{\partial a}{\partial x} - \tau_{xx}|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial x} \right) + \\ + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_a^{a+h} \tau_{xy} dz + \tau_{xy}|_a \frac{\partial a}{\partial y} - \tau_{xy}|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{\rho} (\tau_{xz}|_{a+h} - \tau_{xz}|_a) . \quad (4.21) \end{aligned}$$

Para lidar com valores de tensões prescritas na superfície livre e no fundo aplicam-se condições de contorno dinâmicas. Na superfície livre S , as tensões do vento τ^S e as tensões no fluido são iguais. Assim, tem-se na direção x , rearranjando os termos de (4.21):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_a^{a+h} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_a^{a+h} \tau_{xy} dz \right) + \\ + \frac{1}{\rho} \underbrace{(\tau_{xx}|_a \frac{\partial a}{\partial x} + \tau_{xy}|_a \frac{\partial a}{\partial y} - \tau_{xz}|_a)}_{-\tau_x^F |\vec{\nabla} F|} \underbrace{(-\tau_{xx}|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial x} - \tau_{xy}|_{a+h} \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \tau_{xz}|_{a+h})}_{\tau_x^S |\vec{\nabla} S|} , \quad (4.22) \end{aligned}$$

onde $\vec{\nabla} F = (-\frac{\partial a}{\partial x}, -\frac{\partial a}{\partial y}, 1)$ é um vetor normal ao fundo, $\vec{\nabla} S = (-\frac{\partial(a+h)}{\partial x}, -\frac{\partial(a+h)}{\partial y}, 1)$ é um vetor normal à superfície livre, τ^F e τ^S são as tensões de atrito junto ao fundo e à superfície livre.

A partir da equação (3.45) e sem se utilizar os termos de filtragem, a primeira linha de (4.22) resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^{a+h} 2 \mu_t^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_a^{a+h} 2 \mu_t^{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz \quad (4.23)$$

que, no caso do modelo RMA2, onde considera-se μ_t homogêneo e isotrópico, é ajustada para:

$$\frac{h}{\rho} \mu_t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h}{\rho} \mu_t \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} . \quad (4.24)$$

A tensão na superfície livre, gerada pelo vento, é dada por:

$$\tau_x^S = \rho \zeta V_w^2 \cos(\psi) , \quad (4.25)$$

onde ζ é um coeficiente empírico, V_w é a velocidade do vento e ψ é direção do vento medida no sentido anti-horário a partir do eixo x . A tensão junto ao fundo pode ser avaliada pela aplicação de uma fórmula empírica, como a de Manning, da seguinte forma:

$$\tau^F = \rho g R_h \left(\frac{n^2 V_{u+v}^2}{R_h^{4/3}} \right) ,$$

onde R_h é o raio hidráulico, n o coeficiente de rugosidade de Manning, e V_{u+v} a velocidade resultante da soma de U e V , cujo módulo é $\sqrt{U^2 + V^2}$. Considerando o raio hidráulico igual à profundidade h e denominando β o ângulo entre V_{u+v} e U , a tensão junto ao fundo na direção x será dada por:

$$\tau_x^F = \tau^F \cos(\beta) = \rho g h \left(\frac{n^2 V_{u+v}^2}{h^{4/3}} \right) \frac{U}{V_{u+v}} = \frac{\rho g n^2 U}{h^{1/3}} \sqrt{U^2 + V^2} . \quad (4.26)$$

Substituindo os termos já integrados na equação (4.15) obtém-se a forma final da equação da quantidade de movimento na direção x integrada na profundidade, como

aplicada pelo modelo RMA2:

$$h \frac{\partial U}{\partial t} + hU \frac{\partial U}{\partial x} + hV \frac{\partial U}{\partial y} = 2 h \Omega V \operatorname{sen}(\phi) - g h \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \frac{h}{\rho} \left(\mu_{t(xx)} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu_{t(xy)} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \zeta V_w^2 \cos(\psi) + \frac{g n^2 U}{h^{1/3}} \sqrt{U^2 + V^2}. \quad (4.27)$$

A equação na direção y , obtida de forma inteiramente análoga à da direção x , resulta:

$$h \frac{\partial V}{\partial t} + hU \frac{\partial V}{\partial x} + hV \frac{\partial V}{\partial y} = -2 h \Omega U \operatorname{sen}(\phi) - g h \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \frac{h}{\rho} \left(\mu_{t(yx)} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu_{t(yy)} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \zeta V_w^2 \operatorname{sen}(\psi) + \frac{g n^2 V}{h^{1/3}} \sqrt{U^2 + V^2}. \quad (4.28)$$

Essas equações, juntamente com a equação integrada da continuidade, são comumente referidas como as *equações de águas rasas*. Estão em sua *formulação primitiva*, porque suas variáveis dependentes são as variáveis primitivas velocidade e profundidade, e também na *forma não-conservativa* (LEE; FROELICH, 1986).

4.5 CORREÇÃO PARA CORRENTES SECUNDÁRIAS

Um modelo 2DH, como apresentado até este ponto, não é capaz de simular corretamente o escoamento em canais com curvatura significativa. Isso se deve à sua incapacidade de considerar os efeitos do escoamento secundário helicoidal, que é um fenômeno tridimensional que desaparece quando é feita a promediação na vertical. Quando as linhas de corrente, vistas em planta, são curvas e a distribuição de velocidades na vertical não é uniforme (uma distribuição logarítmica por exemplo), forças centrífugas variáveis ao longo da profundidade atuam sobre o escoamento. A aceleração centrífuga em uma partícula de fluido é dada por u_t^2/r , onde u_t é a velocidade na direção tangente à linha de corrente e r o raio de curvatura da mesma linha. Como u_t é, em geral, maior na superfície livre do que próximo ao fundo, a força centrífuga na superfície é também maior, criando o

escoamento helicoidal usualmente referido por corrente secundária. Essas correntes causam uma gradual migração das maiores velocidades para o lado externo das curvas. Se nenhuma correção for adicionada, modelos 2DH irão prever maiores velocidades junto à margem interna das curvas, ao invés de reproduzir sua migração para o lado externo.

O modelo RMA2 permite a introdução dos efeitos das correntes secundárias através de uma equação que governa a produção, o transporte e a dissipação da vorticidade no plano normal ao escoamento principal.

4.5.1 Formulação do Transporte da Vorticidade

O desenvolvimento da equação de transporte da vorticidade parte de argumentos qualitativos sobre a interação entre a curvatura do canal, a resistência de fundo e a distribuição de velocidades não uniforme na direção vertical. Esse desenvolvimento é apresentado em detalhes em BERNARD e SCHNEIDER (1992).

Quando o efeito das correntes secundárias é considerado no modelo, o seguinte termo é acrescido ao segundo membro das equações (4.27) e (4.28):

$$\vec{S} \approx \frac{1}{\rho} \frac{\vec{V}_{u+v}}{V_{u+v}} \left[\frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(h \tau_s)}{h} + \frac{2 \tau_s}{r} \right], \quad (4.29)$$

onde $\vec{n}$ é um vetor unitário normal a $\vec{V}_{u+v}$ e r é o raio de curvatura, relacionado à velocidade e suas derivadas por:

$$r = \frac{(V_{u+v})^3}{U V \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) + U^2 \frac{\partial V}{\partial x} - V^2 \frac{\partial U}{\partial y}} \quad (4.30)$$

O termo $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(h, \tau_s)$ é a derivada normal da tensão tangencial média τ_s criada pelo escoamento secundário:

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(h \tau_s) = \frac{V \frac{\partial(h \tau_s)}{\partial x} - U \frac{\partial(h \tau_s)}{\partial y}}{V_{u+v}}. \quad (4.31)$$

A tensão tangencial τ_s é dada por:

$$\tau_s = \rho h \omega V_{u+v} \sqrt{C_f}, \quad (4.32)$$

onde ω é a vorticidade no plano vertical normal à velocidade $\vec{V}_{u+v}$ e C_f é um coeficiente de resistência dependente do número de Manning:

$$C_f = \frac{g n^2}{h^{1/3}} \quad (4.33)$$

A equação de transporte da vorticidade é dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \underbrace{\frac{A_s \sqrt{C_f} V_{u+v}^2}{r h (1 + 9 \frac{h^2}{r^2})}}_{\text{produção}} - \underbrace{D_s \sqrt{C_f} \omega \frac{V_{u+v}}{h}}_{\text{dissipação}} + \underbrace{\frac{1}{h} \vec{\nabla} (\nu_t h \vec{\nabla} \omega)}_{\text{difusão}}, \quad (4.34)$$

onde A_s e D_s são coeficientes empíricos. BERNARD e SCHNEIDER (1992) realizaram uma série de experimentos em laboratório com canais curvos que indicaram que os coeficientes são praticamente invariáveis, sendo seus valores: $A_s = 5$ e $D_s = 0,5$. A validade foi verificada para casos onde $0 < h/r < 0,04$ e $0,002 < C_f < 0,01$.

No modelo RMA2 o cálculo da vorticidade é realizado separadamente do cálculo das velocidades e das profundidades. Após o cálculo de U , V e h convergir, o programa passa para as iterações de vorticidade mantendo constantes essas variáveis. Após a convergência do cálculo da vorticidade, correções são aplicadas em U , V e h e nova etapa de cálculo da vorticidade tem início. Esse processo é repetido até que o critério de convergência estabelecido para a vorticidade seja atingido.

5 MODELAGEM FÍSICA

5.1 INTRODUÇÃO

Das equações do movimento, apresentadas nos capítulos anteriores, são conhecidas soluções analíticas apenas para um limitado número de casos, em geral casos simplificados através da exclusão de termos considerados negligenciáveis.

No estudo do escoamentos em rios, o desconhecimento de soluções para as equações do movimento, aliado à complexidade das condições de contorno — a irregularidade da batimetria, por exemplo — indica a necessidade de se fazer o estudo através de modelos. Uma opção de modelagem é a reprodução do rio ou corpo d'água, denominado *protótipo*, através de um sistema em escala reduzida, geometricamente semelhante, chamado *modelo físico*.

Os conceitos de modelagem e similaridade introduzidos neste capítulo foram baseados em DAILY e HARLEMAN (1966) e HENDERSON (1966).

5.2 SIMILARIDADE GEOMÉTRICA

A *similaridade geométrica* implica em que a razão entre comprimentos correspondentes nos dois sistemas, protótipo e modelo, é constante. Isso pode ser expresso, no sistema cartesiano, assim:

$$\frac{x_m}{x_p} = \frac{y_m}{y_p} = \frac{z_m}{z_p} = L_r, \quad (5.1)$$

onde o índice m indica o valor no modelo, p o valor no protótipo e r a razão entre ambos. Portanto, L_r é a escala de comprimentos, que indica o tamanho relativo entre os dois sistemas.

5.3 SIMILARIDADE CINEMÁTICA

Para o modelo ser similar ao protótipo no sentido completo do termo, não é suficiente que os contornos sólidos sejam geometricamente semelhantes nos dois sistemas. É necessário, também, que as linhas de corrente sejam geometricamente similares em instantes correspondentes de tempo, condição que ocorre quando há *similaridade cinemática*. Nessa condição, as velocidades e as acelerações devem possuir a mesma relação entre modelo e protótipo em todos os pontos do sistema e direções e sentidos coincidentes.

5.4 SIMILARIDADE DINÂMICA

Na verdade, a similaridade cinemática existe se, e somente se, houver *similaridade dinâmica*, ou seja, as forças atuantes em cada partícula de fluido mantenham uma mesma relação modelo:protótipo, da mesma forma que as velocidades e acelerações.

As forças atuantes sobre uma partícula de fluido podem ser devidas a forças de massa, como o peso em um campo gravitacional, ou forças de superfície resultantes de tensão superficial (viscosidade), de gradientes de pressão, temperatura ou densidade. A força resultante, ou força de inércia, deve possuir a mesma relação modelo:protótipo assim como qualquer uma de suas componentes. Na verdade, é geralmente impossível obter similaridade dinâmica completa, como será visto adiante. Nesse caso deve-se priorizar a força mais significativa para que seja mantida constante a sua proporção modelo:protótipo, em detrimento da força (ou forças) menos importante, cuja proporção tornar-se-á variável.

Na discussão sobre similaridade dinâmica está implícita a existência de razões entre modelo e protótipo para as grandezas: força, comprimento, massa e tempo. A relação básica entre essas razões pode ser derivada da segunda lei de Newton:

$$F_r = \frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = M_r \frac{L_r}{T_r^2}. \quad (5.2)$$

Embora a equação (5.2) seja uma condição necessária para todos os sistemas dinamicamente semelhantes, não é uma condição suficiente pois não fornece informação, por exemplo, sobre os efeitos da viscosidade nos dois sistemas. Para isso é preciso recorrer às equações de Navier-Stokes, nas quais as forças de massa e as de superfície aparecem em termos separados.

5.4.1 Dedução das Relações de Similaridade Dinâmica a Partir das Equações de Navier-Stokes

Nessa dedução considera-se o escoamento incompressível de um fluido com viscosidade constante em um campo gravitacional. As condições de similaridade dinâmica de dois escoamentos podem ser obtidas escrevendo-se as equações de Navier-Stokes na forma adimensional. A equação de Navier-Stokes na direção z (2.12), coincidente com a direção de atuação da força da gravidade, é:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

As seguintes variáveis adimensionais podem ser definidas:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{x}{L}; & y_0 &= \frac{y}{L}; & z_0 &= \frac{z}{L}; & t_0 &= \frac{t}{L/V_0}; \\ u_0 &= \frac{u}{V_0}; & v_0 &= \frac{v}{V_0}; & w_0 &= \frac{w}{V_0}; & p_0 &= \frac{p}{\rho V_0^2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde L e V_0 são valores de referência constantes de comprimento e velocidade, a serem escolhidos como características do escoamento. Se as equações (5.3) forem substituídas em (2.12), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{V_0^2}{L} \frac{\partial w_0}{\partial t_0} + \frac{V_0^2}{L} u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + \frac{V_0^2}{L} v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y_0} + \frac{V_0^2}{L} w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z_0} \\ = -g - \frac{V_0^2}{L} \frac{\partial p_0}{\partial z_0} + \frac{\mu V_0}{\rho L^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z_0^2} \right). \end{aligned}$$

As substituições realizadas não alteraram as dimensões de cada termo, que são de uma aceleração ou de uma força por unidade de massa. A adimensionalização pode ser feita dividindo-se a equação pela expressão V_0^2/L , que tem a dimensão de força de inércia por unidade de massa, pois é o coeficiente dimensional dos termos de inércia no lado esquerdo da equação. Tem-se, então:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y_0} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z_0} = -\frac{g L}{V_0^2} - \frac{\partial p_0}{\partial z_0} + \frac{\mu}{\rho V_0 L} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z_0^2} \right). \quad (5.4)$$

Como todas as quantias com índice zero são adimensionais, percebe-se que os dois grupos de coeficientes que surgiram no lado direito da equação são também adimensionais.

O primeiro grupo adimensional da equação (5.4) foi formado dividindo-se a força da gravidade por unidade de massa pela força de inércia por unidade de massa:

$$\frac{\text{força da gravidade} / \text{massa}}{\text{força de inércia} / \text{massa}} = \frac{g}{V_0^2/L} = \frac{g L}{V_0^2}. \quad (5.5)$$

A raiz do inverso desse grupo é o *número de Froude* Fr :

$$Fr = \frac{V_0}{\sqrt{g L}}. \quad (5.6)$$

O segundo grupo adimensional da equação (5.4) foi formado dividindo-se a força viscosa por unidade de massa pela força de inércia por unidade de massa:

$$\frac{\text{força viscosa} / \text{massa}}{\text{força de inércia} / \text{massa}} = \frac{\mu V_0/(\rho L_0^2)}{V_0^2/L} = \frac{\mu}{\rho V_0 L}. \quad (5.7)$$

O inverso desse grupo é o *número de Reynolds* Re :

$$Re = \frac{\rho V_0 L}{\mu}. \quad (5.8)$$

O número de Froude é um fator importante sempre que a gravidade influencia o movimento do fluido, enquanto o número de Reynolds é relevante sempre que as forças viscosas influenciam o escoamento. A equação adimensional de Navier-Stokes na direção z resulta, finalmente:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y_0} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z_0} = -\frac{1}{Fr^2} - \frac{\partial p_0}{\partial z_0} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z_0^2} \right). \quad (5.9)$$

Existindo uma componente de gravidade nas outras duas direções cartesianas, os mesmos dois grupos adimensionais seriam obtidos. A adimensionalização da equação da continuidade não introduz nenhuma condição de similaridade adicional.

A equação (5.9) tem a mesma solução, ou seja, resulta nas mesmas linhas de corrente, para dois sistemas geometricamente semelhantes se ambos apresentarem os mesmos valores para o número de Froude e para o de Reynolds. Em alguns casos particulares, um dos parâmetros adimensionais é negligenciável ou, até mesmo, não apresenta qualquer influência sobre o escoamento.

Em um sistema com superfície livre, tanto a igualdade de números de Reynolds quanto a igualdade de números de Froude são necessárias para haver similaridade exata.

Especificando-se a igualdade entre números de Froude, obtém-se a seguinte escala de velocidades V_r :

$$\frac{V_m}{g_m L_m} = \frac{V_p}{g_p L_p} \quad \therefore \quad V_r = \sqrt{g_r L_r}.$$

A igualdade entre números de Reynolds resulta em outra expressão para V_r :

$$V_r = \frac{\mu_r}{\rho_r L_r}.$$

Como as escalas de velocidade devem ser iguais e considerando a escala de aceleração da gravidade $g_r = 1$, resulta a seguinte relação entre a escala geométrica e a escala de

viscosidade:

$$L_r = \left(\frac{\mu_r}{\rho_r} \right)^{(2/3)} = \nu^{(2/3)}. \quad (5.10)$$

Portanto, uma vez definida a escala geométrica do modelo, para similaridade exata seria preciso obter um fluido cuja viscosidade cinemática atendesse à equação (5.10). Como a diferença de viscosidade cinemática entre os líquidos é bastante limitada, apenas escalas geométricas próximas da unidade poderiam ser adotadas.

Na prática, utiliza-se no modelo o mesmo líquido do protótipo — geralmente água — e aplica-se apenas o critério de similaridade de Froude, tolerando-se números de Reynolds diferentes¹. Essa escolha é feita porque os efeitos da força da gravidade num escoamento com superfície livre são, em geral, muito mais importantes do que os efeitos das forças viscosas. A influência perturbadora das forças viscosas, nesse caso, é comumente denominada *efeito de escala*². Quando necessário, correções para os efeitos de escala podem ser feitas construindo-se modelos de diferentes escalas e extrapolando-se os resultados para o protótipo.

Do critério de Froude as seguintes escalas de proporcionalidade entre modelo e protótipo podem ser deduzidas, considerando $g_r = 1$ e $\rho_r = 1$:

$$\begin{array}{ll} \text{massa: } M_r = L_r^3; & \text{velocidade: } V_r = \sqrt{L_r}; \\ \text{tempo: } T_r = L_r V_r^{-1} = \sqrt{L_r}; & \text{vazão: } Q_r = V_r L_r^2 = \sqrt[5]{L_r}; \\ \text{força: } F_r = M_r L_r T_r^{-2} = L_r^3; & \text{pressão: } p_r = F_r L_r^{-2} = L_r. \end{array}$$

Um cuidado importante ao adotar exclusivamente o critério de semelhança de Froude é garantir que os efeitos viscosos não se tornem grandes no modelo. Isso impõe um limite mínimo para o tamanho do modelo; por exemplo, o escoamento no modelo não pode resultar laminar se o escoamento no protótipo for turbulento.

¹Utilizando-se o mesmo fluido, a relação entre o número de Reynolds no modelo e no protótipo resulta: $\frac{Re_m}{Re_p} = L_r^{3/2}$.

²O efeito de escala engloba, ainda, outros efeitos como compressibilidade, tensão superficial e correntes secundárias.

6 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Entre os programas computacionais que podem ser aplicados ao escoamento de rio estudado neste trabalho, são apresentados na tabela 6.1 alguns dos mais conhecidos.

TABELA 6.1 – COMPARAÇÃO ENTRE ALGUNS MODELOS COMPUTACIONAIS EXISTENTES

Modelo	Origem	Sistema operacional	Discretização espacial	Modelo de turbulência	Simulação de escoamento supercrítico	Endereço na Internet	Disponibilidade	Preço
RMA2	EUA	MS-DOS / Windows	Elementos finitos	Equação algébrica para μ_t	Não	www.bossintl.com	⁽¹⁾ Gratuito / comercial	US\$ 2.700,00
Mike21	Dinamarca	MS-Windows	Diferenças finitas	Smagorinsky	Sim	www.dhisoftware.com	Comercial	Valor não disponível
Flo2DH	EUA	MS-DOS / WINDOWS	Elementos finitos	Smagorinsky modificado	Sim	www.fhwa.dot.gov	Gratuito	-
Delft3D	Holanda	Windows, Linux, Unix	Diferenças finitas	Equação algébrica para μ_t	Sim	www.wldelft.nl	Comercial	⁽²⁾ Euro 45.000,00
Mohid	Portugal	MS-Windows	Diferenças finitas	Smagorinsky	Não	www.mohid.com	Gratuito	-
River2D	Canadá	MS-Windows	Elementos finitos	Equação algébrica para μ_t	Sim	www.river2d.ualberta.ca	Gratuito	-
SisBAHIA	Brasil	MS-Windows	Elementos finitos	Filtragem baseada em LES ⁽³⁾	Sim	www.sisbahia.coppe.ufrj.br	Gratuito	-

Observações:

- (1) O programa é disponibilizado nos EUA pelo US Army Corps of Engineers. No Brasil ele pode ser adquirido como modelo integrante do pacote comercial BOSS-SMS.
- (2) Para fins de ensino e pesquisa há 75% de desconto sobre o preço do modelo Delft3D.
- (3) LES (*large eddy simulation*): simulação de grandes vórtices.
- (4) Todos os modelos podem simular escoamento permanente e transiente.

A parte de modelagem computacional deste trabalho foi desenvolvida com o programa RMA2-versão 4.3. O programa foi adotado por indicação do Professor Dr. Roberto Mayerle da Universidade Christian Albrechts (Kiel, Alemanha).

Neste capítulo serão introduzidas algumas noções básicas da dinâmica dos fluidos computacional, com ênfase dada ao método dos elementos finitos, que é utilizado pelo RMA2. Os conceitos são apresentados seguindo, em linhas gerais, a seqüência de etapas do esquema numérico do modelo RMA2.

Originalmente, o RMA2 foi desenvolvido por Norton, King e Orlob (1973), do *Water Resources Engineers*, para o *Walla Walla District, U.S. Corps of Engineers*, e lançado em 1973. Desenvolvimentos adicionais foram conduzidos por King e Roig na Uni-

versidade da Califórnia. Implementações posteriores foram feitas por King e Norton, do *Resource Management Associates (RMA)*, e pelo *Waterways Experiment Station (WES) Hydraulics Laboratory*, culminando na versão atual do código fonte (KING, 1997).

As equações diferenciais governantes do modelo RMA2 são as equações do movimento integradas na profundidade, equações (4.27) e (4.28), apresentadas no Capítulo 4. A versão 4.3 do modelo, usada neste trabalho, possui as seguintes capacidades (KING, 1996):

- a) identificar erros na malha;
- b) utilizar tanto unidades inglesas quanto do Sistema Internacional;
- c) utilizar como condição inicial o resultado de outra simulação (*hotstart*);
- d) simular a secagem e submersão de elementos;
- e) considerar os efeitos da rotação da Terra (Coriolis);
- f) aplicar tensões devidas ao vento na superfície;
- g) utilizar coeficientes de rugosidade variáveis com a profundidade;
- h) utilizar coeficientes de turbulência em função do número de Reynolds da malha;
- i) modelar até cinco tipos diferentes de estruturas de controle;
- j) calcular a vazão através de seções determinadas;
- k) controlar parâmetros diversos relativos a iterações e passos de tempo;
- l) aceitar uma grande variedade de condições de contorno:
 - 1.1) velocidade (módulo e ângulo) por nó;
 - 1.2) nível de água por nó ou linha;
 - 1.3) vazão por nó, elemento ou linha;
 - 1.4) maré por linha;
 - 1.5) vazão por linha em função do nível de água;
 - 1.6) velocidade (módulo e ângulo) do vento por nó, elemento ou tipo de material.

O RMA2 é um modelo para o cálculo de escoamentos com superfície livre subcríticos. Ele assume distribuição hidrostática de pressões, ou seja, as acelerações na direção vertical são negligenciáveis. É um modelo bidimensional em planta, não sendo aplicável para problemas de pequena escala (*near field*) onde vórtices, vibrações ou acelerações verticais são de interesse primário. Efeitos de escoamentos estratificados na direção vertical estão além das capacidades do RMA2 (KING, 1997).

6.1 INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A dinâmica dos fluidos computacional (DFC¹) é a área da computação científica que estuda métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento. O objetivo básico da DFC é reduzir o número de experimentos em laboratório e campo e explorar fenômenos que não poderiam ser estudados em laboratório de forma prática ou através de análises teóricas. A DFC permite a alteração, com facilidade, de parâmetros como geometria, velocidade e coeficientes físicos de calibragem.

As técnicas computacionais estão muito mais próximas das técnicas experimentais do que das teóricas. Atualmente, é comum o uso do termo *experimentos numéricos* em referência às simulações de um mesmo fenômeno realizadas com diferentes parâmetros. A facilidade de alteração dos dados de entrada resulta em consideráveis ganhos de tempo e custo em relação às técnicas experimentais convencionais (modelos físicos). Frequentemente utiliza-se a DFC associada a técnicas experimentais e análises teóricas (FORTUNA, 2000).

Para se estudar um fenômeno computacionalmente, é necessário expressar de forma adequada as equações e a região (domínio) em que elas são válidas. As equações de interesse neste trabalho são as da conservação da massa e da quantidade de movimento, apresentadas nos Capítulos 2 e 3. Como tais equações não possuem soluções analíticas

¹Em inglês CFD: *Computational Fluid Dynamics*

na maior parte dos casos de interesse da engenharia, as soluções são obtidas através de técnicas numéricas.

O primeiro passo na solução de uma equação diferencial é convertê-la em uma equação integral. Para esse fim, existem três possíveis abordagens utilizando elementos finitos:

- a) direta;
- b) variacional;
- c) resíduos ponderados.

Os resíduos ponderados são métodos gerais que podem ser aplicados em casos onde as outras duas abordagens não são possíveis (CHAUDHRY, 1993).

As etapas principais do esquema numérico adotado no modelo RMA2 podem ser assim resumidas (KING, 1993):

- a) definição dos elementos utilizando aproximações isoparamétricas;
- b) aplicação do Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin para a discretização espacial por elementos finitos;
- c) aplicação do método de Newton-Raphson para estruturar as equações e efetuar as iterações para o sistema não-linear;
- d) aplicação de um esquema modificado de Crank-Nicholson de discretização no tempo para escoamentos não-permanentes. Solução direta para escoamentos permanentes;
- e) solução das integrais resultantes através da quadratura de Gauss.

LEE e FROEHLICH (1986) apresentam uma revisão abrangente da literatura sobre a solução das equações de águas rasas através do método dos elementos finitos.

6.2 DEFINIÇÃO DOS ELEMENTOS

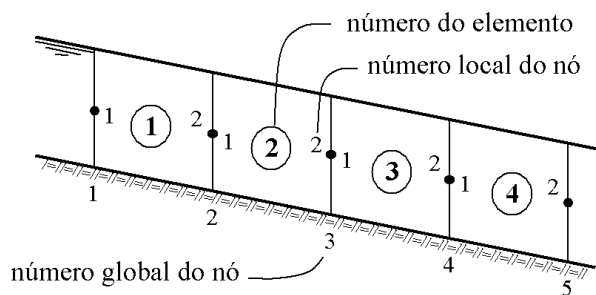
Como não se pode obter soluções numéricas sobre uma região contínua, devido aos infinitos pontos da mesma, inicialmente o domínio é *discretizado*, isto é, dividido em um

número finito de elementos cujos contornos são definidos através de pontos de coordenadas conhecidas, chamados nós. Os elementos finitos podem ser uni, bi ou tridimensionais. O modelo RMA2 pode utilizar apenas os dois primeiros tipos.

6.2.1 Elementos Unidimensionais Lineares

Em problemas unidimensionais, cada elemento pode ser composto por dois ou mais pontos. Na figura 6.1, por exemplo, o canal com escoamento unidimensional foi dividido em quatro elementos de dois nós.

FIGURA 6.1 – SUBDIVISÃO DO DOMÍNIO EM ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS



FONTE: CHAUDHRY, 1993

Os números dos elementos estão indicados no interior de um círculo. Estão indicadas a numeração *global* dos nós, que não pode apresentar repetição, e a numeração *local* dos nós em cada elemento. No elemento 3, por exemplo, os nós globais 3 e 4 correspondem aos nós locais 1 e 2.

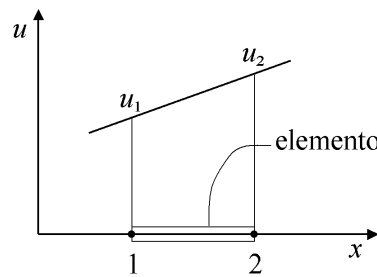
Para cada elemento, todas as variáveis no interior do elemento são interpoladas como uma combinação linear de seus valores em cada nó, como indicado na figura 6.2. Se a variável de interesse for u , então u pode ser calculado em cada ponto x do elemento

através de:

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(u_2 - u_1) \\
 u &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}u_2 \\
 u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 \\
 u &= \sum_{i=1}^2 N_i u_i, \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

em que N_1 e N_2 são chamadas funções de base, de interpolação ou de tentativa. Os índices indicam os nós locais 1 e 2 de um elemento genérico.

FIGURA 6.2 – ELEMENTO UNIDIMENSIONAL LINEAR



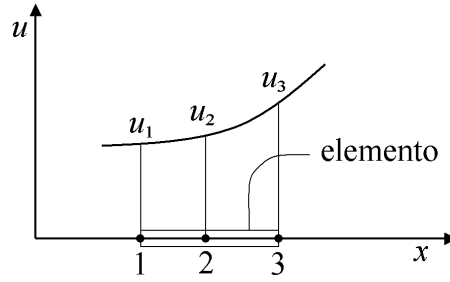
FONTE: CHAUDHRY, 1993

Nitidamente, as funções de base não podem ser escolhidas arbitrariamente; elas devem ser capazes de aproximar a distribuição real da variável dependente da melhor forma possível e devem ser linearmente independentes. Adicionalmente, no contorno do elemento, a variável dependente deve ser contínua assim como suas derivadas até uma ordem abaixo da ordem da equação diferencial sendo resolvida. Essa característica é chamada *requisito de compatibilidade*. Elementos cujas funções de base satisfazem a esse requisito são ditos *elementos conformes* ou *compatíveis*. Outra condição a ser atendida é que a variável dependente e suas derivadas tendam a um valor constante no elemento à medida que a área deste tende a zero. Tal condição é conhecida por *requisito de completude* (LEE; FROELICH, 1986).

6.2.2 Elementos Unidimensionais Quadráticos

Funções de base podem também ser de segunda ou maior ordem. Para segunda ordem (funções quadráticas) são necessários três nós por elemento, como na figura 6.3.

FIGURA 6.3 – ELEMENTO UNIDIMENSIONAL QUADRÁTICO



FONTE: CHAUDHRY, 1993

O valor de u no interior deste elemento é dado por:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = \sum_{i=1}^3 N_i u_i, \quad (6.2)$$

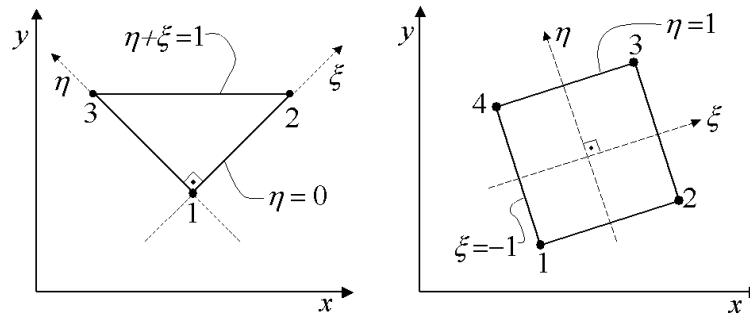
onde as funções de base são:

$$\begin{aligned} N_1 &= \left[1 - \frac{2(x - x_1)}{x_3 - x_1} \right] \left(1 - \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \right); \\ N_2 &= \frac{4(x - x_1)}{x_3 - x_1} \left(1 - \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \right); \\ N_3 &= \left[1 - \frac{2(x - x_1)}{x_3 - x_1} \right] \left(-\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \right). \end{aligned}$$

6.2.3 Elementos Bidimensionais Lineares

A figura 6.4 apresenta elementos bidimensionais triangulares e quadrangulares e a numeração local dos nós para funções de base lineares. É conveniente definir um sistema local, ou natural, de coordenadas (ξ, η) para cada elemento, variando de 0 a 1 (elemento triangular) ou de -1 a +1 (elemento quadrangular), como indicado na figura 6.4. As funções de base são definidas nesse sistema natural de coordenadas, no caso de

FIGURA 6.4 – ELEMENTOS BIDIMENSIONAIS LINEARES



FONTE: CHAUDHRY, 1993

elementos quadrangulares, por:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); & N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta); & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned}$$

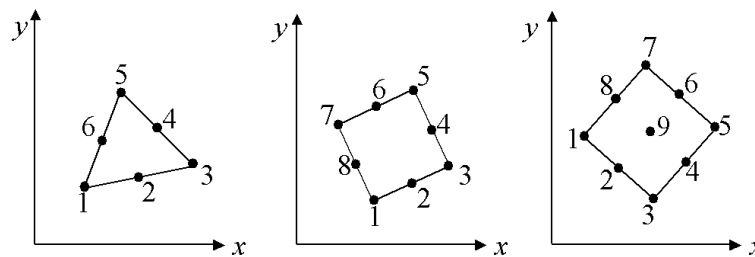
e, no caso de elementos triangulares, por:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta; \quad N_2 = \xi; \quad N_3 = \eta.$$

6.2.4 Elementos Bidimensionais Quadráticos

Funções de base de maior ordem são preferíveis quando as grandezas variam rapidamente. É possível utilizar funções lineares se os elementos forem suficientemente pequenos. Todavia, é mais eficiente utilizar elementos de maior ordem (CHAUDHRY, 1993). A figura 6.5 apresenta os elementos bidimensionais quadráticos mais comuns.

FIGURA 6.5 – ELEMENTOS BIDIMENSIONAIS QUADRÁTICOS



FONTE: CHAUDHRY, 1993

As funções de base quadráticas são, para o elemento quadrangular de oito nós da figura 6.5:

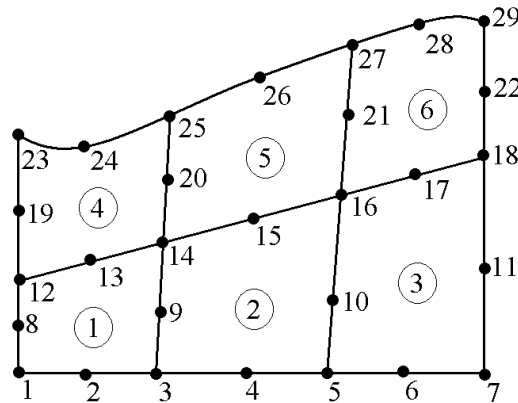
$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta); & N_2 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta); \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta); & N_4 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2); \\
 N_5 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta); & N_6 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta); \\
 N_7 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta); & N_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2),
 \end{aligned}$$

e para o elemento triangular de 6 nós:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta); & N_2 &= 4\xi(1 - \xi - \eta); \\
 N_3 &= \xi(2\xi - 1); & N_4 &= 4\xi\eta; \\
 N_5 &= \eta(2\eta - 1); & N_6 &= 4\eta(1 - \xi - \eta).
 \end{aligned}$$

LEE e FROEHLICH (1986) citam os trabalhos de diversos pesquisadores nos quais a utilização de funções de base de mesma ordem para a velocidade e para a pressão — ou nível de água na aproximação de águas rasas — fornece resultados com oscilações de pequeno comprimento de onda na pressão. Uma solução largamente aplicada para resolver esse problema é a interpolação de ordem mista, ou seja, interpolação da velocidade com funções de base quadráticas (oito ou nove nós no elemento quadrangular) e da pressão com funções de base lineares (quatro nós no elemento quadrangular). Alguns autores defendem o uso do elemento de nove nós para obter melhores resultados de pressão (CHAUDHRY, 1993). O RMA2 faz uso da interpolação mista com elementos quadráticos de oito nós, como na malha exemplo da figura 6.6.

FIGURA 6.6 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS BIDIMENSIONAIS QUADRÁTICOS



FONTE: CHAUDHRY (1993)

6.2.5 Transformação de Coordenadas

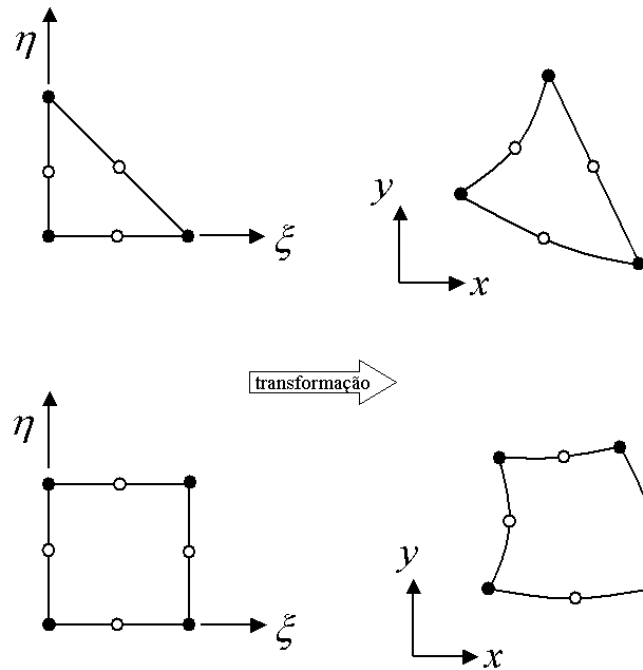
Freqüentemente, é desejável modelar geometrias complexas utilizando elementos com lados curvos. Em alguns modelos, incluindo versões anteriores do RMA2, é preciso definir margens do corpo de água suaves (sem ângulos), através de elementos curvos, para garantir vetores velocidade sempre tangentes ao contorno e evitar problemas de continuidade (vazamentos). O RMA2 gera automaticamente as coordenadas dos nós do meio nos pontos médios entre os nós de vértice. Lados curvos podem ser definidos através da atribuição de coordenadas (x, y) para os nós do meio, fora do ponto médio.

Os elementos finitos, curvos ou retilíneos, são definidos através da transformação de um elemento *mestre* simples, definido num sistema de coordenadas local (ξ, η) , para o elemento curvo desejado, definido no sistema cartesiano global (x, y) . Transformações do sistema local, usado na definição das funções de base N_i , para o sistema global de coordenadas são ilustradas na figura 6.7.

A transformação é realizada expressando-se as coordenadas globais (x, y) em termos das coordenadas naturais (ξ, η) , usando funções de forma² de modo semelhante ao que a variável u é interpolada no elemento através das funções de base. Assim, as coordenadas

²As funções de forma são também funções de interpolação. Neste texto, o termo *funções de forma* será utilizado para referência às funções F_i de interpolação das coordenadas e o termo *funções de base* será utilizado para referência às funções N_i de interpolação das variáveis, como velocidade e pressão.

FIGURA 6.7 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS EM UM ELEMENTO TRIANGULAR E EM UM QUADRANGULAR



FONTE: FROEHLICH (2002)

globais (x, y) são dadas por:

$$x = \sum_{i=1}^n F_i x_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{i=1}^n F_i y_i, \quad (6.3)$$

onde F_i são as funções de interpolação de coordenadas (funções de forma), definidas em termos das coordenadas naturais (ξ, η) , n é o número de nós do elemento e x_i e y_i são os valores das coordenadas globais dos nós. As funções F_i são geralmente polinômios quadráticos nos casos de quadriláteros de oito e nove nós.

Se as funções de forma F_i são da mesma ordem das funções de base N_i , o elemento é dito *isoparamétrico*. Quando são utilizados polinômios de menor ordem para as funções de forma F_i do que a ordem das funções N_i , o elemento é dito *subparamétrico*; em caso contrário o elemento é dito *superparamétrico* (LEE; FROEHLICH, 1986).

6.3 MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS DE GALERKIN

O Método dos Resíduos Ponderados (MRP) pode ser subdividido em três tipos (CHAUDHRY, 1993):

- a) Galerkin;
- b) colocação;
- c) mínimos quadrados.

O método de Galerkin é o mais comumente utilizado, sendo também o método usado no RMA2.

O MRP é uma técnica de obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais parciais, como as equações do movimento dos fluidos. A aplicação do MRP envolve duas etapas básicas:

- a) assumir um comportamento funcional geral da variável dependente de modo que a equação diferencial governante e as condições de contorno possam ser *aproximadamente* satisfeitas. A substituição dos valores aproximados da variável dependente na equação diferencial normalmente resulta em um erro chamado *resíduo*. Uma solução é obtida forçando o erro médio ao longo de todo o domínio a desaparecer;
- b) resolver a equação residual para obter os parâmetros da representação funcional da variável dependente. Como será mostrado, tais parâmetros são os próprios valores da variável dependente nos nós dos elementos, ou seja, a solução buscada.

A forma geral das equações diferenciais em que se aplica o MRP é:

$$\mathcal{L} u - f = 0, \quad (6.4)$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador diferencial, u a variável dependente e f uma função conhecida. Assume-se para a variável u a sua representação funcional $\tilde{u}$, citada no item (a) do parágrafo anterior. Essa representação funcional é, na verdade, a combinação linear do

valor das variáveis nos nós, como na equação (6.1). Pode-se escrever, então:

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{i=1}^n N_i u_i, \quad (6.5)$$

em que N_i são as funções de base apresentadas na seção 6.2, u_i o valor das variáveis nos nós e n o número de nós do elemento. Quando $\tilde{u}$ é substituído na equação (6.4), é improvável que a equação seja satisfeita exatamente, resultando portanto um erro residual ε :

$$\mathcal{L} \tilde{u} - f = \varepsilon. \quad (6.6)$$

O MRP é utilizado para determinar os n parâmetros desconhecidos u_i da representação funcional, em cada elemento, de modo que o erro ε seja tão pequeno quanto possível na região da solução. Uma maneira de reduzir ε é formar uma média ponderada do erro e fazê-la igual a zero quando considerada em todo o domínio do problema. A média ponderada é dada por:

$$\int_R W_i \varepsilon dR = \int_R W_i (\mathcal{L} \tilde{u} - f) dR = 0, \quad (6.7)$$

onde R é o domínio do problema e W_i são funções de ponderação linearmente independentes.

Há alguma flexibilidade na escolha das funções de ponderação dos resíduos. Elas devem possuir a propriedade de abranger o espaço da solução, ou seja, todo ponto do domínio das soluções deve ser atingível através da combinação linear das funções escolhidas. Adicionalmente, elas devem ser mutuamente ortogonais (perpendiculares e independentes). A equação (6.7) é a forma matemática de expressar a ortogonalidade entre o espaço coberto pelas funções de ponderação W_i e o erro ε . Como as funções de ponderação W_i abrangem todo o espaço da solução, a única função ortogonal a esse espaço é zero, ou seja, $\varepsilon = 0$.

Os métodos de resíduos ponderados diferem entre si pelas funções de ponderação escolhidas. O método de Galerkin utiliza para as funções de ponderação W_i as mesmas funções de base N_i , ou seja:

$$\int_R N_i (\mathcal{L} \tilde{u} - f) dR = 0; \quad \text{para } i=1, 2, 3 \dots m, \quad (6.8)$$

onde m é o número total de nós no domínio R (FROEHLICH, 2002).

6.3.1 Formulação Fraca

Freqüentemente encontra-se nos textos de elementos finitos a expressão *formulação fraca*. O método de Galerkin é uma formulação fraca. Segundo OLSEN (1999), isso significa que na formulação do sistema de equações não existe a restrição de que a derivada da incógnita exista no contorno dos elementos, diferentemente das equações diferenciais originais.

BECKER *et al* (1981) afirmam em seu texto: “... as formulações fracas ou variacionais são projetadas para acomodar dados e soluções irregulares assim como soluções suaves³. Sempre que uma solução suave ‘clássica’ para um problema existe, ela é também a solução da formulação fraca. Então, não perdemos nada por reformular um problema numa forma fraca e ganhamos a significativa vantagem de poder considerar problemas com soluções muito irregulares. Exemplos de problemas para os quais soluções exatas não podem ser encontradas explicitamente (mesmo sabendo-se que elas existem) são comumente encontradas em problemas de valor de contorno em duas ou três dimensões. É na solução de tais problemas que o verdadeiro poder do método dos elementos finitos fez-se sentir.”

A principal consequência da formulação fraca é que a continuidade de massa não é automaticamente satisfeita (OLSEN, 1999). Embora a continuidade global seja

³Funções infinitamente diferenciáveis.

mantida (a vazão de entrada no domínio iguala-se à vazão de saída), as vazões calculadas em seções internas do domínio podem desviar-se dos valores de entrada e saída. GEE e MacARTHUR (1978) apresentam uma avaliação dos erros de continuidade em função do refinamento da malha de elementos finitos. Para uma malha de 131 elementos em uma região de cerca de 10x10 km² os autores verificaram erros de até 21% da vazão em seções internas do modelo, valor que cai para 4% com uma malha de 189 elementos. O trabalho salienta a relevância da questão dos erros de continuidade em um modelo de qualidade da água, preocupação citada também por outros pesquisadores. Em geral, a questão da continuidade é de menor importância em um estudo hidrodinâmico, onde as pressões e velocidades são as variáveis de maior interesse. GEE e MacARTHUR (1978) apontam, também, que as velocidades são mais afetadas pelos erros de continuidade do que as pressões.

KING (1978) argumenta que esse problema aparente do método dos elementos finitos pode ser utilizado como uma vantagem, aproveitando-se a verificação da continuidade como uma medida da precisão da solução em várias regiões do modelo e da possível necessidade de refinamento da malha.

6.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS

6.4.1 Classificação dos Métodos para Solução de Sistemas Não-Lineares

A solução de um sistema de equações lineares na forma genérica

$$K U = f, \quad (6.9)$$

onde K é a matriz de coeficientes globais, U é o vetor coluna das incógnitas nos nós e f é um vetor coluna com funções conhecidas, pode ser obtida sem dificuldades através de diversos métodos. A solução torna-se mais difícil para um sistema não linear, em que

a matriz dos coeficientes é dependente do estado do sistema, ou seja, $K = K(U)$. A solução numérica de sistemas não-lineares representa a maior parte do ônus em se obter uma solução para um campo de escoamento (LEE; FROEHLICH, 1986).

Todos os esquemas de elementos finitos utilizados para a solução de sistemas não-lineares de escoamentos permanentes ou transientes são iterativos, de alguma forma, e podem ser classificados em:

- a) métodos de linearização;
- b) métodos de iteração não-linear;
- c) métodos de continuação;
- d) métodos de relaxação dinâmica;
- e) métodos de perturbação.

O modelo RMA2 utiliza um método de linearização (Newton-Raphson). A idéia básica de todos os *métodos de linearização* consiste em construir uma aproximação linear do sistema não-linear e resolver repetidamente — cada repetição é chamada *iteração* — o sistema linear até que seja obtida convergência. Após cada iteração, ou após intervalos determinados de iterações, a matriz de coeficientes K é atualizada utilizando-se as aproximações mais recentes para as variáveis nos nós.

6.4.2 Método Iterativo de Newton-Raphson

Um dos métodos de linearização mais freqüentemente usados é o *método de Newton-Raphson*⁴. Em termos gerais, ele busca eliminar o resíduo da substituição da solução aproximada nas equações governantes. A solução é obtida computando-se as inclinações das funções resíduo em relação a cada uma das variáveis dependentes e através delas calculando-se correções simultâneas para todas as variáveis, assumindo que as funções resíduo são localmente lineares.

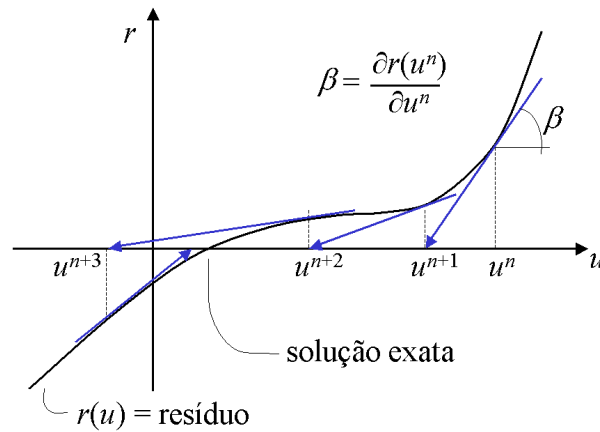
⁴Na literatura este método é comumente referido simplesmente por *método de Newton*. CHAUDRHY (1993) comenta que a denominação *Newton-Raphson* é empregada para a solução de um *sistema* de equações, e o método de Newton, para *uma* só equação.

Seja $r_i(u_{j_n})$ o valor do resíduo para a equação i calculado com os valores estimados u_j da iteração n . Se a solução fosse exata, o resíduo r_i seria nulo para todas as equações. O método de Newton-Raphson calcula uma série de correções Δu_j tais que:

$$\sum_{j=1} \left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right)_{u_n} \Delta u_j = -r_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.10)$$

A equação (6.10) representa N equações simultâneas com N incógnitas. O termo $\left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right)_{u_n}$ é o valor da derivada calculado com as estimativas u_j da iteração n . A matriz quadrada formada por esses termos é o Jacobiano $[J_n]$ na iteração n . Graficamente o método pode ser representado como na figura 6.8.

FIGURA 6.8 – MÉTODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON



Para problemas lineares, $\left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right)_{u_n}$ seria uma constante independente de u_j e o ajuste calculado por este processo conduziria à solução exata em uma iteração, partindo de qualquer valor u_j estimado. Para problemas não-lineares, o método reduz o erro a cada iteração. A redução do erro não é garantida mas a experiência mostra que, se a estimativa inicial for suficientemente próxima da solução exata, a redução do erro ocorre e então o método converge (KING,1993).

Nos casos em que o método de Newton diverge ou oscila em torno da solução, a técnica da relaxação pode ser eficaz e até mesmo aumentar a velocidade de convergência. Na *relaxação*, a correção entre iterações é aumentada ou diminuída por um fator $\omega_n > 0$

da seguinte forma (LEE; FROELICH, 1986):

$$U_{n+1} = U_n + \omega_n \Delta U. \quad (6.11)$$

Os coeficientes de relaxação encontram-se geralmente entre 0 e 1. A relaxação geralmente resulta em menor velocidade de convergência mas reduz as instabilidades do método iterativo. Se a solução divergir ou permanecer oscilando, uma medida usual é diminuir os coeficientes de relaxação (OLSEN, 1999). CHAUDHRY (1993) cita que a experiência com as equações de Navier-Stokes aponta que o coeficiente de relaxação ω deve ser inferior a 0,5.

O programa RMA2 não oferece o recurso da técnica de relaxação.

6.5 INTEGRAÇÃO POR QUADRATURA DE GAUSS

Todas as equações obtidas no método dos elementos finitos precisam ser, finalmente, integradas. Na maioria dos casos, especialmente aqueles envolvendo transformações isoparamétricas, a solução analítica das integrais que surgem na formulação de elementos finitos das equações de escoamento bidimensional é difícil ou impossível (LEE; FROELICH, 1986).

No modelo RMA2 a integração é realizada numericamente através da *quadratura de Gauss*. Nessa técnica, a função sendo integrada é calculada em pontos específicos no interior do elemento e multiplicada por um fator de ponderação e então é realizada a somatória entre todos os pontos do elemento.

Para um elemento unidimensional, cuja coordenada local ξ varia de -1 a +1, a quadratura de Gauss utilizando três pontos avalia a função nos pontos de coordenadas $\xi = -0,774597$, $\xi = 0$ e $\xi = +0,774597$ e multiplica pelos seguintes fatores de ponderação, respectivamente: $w = 5/9$, $w = 8/9$ e $w = 5/9$, cuja soma resulta igual ao comprimento do elemento em coordenada local. Pontos adicionais podem ser utilizados se for necessária

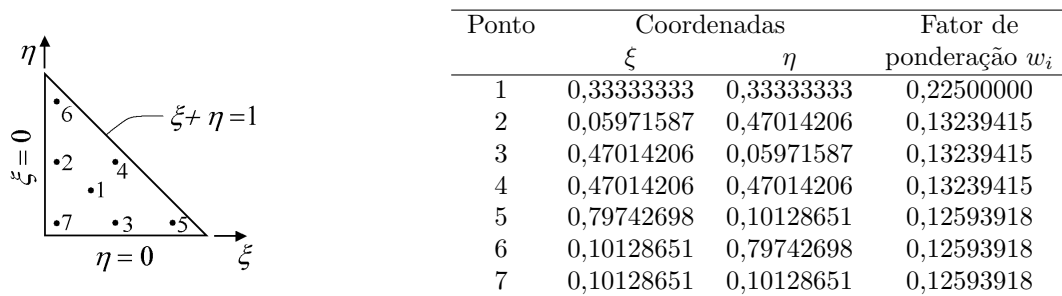
maior precisão. Para a solução das equações de Navier-Stokes, a quadratura com três pontos é suficiente (CHAUDHRY, 1993).

Quando a quadratura de três pontos é utilizada em um elemento bidimensional quadrangular, a função é avaliada em nove pontos e o valor da função em cada ponto é multiplicado pelo produto de dois fatores de ponderação, um de cada direção. A integração pode ser assim expressa:

$$\int_{A_e} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx A_e \sum_{i=1}^k w_i f(\xi_i, \eta_i), \quad (6.12)$$

onde A_e = área do elemento, f = função integrada, k = número de pontos da integração numérica, w_i = fator de ponderação do ponto de integração i e (ξ_i, η_i) = coordenadas naturais do ponto i . As figuras 6.9 e 6.10 apresentam as coordenadas locais e os correspondentes fatores de ponderação dos pontos de integração Gaussiana de três pontos para elementos triangulares e retangulares.

FIGURA 6.9 – QUADRATURA DE GAUSS COM SETE PONTOS PARA ELEMENTO TRIANGULAR

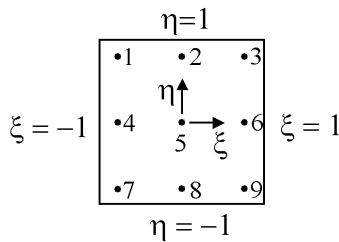


FONTE: FROEHLICH, (2002)

Um esquema de integração numérica necessita ser suficientemente preciso para assegurar a convergência da solução por elementos finitos. STRANG e FIX⁵ sugerem que a convergência ocorrerá se o método de integração numérica for preciso o suficiente para computar exatamente a área do elemento (FROEHLICH, 2002).

⁵STRANG, G.; FIX, G. J. **An analysis of the finite element method**. Englewoodcliffs, N. J., Prentice-Hall. 306 p. 1973.

FIGURA 6.10 – QUADRATURA DE GAUSS COM NOVE PONTOS PARA ELEMENTO QUADRANGULAR



Ponto	Coordenadas		Fator de ponderação w_i
	ξ	η	
1	-0,77459667	0,77459667	0,07716049
2	0	0,77459667	0,12345679
3	0,77459667	0,77459667	0,07716049
4	-0,77459667	0	0,12345679
5	0	0	0,19753086
6	0,77459667	0	0,12345679
7	-0,77459667	-0,77459667	0,07716049
8	0	-0,77459667	0,12345679
9	0,77459667	-0,77459667	0,07716049

FONTE: FROEHLICH, (2002)

O número e a posição dos pontos de integração determina a ordem do polinômio que pode ser integrado com exatidão. Por exemplo, a integração de nove pontos do elemento quadrangular permite a integração exata de um polinômio de quinta ordem em x e y . O RMA2 utiliza como padrão para elementos de lados retos a precisão de quinta ordem. Para elementos com lados curvos a grau de precisão é aumentado para sétima ordem para acomodar os termos extras que aparecem durante a transformação para elementos com lados retos (KING, 1993).

6.6 ESQUEMA DE SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Na aplicação do método dos elementos finitos, a matriz quadrada de coeficientes K do sistema de equações $KU = f$ é geralmente esparsa⁶, dado que os termos fora da diagonal principal acoplando duas incógnitas são nulos a menos que essas incógnitas sejam comuns a um determinado elemento. É essencial que essa esparsidade seja totalmente explorada com o intuito de reduzir a necessidade de armazenamento computacional e o número total de operações matriciais necessárias à solução do sistema de equações (LEE; FROEHLICH, 1986).

⁶Uma matriz é dita *esparsa* quando o número de coeficientes nulos é muito superior ao número de coeficientes não-nulos.

A maioria das rotinas de elementos finitos foram expressamente escritas para tirar proveito da natureza de banda da matriz de coeficientes. A *largura de banda* de uma linha da matriz de coeficientes é definida como o número de colunas entre o primeiro coeficiente não-nulo nessa linha e a diagonal da matriz. A máxima largura de banda é a maior largura entre todas as linhas da matriz. Esquemas de solução baseados na máxima largura de banda são bastante simples de se programar.

As posições dos coeficientes não-nulos na matriz K , e portanto as larguras de banda, dependem somente da ordenação das incógnitas. Na maioria dos algoritmos de solução de matrizes de banda, essa ordem é, de certa forma, baseada na numeração dos nós da malha. Em aplicações de elementos finitos, a máxima largura de banda B é tipicamente calculada como:

$$B = (R + 1) NDF, \quad (6.13)$$

onde R é a maior diferença entre o número dos nós de um mesmo elemento da malha e NDF é o número de incógnitas (graus de liberdade) em cada nó.

Rotinas de solução baseadas na máxima largura de frente da matriz de coeficientes são também usadas em aplicações de elementos finitos. A *largura de frente* de uma linha da matriz de coeficientes é definida como o número de colunas ativas naquela linha. Uma coluna j é dita ativa em uma certa linha i se j for maior do que i e houver ao menos um coeficiente não-nulo dessa coluna em uma linha com índice k maior que i .

Esquemas de solução baseados na máxima largura de frente são diretamente relacionados ao processo de agrupamento dos elementos. Técnicas de solução frontal podem ser baseadas tanto na decomposição da matriz de coeficientes quanto em um procedimento de fatoração e agrupamento de elemento por elemento. Se a solução frontal for baseada nas equações completamente agrupadas, a máxima largura de frente é também ditada pelo esquema de numeração dos nós. Todavia, se o processo de agrupamento de elemento por elemento for utilizado, a máxima largura de frente depende apenas da seqüência em que os elementos são processados e não tem relação com a numeração dos nós.

Como tanto para técnicas de solução de banda quanto para as frontais as necessidades de armazenamento computacionais são determinadas pelo esquema de numeração dos nós ou pela seqüência em que os elementos são agrupados, é desejável definir esses números ou seqüências de modo a reduzir a largura de banda ou a largura de frente do sistema tanto quanto possível. Para pequenas malhas uma numeração manual geralmente conduz a uma boa solução. Infelizmente, para malhas maiores com topologias complexas, esse trabalho torna-se tedioso, pouco econômico e com poucas chances de sucesso. Entretanto, vários algoritmos foram desenvolvidos para renumeração automática dos nós e elementos. Como é virtualmente impossível investigar todas as combinações possíveis de números de nós e seqüências de elementos, esses algoritmos são baseados em várias estratégias para se obter bons, mas não necessariamente ótimos, esquemas de numeração (LEE; FROEHLICH, 1986).

O modelo RMA2 utiliza um método de solução frontal com agrupamento e solução de uma parte da matriz antes de passar a outra parte (KING, 1997). A seqüência de agrupamento dos elementos pode ser melhorada através de comandos específicos de reordenação do programa GFGEN, utilizado para a compilação da malha de elementos finitos para o formato binário.

7 ENSAIOS NO MODELO FÍSICO

Este capítulo apresenta a parcela do trabalho realizada no modelo físico em escala reduzida.

Foi escolhido um trecho do Rio Jacuí logo a jusante da Usina Hidrelétrica Dona Francisca, no estado do Rio Grande do Sul (Brasil). Esse trecho do rio tem uma configuração essencialmente plana, com a seção transversal apresentando uma largura bastante superior à profundidade, e possui, por isso, um escoamento passível da classificação de escoamento em águas rasas, como descrito no Capítulo 4. O modelo, originalmente destinado ao estudo da usina hidrelétrica citada, foi construído em 1997 no CEHPAR — Centro de Hidráulica e Hidrologia Prof. Parigot de Souza, na época um laboratório mantido em convênio entre a UFPR e a COPEL — Companhia Paranaense de Energia. A construção e a calibragem do modelo foram realizadas pelos engenheiros Fernando Ribas Terabe e Júlio César Olinger.

7.1 CONSTRUÇÃO DO MODELO FÍSICO

A modelagem física em escala reduzida para o estudo de escoamentos em rios é um recurso bastante conhecido e de eficiência amplamente comprovada. O modelo físico do rio Jacuí foi construído em escala geométrica 1:100. Os valores de grandezas aqui citados, quando não explicitados de outra forma, referem-se a dimensões de protótipo, transportados diretamente pelas relações de escala.

O leito do rio foi reproduzido a partir de mapas de batimetria recebidos da empresa projetista da Usina Hidrelétrica Dona Francisca. Foram desenhadas seções transversais do leito do rio em chapas de *duratex*, já na escala do modelo, espaçadas de 35 m. A seguir, as seções foram cortadas e ajustadas em suas posições através de um sistema de coordenadas marcado no piso com teodolito. O posicionamento na elevação foi reali-

FIGURA 7.1 – CONSTRUÇÃO DO MODELO FÍSICO – POSICIONAMENTO DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS DO LEITO DO RIO



zado com auxílio de um aparelho de nível ótico. Essa etapa da construção é ilustrada na figura 7.1.

FIGURA 7.2 – CONSTRUÇÃO DO MODELO FÍSICO – MOLDAGEM DA SUPERFÍCIE DE CIMENTO

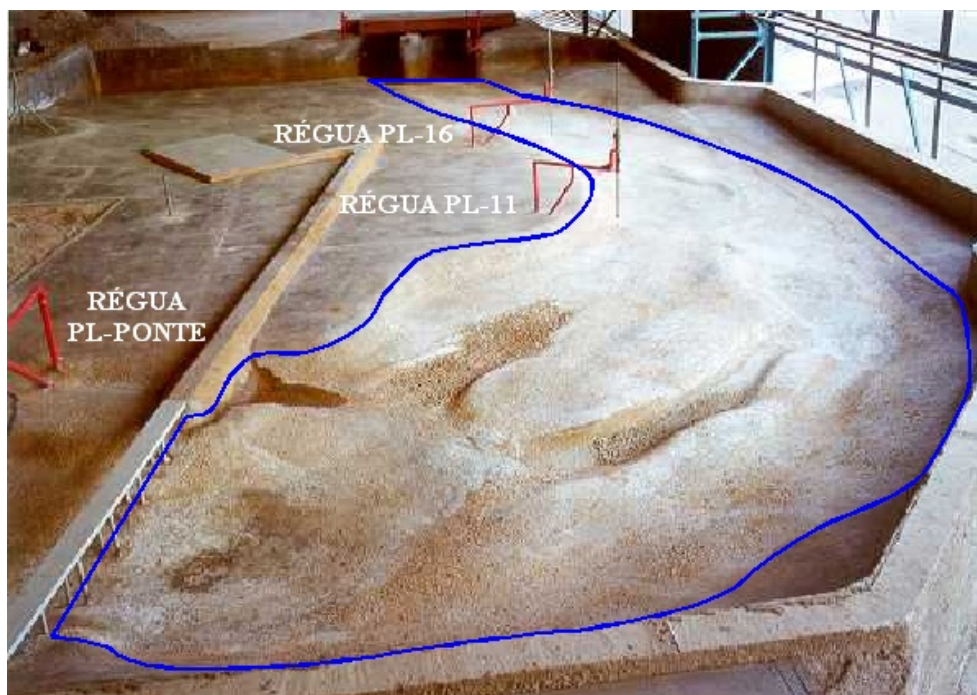


O leito entre as seções foi preenchido com pedra britada. Uma capa de argamassa de cimento e areia foi construída sobre a pedra, seguindo os contornos definidos pelas seções transversais de *duratex*, como ilustrado na figura 7.2.

7.2 CALIBRAGEM DO MODELO FÍSICO

Toda a operação do modelo físico, desde a sua calibragem, foi realizada de acordo com o critério de semelhança de Froude, por se tratar de um escoamento com superfície livre, onde a força da gravidade é preponderante (seção 5.4.1).

FIGURA 7.3 – CONFIGURAÇÃO FINAL DO MODELO FÍSICO CALIBRADO



A calibragem foi realizada lançando-se seixos com diâmetros entre 0,30 m e 0,50 m (valores de protótipo) e fixando-os no leito com nata de cimento. Após a fixação dessa rugosidade, ensaios com diversas vazões foram realizados e os níveis de água ao longo do modelo foram comparados com os níveis de água das curvas de descarga do protótipo. Essa comparação indicou as regiões onde a rugosidade deveria ser aumentada, fixando-se mais seixos, para que os níveis de água a montante dessas regiões também aumentassem. De forma inversa, outras regiões precisaram ter sua rugosidade reduzida, diminuindo-se a quantidade de seixos, para que houvesse um abaixamento do nível de água no modelo. Esse procedimento foi repetido sistematicamente até ser atingida uma concordância aceitável entre os níveis de água do modelo e do protótipo. O leito do rio após os trabalhos de

calibragem e os limites da área de estudo (em azul) são ilustrados na figura 7.3, assim como as réguas linimétricas posicionadas onde existem curvas de descarga no protótipo.

Nos gráficos das figuras 7.4 a 7.6 pode-se comparar os níveis de água no modelo físico já calibrado e no protótipo.

FIGURA 7.4 – CURVA DE DESCARGA NA SEÇÃO DA RÉGUA PL-Ponte

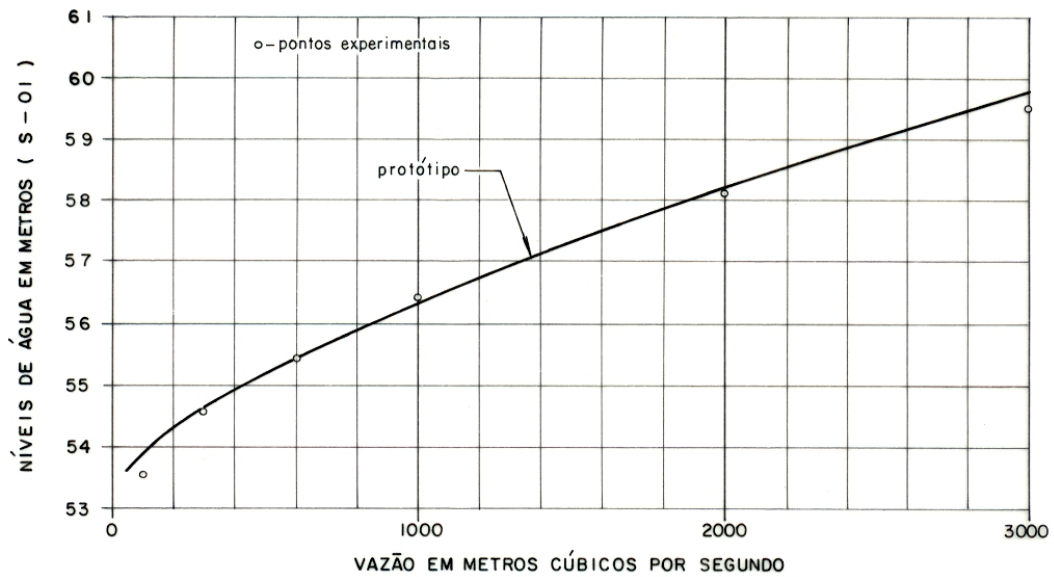


FIGURA 7.5 – CURVA DE DESCARGA NA SEÇÃO DA RÉGUA PL-11

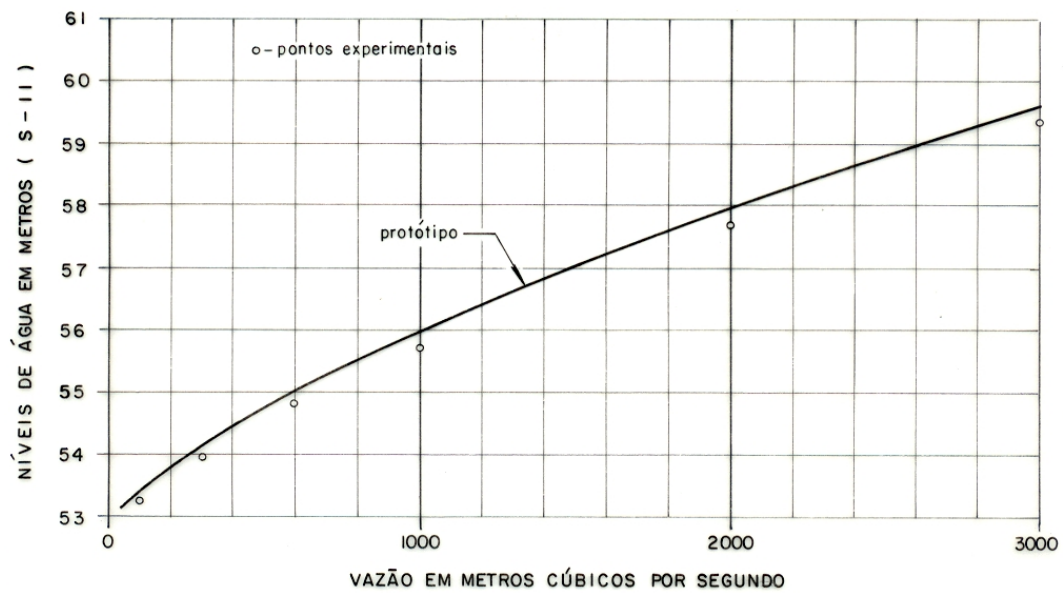
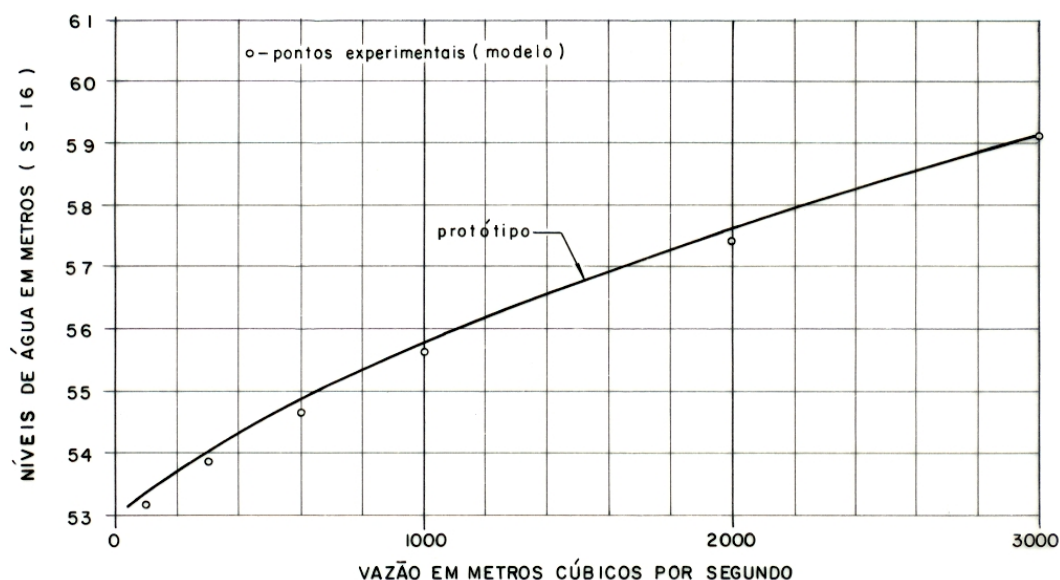


FIGURA 7.6 – CURVA DE DESCARGA NA SEÇÃO DA RÉGUA PL-16



7.3 ENSAIOS REALIZADOS PARA COMPARAÇÃO COM O MODELO COMPUTACIONAL

Para o estudo comparativo com o modelo computacional foram simuladas, a princípio, quatro condições de escoamento no rio Jacuí (ensaios 1a, 2a, 3a e 4a). Foram escolhidas as vazões de 296 m³/s, 1173 m³/s, 2334 m³/s e 3758 m³/s, correspondentes aos níveis de água na curva de descarga da régua PL-A¹ de 54 m, 56 m, 58 m e 60 m, respectivamente.

Nessas condições de escoamento, principalmente nas menores vazões, foram observadas corredeiras no trecho do rio onde surgem ilhas para níveis de água mais baixos (entre as seções de medição S2 e S4 — figura 7.11).

Nos trechos com corredeiras, ilustrados nas figuras 7.7 e 7.8, é provável que o escoamento atinja a condição de regime supercrítico ($Fr > 1$).

Como o modelo computacional RMA2 foi desenvolvido para simular apenas escoamentos fluviais, foram realizados mais quatro ensaios (1b, 2b, 3b e 4b) com os níveis

¹A régua linimétrica PL-A foi utilizada para imposição do nível de água de jusante do modelo.

FIGURA 7.7 – DETALHE DA REGIÃO DE CORREDEIRAS — ENSAIO 1a



FIGURA 7.8 – DETALHE DA REGIÃO DE CORREDEIRAS — ENSAIO 2a



de água de jusante (régua PL-A) artificialmente elevados² até que fossem afogadas as corredeiras, garantindo assim a ocorrência de escoamento fluvial em todo o trecho simulado. Todas as condições hidráulicas ensaiadas no modelo físico estão indicadas na tabela 7.1.

As vazões da tabela 7.1 foram impostas através de medidores de vazão do tipo vertedor triangular (ensaios 1a e 1b) e vertedor retangular (demais ensaios), ilustrados na figura 7.9. O vertedor triangular pode medir vazões entre 0,3 l/s e 11 l/s no modelo (entre

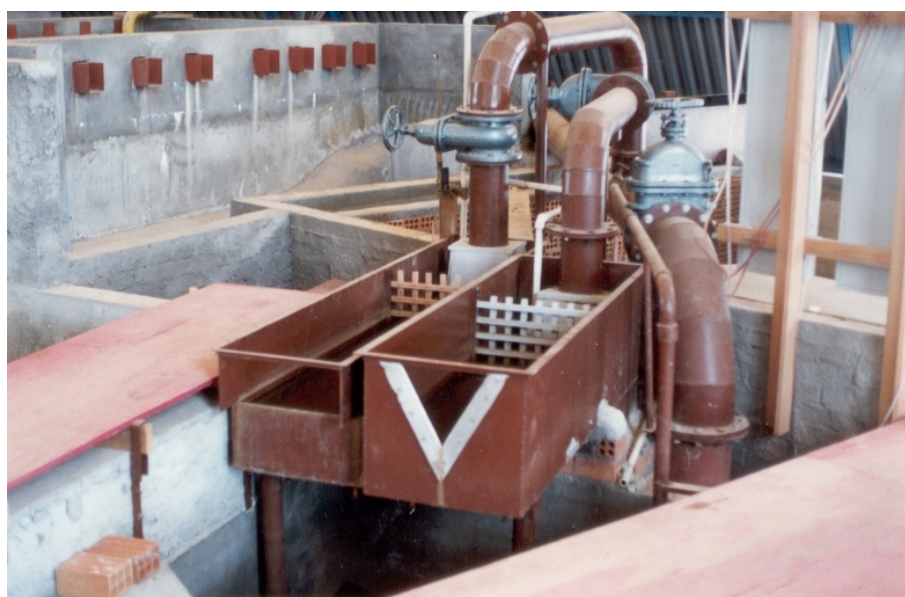
²Níveis de água maiores do que os níveis da curva de descarga natural do rio.

TABELA 7.1 – ENSAIOS REALIZADOS NO MODELO FÍSICO

Ensaio	Vazão (m ³ /s)	Nível de Água de Jusante (Régua PL-A) (m)
1a	296	54,00
1b	296	55,25
2a	1173	56,00
2b	1173	58,74
3a	2334	58,00
3b	2334	59,62
4a	3758	60,00
4b	3758	60,84

30 m³/s e 1100 m³/s no protótipo). O vertedor retangular pode medir vazões entre 10 l/s e 50 l/s no modelo (entre 1000 m³/s e 5000 m³/s no protótipo). A precisão estimada na calibração volumétrica destes medidores é de 2 %.

FIGURA 7.9 – MEDIDORES DE VAZÃO TIPO VERTEDOR TRIANGULAR E RETANGULAR



Os níveis de água da tabela 7.1 foram impostos a jusante do modelo através de régua linimétrica, como a ilustrada na figura 7.10. A precisão de leitura destas régua é de 0,1 mm no modelo, o que equivale a 1 cm no protótipo. Deve-se lembrar aqui que esta precisão é prejudicada pela presença de pequenas ondas na superfície da água no modelo.

FIGURA 7.10 – RÉGUA LINIMÉTRICA PARA MEDIÇÃO DE NÍVEIS DE ÁGUA NO MODELO



O valor utilizado é a média aritmética entre o mínimo e o máximo nível de água lidos durante um período de aproximadamente um minuto no modelo.

7.3.1 Resultados Medidos no Modelo Físico

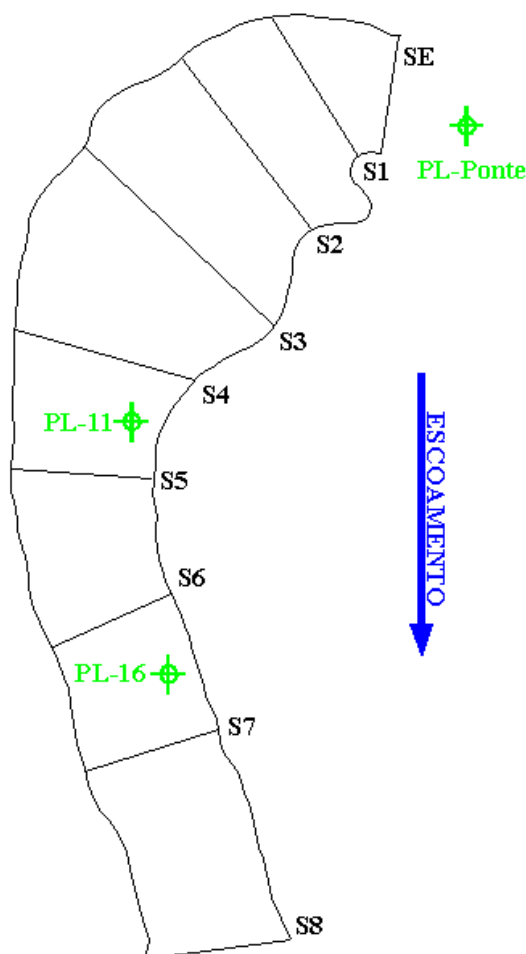
Nos oito ensaios foram realizadas medições de níveis de água e de velocidades em oito seções transversais, espaçadas de 140 m em média. As seções são indicadas na figura 7.11.

Velocidades na seção de entrada do modelo³ foram também medidas para imposição das condições de contorno na entrada do modelo computacional (módulo das vazões e direção das velocidades por nó da malha de elementos finitos). O nível de água na seção de entrada foi considerado igual ao da régua linimétrica PL-Ponte, posicionada um pouco a montante dessa seção.

Os níveis de água nas seções S1 a S8 foram medidos através de um dispositivo fabricado no CEHPAR chamado *aranha*, utilizado em conjunto com um aparelho de nível.

³A seção de entrada é considerada o contorno de montante da malha de elementos finitos do modelo computacional.

FIGURA 7.11 – SEÇÕES DE MEDIÇÃO DE VELOCIDADES E NÍVEIS DE ÁGUA NO MODELO FÍSICO



A *aranha* é ilustrada na figura 7.12. Em cada seção foram lidos entre dois e cinco níveis de água, conforme a largura da seção e a variação dos níveis de água nela.

As velocidades nas seções S1 a S8 foram medidas através de um medidor eletromagnético de velocidades (figura 7.13), intrusivo, cuja haste possui 4 mm de diâmetro. O medidor possui 4 sensores, dois para a direção x e dois para a direção y , e tem precisão de 2%. O medidor foi posicionado no modelo de forma que cada par de sensores estivesse sempre orientado em uma direção global definida, x ou y , fornecendo diretamente as componentes u e v da velocidade no ponto de medição. Para isso foi construído um suporte de madeira para o medidor, figura 7.14, com ângulo horizontal variável, para ajuste do ângulo de posicionamento do medidor em relação a cada seção.

FIGURA 7.12 – ARANHA – DISPOSITIVO MÓVEL PARA MEDIÇÃO DE NÍVEIS DE ÁGUA



FIGURA 7.13 – MEDIDOR ELETROMAGNÉTICO DE VELOCIDADES



As velocidades foram medidas, em cada uma das seções S1 a S8, em pontos espaçados de 25 m em toda a largura da seção, exceto em pontos muito próximos das margens, onde a pequena profundidade impedia a colocação do medidor sem prejudicar as condições locais de escoamento. Foi lida uma velocidade em cada ponto, com o me-

FIGURA 7.14 – DISPOSITIVO DE SUPORTE PARA O MEDIDOR ELETROMAGNÉTICO DE VELOCIDADES



didor posicionado entre a superfície livre e a metade da profundidade. Em cada ponto foi realizada uma aquisição, em computador, das velocidades obtidas pelo medidor eletromagnético, a uma taxa de aquisição de 10 Hz por um período de 5 minutos, em valores de protótipo. A velocidade final considerada em cada ponto, para comparação com o modelo computacional, é a média aritmética dos 3000 valores adquiridos. Resultados dessa aquisição em dois pontos da seção S3, durante o ensaio 3a, são mostrados em gráficos de tempo contra velocidade. O primeiro gráfico, figura 7.15, mostra a flutuação da velocidade em um ponto na região do escoamento principal, de velocidades altas e de sentido do fluxo bem definido. O segundo gráfico, figura 7.16, apresenta a flutuação de velocidade em outro ponto, numa região de correntes de retorno, onde percebe-se grande variação de intensidade e sentido do fluxo.

Para fins de verificação dos dados da aquisição, foi estimada uma média temporal da velocidade com base na observação do ponteiro indicador da velocidade durante a medição. Essa estimativa visual da velocidade média resultou num erro médio (raiz da soma do quadrado dos erros) inferior a 0,10 m/s.

FIGURA 7.15 – VARIAÇÃO DA VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO – ENSAIO 3a – SEÇÃO S3 – PONTO 5861 NA REGIÃO DO ESCOAMENTO PRINCIPAL

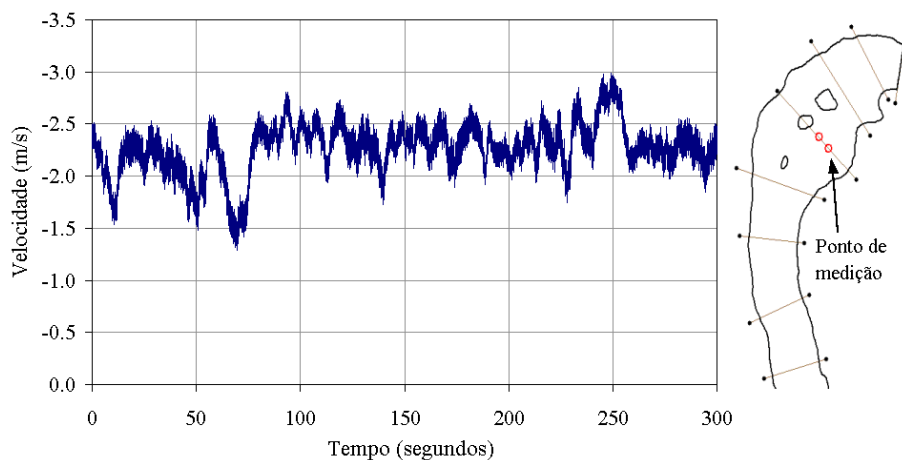
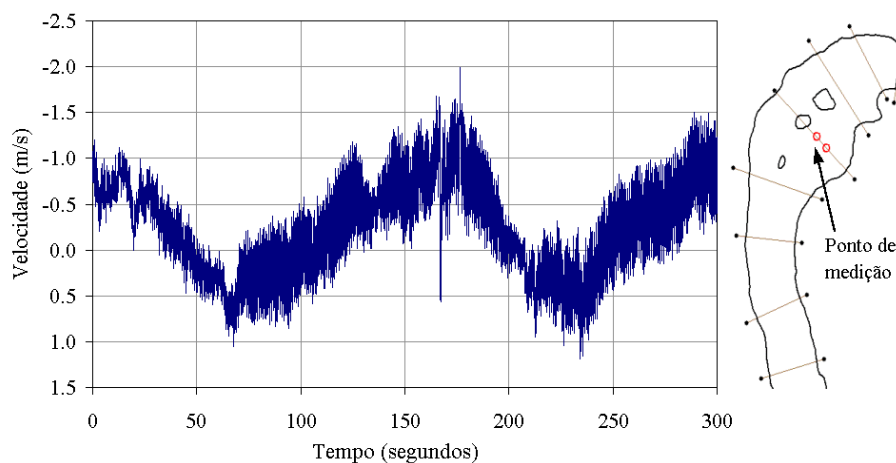


FIGURA 7.16 – VARIAÇÃO DA VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO – ENSAIO 3a – SEÇÃO S3 – PONTO 5871 NA REGIÃO DE CORRENTES DE RETORNO



Os valores de níveis de água e velocidades médias medidos nos oito ensaios são apresentados em conjunto com os resultados do modelo computacional, no Capítulo 9.

7.3.2 Registro Fotográfico dos Ensaios

Em todos os ensaios foram feitas fotografias para caracterizar as condições gerais de escoamento. A máquina fotográfica foi posicionada acima do modelo reduzido, permitindo mostrar o escoamento em planta, como numa vista aérea. As fotografias foram efetuadas com tempo de exposição longo (um ou meio segundo) e com traçadores de corrente (confetes) lançados sobre a superfície da água. Essas fotografias tiveram grande

importância por revelar o traçado das linhas de correntes no modelo, assim como as regiões de maior e de menor velocidade.

Adicionalmente foram feitas fotografias sem confetes do trecho entre as seções S2 e S4, registrando em detalhe as ondas superficiais na região das corredeiras.

As fotografias de maior interesse serão apresentadas no Capítulo 9, para comparação com os resultados do modelo computacional.

8 ELABORAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL E ANÁLISES DE SENSIBILIDADE

Neste capítulo é apresentada a etapa de construção do modelo computacional e do estudo de sensibilidade de alguns parâmetros. No estudo de sensibilidade alguns dados de entrada do modelo computacional foram estudados separadamente para verificar a sua influência nos resultados do modelo. Os seguintes itens foram estudados:

- a) viscosidade turbulenta;
- b) coeficiente de rugosidade do leito do rio;
- c) condição de contorno na entrada do modelo;
- d) correntes secundárias na curva do rio.

Neste trabalho, por razões de simplicidade de escrita, cada simulação de escoamento no modelo computacional foi referida simplesmente por *simulação*, diferenciando-se assim da denominação *ensaio*, utilizada para cada condição hidráulica diferente ensaiada no modelo físico.

Os resultados obtidos nos estudos de sensibilidade servirão de ponto de partida para a calibragem das simulações dos ensaios no modelo físico.

8.1 ELABORAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL

O domínio do modelo computacional foi definido, a jusante, pela seção de medição S8 no modelo físico e, a montante, pela seção do rio Jacuí onde existe a ponte que leva à subestação da usina hidrelétrica no protótipo, aqui denominada seção de entrada ou seção SE.

A primeira malha de elementos finitos foi elaborada para simular os casos de vazões e níveis de água mais altos. As margens foram traçadas entre as elevações 59 m e 60 m. As duas margens foram divididas no mesmo número de trechos, resultando trechos de comprimento menor na margem esquerda, interna à curva do rio. Em cada trecho, as

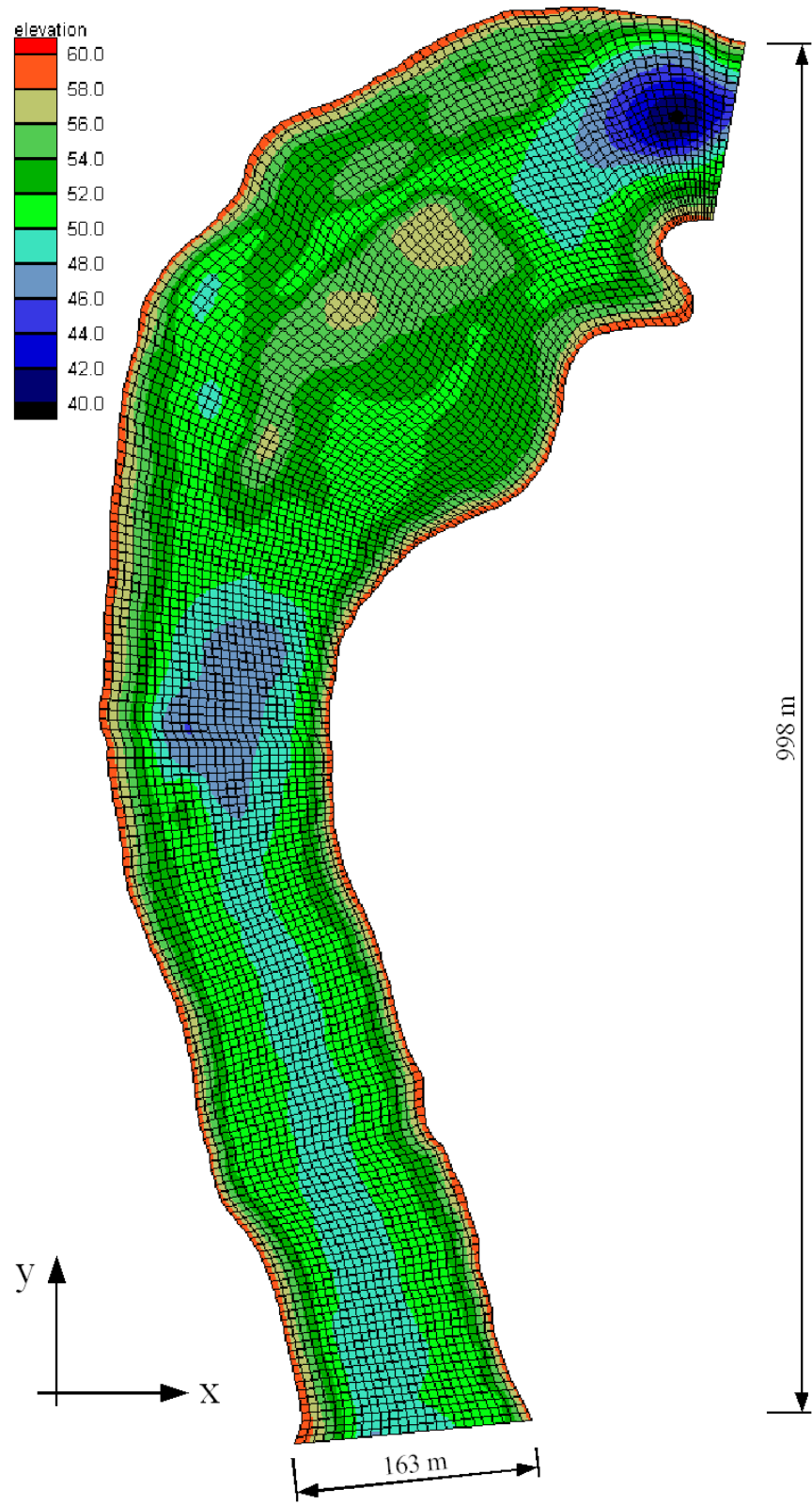
duas margens foram subdivididas no mesmo número de pontos, que se tornaram nós do contorno. Entre nós correspondentes das duas margens foram interpolados linearmente os nós internos do domínio. Esse tipo de geração chama-se *interpolação transfinita* e foi desenvolvido através de planilhas de cálculo e ferramentas de desenho auxiliado por computador. O arquivo de entrada de dados da malha de elementos finitos é apresentado no apêndice 1. A malha foi concluída com 17.649 nós e 5.780 elementos, sendo 95% dos elementos com áreas compreendidas entre 25 m² e 50 m², resultando em um espaçamento médio de 6 m entre nós de vértice. O grau de refinamento da malha foi escolhido de forma a permitir uma representação fiel da batimetria do rio, que apresenta canais com cerca de 6 m de largura entre as ilhas, resultando em uma escala resolvível para fenômenos hidráulicos da ordem de 30 m de extensão. A grande maioria dos elementos é quadrangular, havendo também elementos triangulares junto às margens. A malha de elementos finitos para simulação dos ensaios com níveis de água mais altos e a batimetria do rio Jacuí são apresentadas na figura 8.1.

A atribuição da batimetria para cada nó da malha foi realizada a partir de um arquivo com cerca de 650 pontos de coordenadas geográficas e elevações conhecidas, dispersos de forma desordenada sobre todo o domínio do modelo. O cálculo da elevação em cada nó foi realizado através de *software* pelo método de interpolação conhecido por *Kriging*. Esse método procura encontrar tendências sugeridas pelos dados amostrados — os 650 pontos de batimetria neste caso — de modo que, por exemplo, pontos mais profundos sejam conectados ao longo de um canal, ao invés de formarem uma sequência de “poços”¹ isolados na malha.

Nos demais ensaios, os níveis de água são mais baixos do que a elevação de alguns nós da primeira malha elaborada, o que impede o funcionamento do modelo RMA2. Outras malhas foram então criadas a partir da primeira, apagando-se os elementos que estariam fora da água e movimentando-se alguns nós para ajustar um novo contorno relativamente suave. A malha para simulação dos ensaios 2b e 3a foi obtida apenas retirando-se

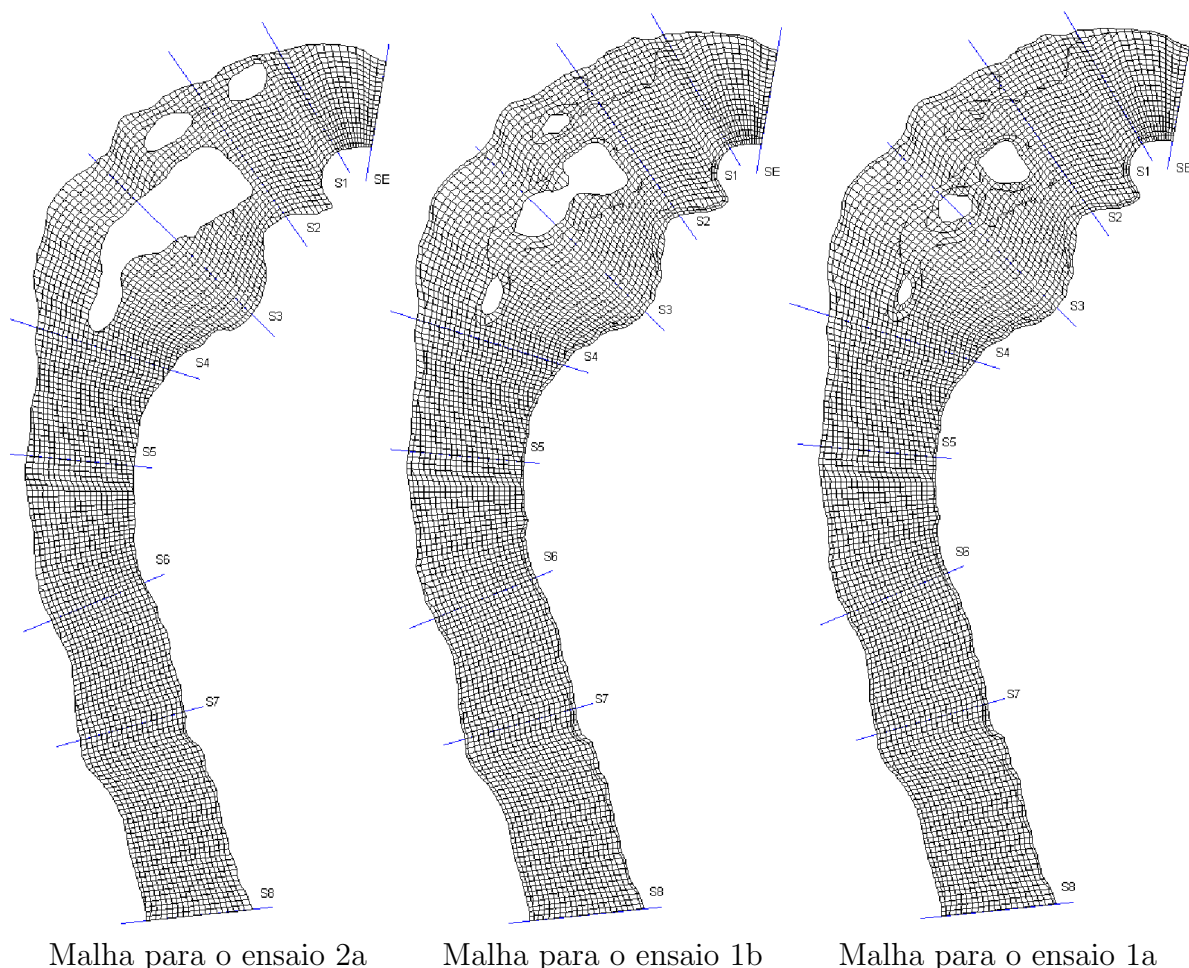
¹Na literatura sobre métodos de interpolação esses poços são comumente referidos por *bull's eyes*.

FIGURA 8.1 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS SIMULAÇÕES DOS ENSAIOS 3b, 4a E 4b



uma fileira de elementos de cada margem do modelo. As malhas para as outras simulações sofreram modificações maiores, incluindo a configuração de ilhas e a movimentação de alguns nós internos da malha. Essas malhas são apresentadas na figura 8.2.

FIGURA 8.2 – MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS SIMULAÇÕES DOS ENSAIOS 1a, 1b E 2a



Durante a geração das malhas, cuidou-se para que uma linha de nós fosse posicionada sobre cada seção de medição utilizada no modelo físico (seções SE e S1 a S8), para facilitar a comparação de resultados.

8.2 INFLUÊNCIA DA VISCOSIDADE TURBULENTA

O modelo RMA2 simula os efeitos da turbulência através de um modelo de turbulência de 1ª ordem, ou seja, através do emprego de um coeficiente de viscosidade turbu-

lenta ν_t , como visto na seção 3.4.1. Esse coeficiente multiplica diretamente os termos de 2ª ordem das equações do transporte da quantidade de movimento (4.27) e (4.28), ou seja, as derivadas espaciais da viscosidade turbulenta são consideradas nulas. Nas equações do movimento, os termos de segunda ordem representam a parcela de difusão da quantidade de movimento e os coeficientes de viscosidade turbulenta ν_t afetam as condições do escoamento de modo muito semelhante ao da viscosidade molecular do fluido. No modelo computacional, essa difusão simula os efeitos causados pela turbulência presente em escalas não resolvíveis pela malha adotada. No esquema numérico utilizado pelo RMA2, a viscosidade turbulenta atua, também, como forma de estabilização da solução numérica, pois não há qualquer esquema de amortecimento artificial². Por isso, a viscosidade turbulenta tem bastante influência sobre a chance de convergência da solução.

Apesar do coeficiente de viscosidade turbulenta ser uma constante nas equações utilizadas pelo RMA2, seu valor pode ser feito variável de elemento para elemento ao longo da malha através da utilização do número de Reynolds da malha, apresentado na seção 3.4.1.1.

Para analisar a influência da viscosidade turbulenta sobre os resultados do modelo, foram feitas simulações do ensaio 2a com diferentes valores para o número de Reynolds da malha. Foi escolhido o ensaio 2a porque ele apresenta condições propícias para o estudo desse parâmetro, tais como regiões de separação do fluxo principal, correntes de retorno e gradientes de velocidade significativos. Além disso, as fotografias com confetes revelaram-se particularmente boas nesse ensaio.

8.2.1 Limites de Convergência da Solução Numérica

Foram realizadas primeiramente algumas simulações de caráter exploratório com diferentes números de Reynolds da malha e verificou-se que a solução numérica divergia para $Re_{grid} > 12$. Entretanto, o campo de velocidades resultante da simulação com

²“Na realidade, a utilização de coeficientes de viscosidade turbulenta exagerados é um esquema de amortecimento artificial.” [Nota do examinador - Prof. Paulo Cesar Colonna Rosman]

$Re_{malha} = 12$ não parecia adequado às fotografias do ensaio 2a com confetes e, pelo que indicavam os resultados até esse ponto, uma simulação com maior Re^{malha} era promissora³.

A solução para este problema partiu da consideração do método de Newton-Raphson, apresentado na seção 6.4.2. Esse método apresenta maiores chances de divergir quando a condição inicial, utilizada na primeira iteração, não está suficientemente próxima da solução. O RMA2 permite apenas a escolha do nível de água inicial, igual para todo o domínio. As velocidades iniciais são sempre nulas, com exceção das velocidades no contorno de montante. A escolha de diferentes níveis de água iniciais não surtiram efeito. A solução encontrada foi realizar uma seqüência de simulações nas quais o valor do número de Reynolds da malha foi gradativamente aumentado, de uma simulação para outra, mantendo-se constantes todos os outros parâmetros e condições de contorno. Em cada simulação o programa executa uma série de iterações até que seja atingido o critério de convergência⁴. Os resultados de uma simulação foram inseridos como condição inicial para a simulação seguinte. Dessa forma foi possível aumentar o limite de convergência de $Re^{malha} = 12$ para $Re^{malha} = 51$. Cada série de simulações para se atingir um determinado valor de Re^{malha} consumiu cerca de 10 minutos de processamento de um Pentium IV de 3,06 GHz.

Outra alternativa para o problema, não tentada aqui, seria manter um número de Reynolds da malha alto desde o primeiro passo de tempo e aumentar gradativamente a vazão até o valor desejado.

³Problemas de estabilidade com o RMA2 são também relatados por STOSCHEK e MATHEJA (2000) em seu trabalho de análise de sensibilidade dos modelos MIKE21 e RMA2/SED2D.

⁴Nestas simulações a convergência era considerada atingida quando a variação máxima do nível de água em qualquer nó era inferior a 3 cm de uma iteração para outra.

8.2.2 Influência sobre o Campo de Velocidades

Várias simulações foram realizadas, sequencialmente⁵, com Re^{malha} variando de 1 a 51. Na tabela 8.1 são apresentadas as faixas de viscosidade turbulenta resultantes para alguns números de Reynolds da malha utilizados.

TABELA 8.1 – COEFICIENTES DE VISCOSIDADE TURBULENTA RESULTANTES PARA ALGUNS NÚMEROS DE PÉCLET

Número de Reynolds da malha	Coeficientes de viscosidade ν_t (m ² /s)	
	Mínimo	Máximo
1	2,619	24,05
10	0,243	2,545
20	0,121	1,356
30	0,081	0,930
40	0,061	0,706
51	0,048	0,572

As velocidades (módulo e direção) resultantes em dois pontos do domínio foram inseridas em gráficos contra o número de Reynolds da malha. Foram escolhidos os nós 5861 e 5871 da malha de elementos finitos. O nó 5861 encontra-se sobre a seção S3 de medição no modelo físico, na região de escoamento do fluxo principal, mais veloz e com maior profundidade. O nó 5871 localiza-se numa região mais rasa, de pouca velocidade e com correntes de circulação, também sobre a seção S3. Os respectivos gráficos estão apresentados nas figuras 8.3 e 8.4.

Percebe-se que o módulo da velocidade varia significativamente em função do número de Reynolds da malha, nos dois pontos, até cerca de $Re^{malha} = 40$. Por outro lado, a direção da velocidade praticamente não varia no ponto 5861 e varia bastante no ponto 5871. A explicação desses fatos pode ser encontrada se forem observados, na figura 8.5, os campos de velocidade na região desses pontos para alguns valores do número de Reynolds da malha simulados.

⁵O resultado de uma simulação é a condição inicial da simulação seguinte.

FIGURA 8.3 – VARIAÇÃO DA VELOCIDADE NO NÓ 5861 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$

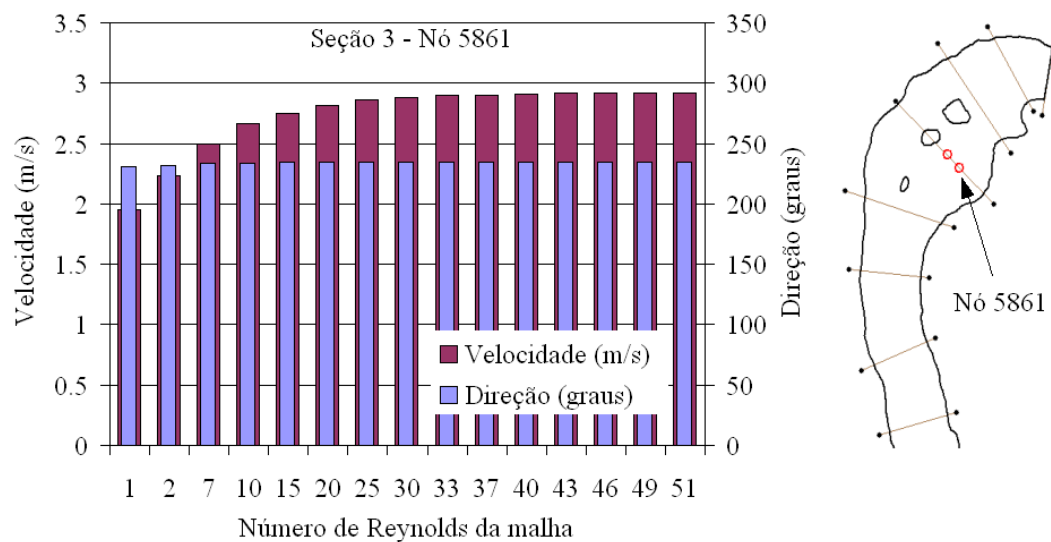


FIGURA 8.4 – VARIAÇÃO DA VELOCIDADE NO NÓ 5871 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$

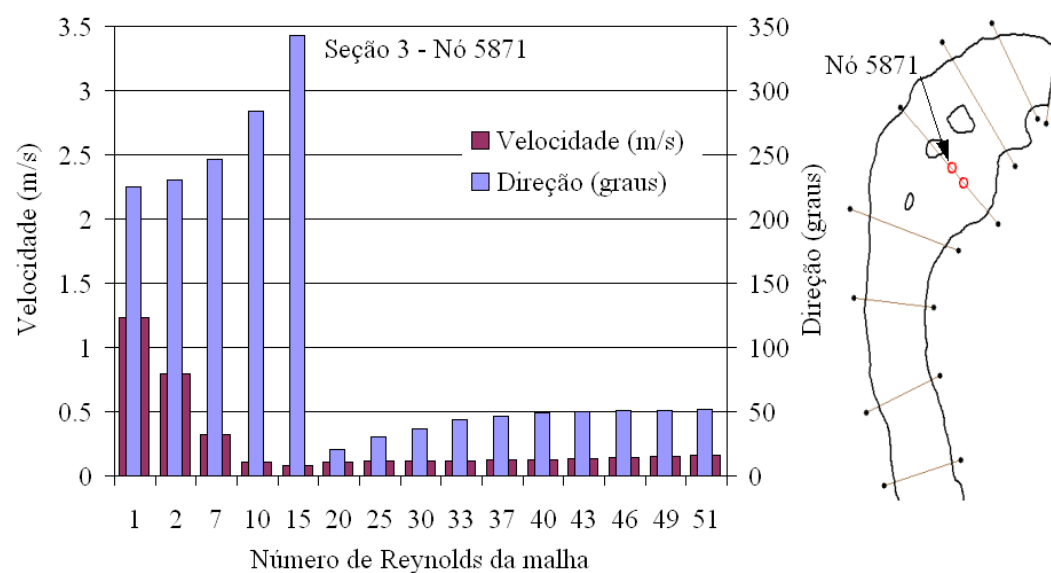
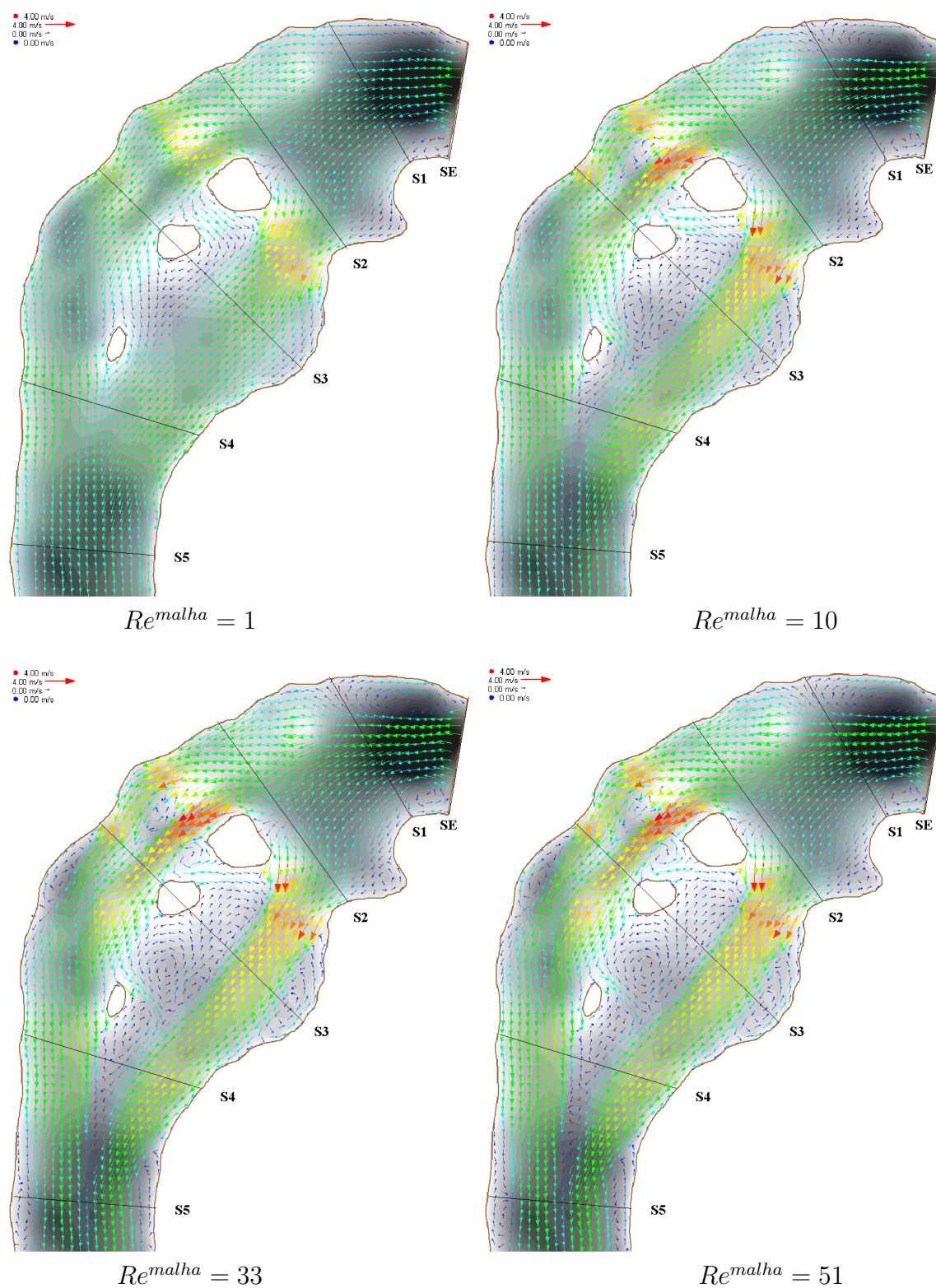


FIGURA 8.5 – CAMPO DE VELOCIDADES PARA DIFERENTES VALORES DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$



Nota: - Os tons de cinza indicam a profundidade.

Nas simulações com viscosidade turbulenta altas (números de Reynolds da malha baixos) as velocidades tendem a distribuir-se de modo uniforme através da seção transversal. Na medida em que a viscosidade turbulenta é reduzida (número de Reynolds da malha aumentado), separações e circulações começam a aparecer, como na região do ponto 5871, fazendo com que o módulo da velocidade nesse ponto diminua e a sua direção varie consideravelmente. Como seria de se esperar, pela simples consideração da equação da continuidade, a velocidade na região do canal principal (ponto 5861) aumenta.

As observações do parágrafo anterior podem ser compreendidas da seguinte forma: como a viscosidade turbulenta multiplica os termos difusivos, seu aumento (redução do número de Reynolds da malha) amplifica a difusão da quantidade de movimento⁶, espalhando a energia das regiões de maior velocidade para as regiões onde o escoamento tenderia a ser mais lento, reduzindo os gradientes de velocidades e diminuindo ou até mesmo eliminando as regiões de separação do fluxo principal e de formação de correntes de retorno.

A fotografia do ensaio 2a do modelo físico (figura 8.6), com confetes, permite distinguir as regiões onde há maior velocidade, os pontos onde há separação do escoamento principal e os locais com correntes de retorno. Comparando-se a fotografia com os campos de velocidades da figura 8.5, vê-se que as simulações com $Re^{malha} = 33$ e com $Re^{malha} = 51$ têm boa concordância com os padrões de circulação e turbulência observados no modelo físico.

8.2.3 Influência do Número de Reynolds da Malha sobre os Níveis de Água

Os níveis de água nos pontos 5861 e 5871 foram também plotados em gráficos contra o número de Reynolds da malha, apresentados nas figuras 8.7 e 8.8.

Observa-se que os níveis de água apresentam variação significativa até cerca de $Re^{malha} = 30$. Nos dois pontos, a diminuição da viscosidade turbulenta (aumento do

⁶As equações de Navier-Stokes são equações de transporte da quantidade de movimento.

FIGURA 8.6 – CONFIGURAÇÃO DO ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO – ENSAIO 2a – TRECHO DE MONTANTE



FIGURA 8.7 – VARIAÇÃO DO NÍVEL DE ÁGUA NO NÓ 5861 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$

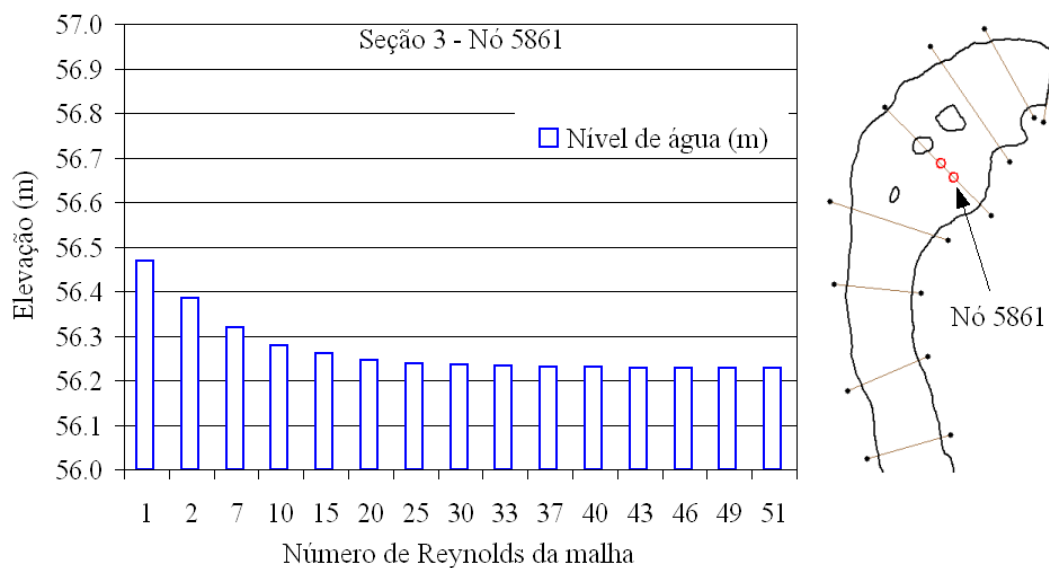
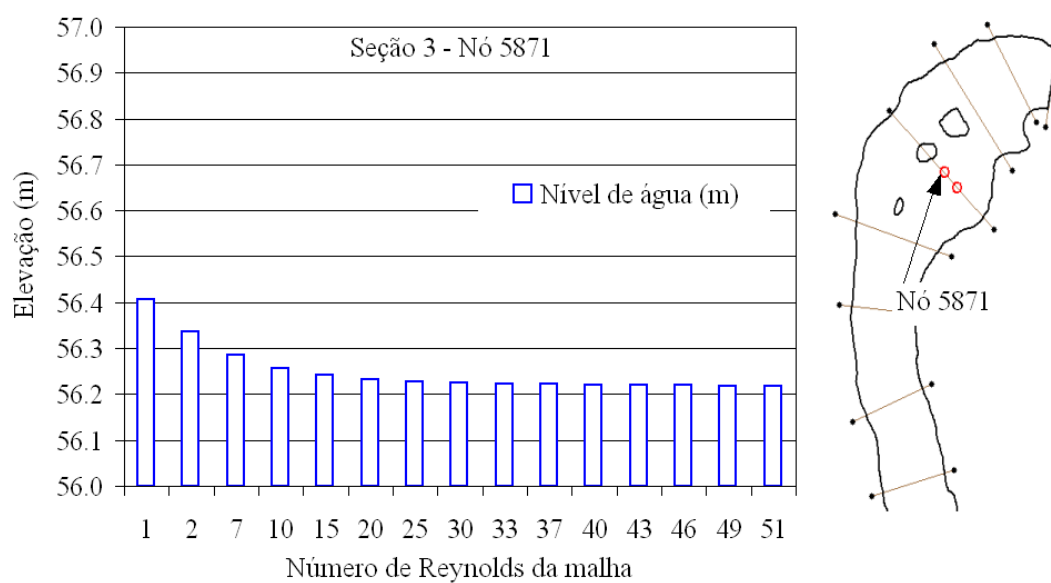
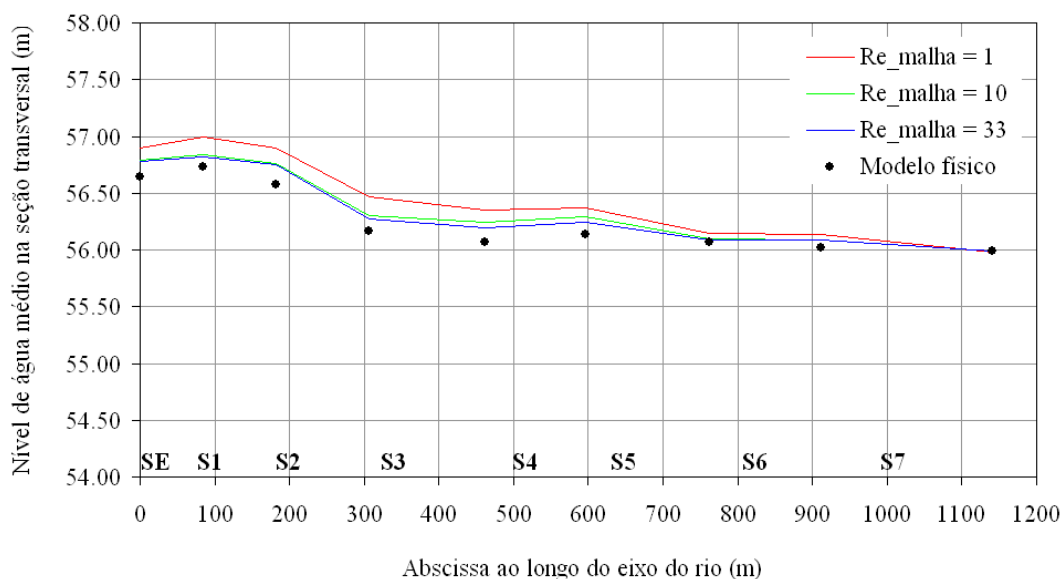


FIGURA 8.8 – VARIAÇÃO DO NÍVEL DE ÁGUA NO NÓ 5871 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS DA MALHA – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$



número de Reynolds da malha) conduz à redução do nível de água, demonstrando que a viscosidade de torvelinho afeta as perdas de energia do sistema. O mesmo fato pode ser constatado observando-se a declividade do nível de água ao longo do modelo para diferentes valores do número de Reynolds da malha, mostrada na figura 8.9.

FIGURA 8.9 – NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 2a – MANNING $n = 0,035$



8.3 INFLUÊNCIA DA RUGOSIDADE DO LEITO

Na integração das equações da conservação da quantidade de movimento, (capítulo 4) surgem as tensões tangenciais junto ao fundo e à superfície livre. A primeira, objeto de estudo neste item, é modelada no RMA2 através da equação de Manning⁷.

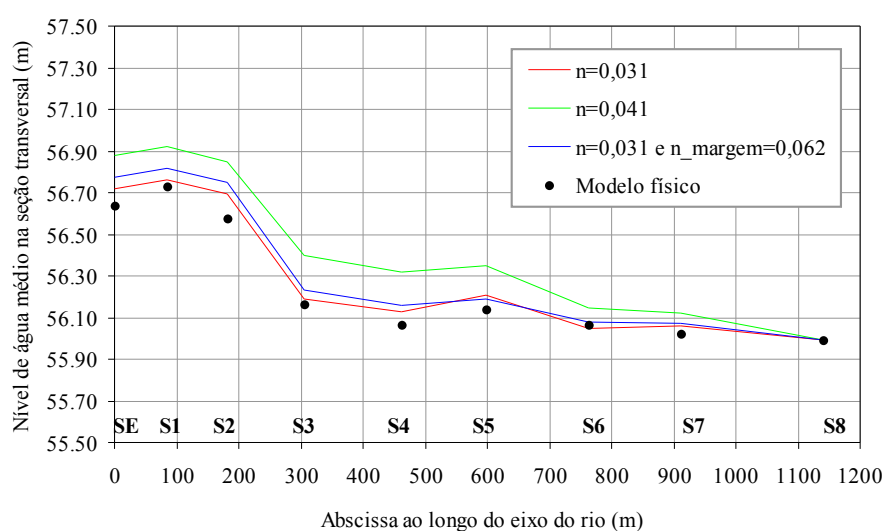
Para verificação da influência do coeficiente de rugosidade n de Manning foram feitas três simulações utilizando-se as condições de contorno do ensaio 2a do modelo físico. Foi escolhido para a simulação inicial o valor de $n = 0,031$, que está na faixa de valores sugeridos para canais naturais em planície em CHOW (1959). Esse valor foi atribuído igualmente a todos os elementos do domínio. Diversas tentativas foram feitas com valores para n menores que 0,031 aplicados em toda a malha e não houve convergência da solução

⁷O programa permite também o uso da equação de Chézy.

em nenhuma delas. Na segunda simulação foi arbitrado o valor $n = 0,041$, com o objetivo de verificar os efeitos de uma maior rugosidade. A terceira simulação foi realizada com $n = 0,031$ na maior parte do domínio e $n = 0,062$ nos elementos junto às margens. O modelo RMA2 assume condição de não aderência (velocidade $\neq 0$) nos contornos laterais e não oferece a opção de atribuição de uma rugosidade para esses contornos. Então, para considerar o efeito da rugosidade da margem, recorre-se à atribuição de um maior valor para a rugosidade de fundo nos elementos junto às margens.

Para cada simulação, foi calculada a média dos níveis de água nos nós da seção de entrada (SE) e das seções S1 a S7. Médias em cada seção a partir dos valores medidos no modelo físico foram também calculadas. Os resultados são apresentados na figura 8.10.

FIGURA 8.10 – NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 2a – VARIAÇÃO DA RUGOSIDADE – $Re^{malha} = 20$



A redução de $n = 0,041$ para $n = 0,031$ resultou em uma diminuição de 15 cm, em média, nos níveis de água médios nas seções. A aplicação de um coeficiente n maior nas margens resultou em níveis de água ligeiramente superiores aos da simulação com $n = 0,031$. Foram feitas tentativas para se obter níveis de água nas seções SE a S5 mais baixos, próximos dos valores do modelo físico, sem sucesso. Os níveis obtidos com $n = 0,031$ estão muito próximos do limite de convergência, dado pela ocorrência de escoamento supercrítico entre as seções S2 e S3, como será abordado no item 8.3.1.

Para as seções S1 a S8 foram elaborados gráficos com as velocidades em todos os nós da seção, plotadas contra a abscissa do nó contada a partir da margem esquerda. As velocidades apresentadas são as resultantes das componentes U e V calculadas pelo modelo RMA2. O sinal negativo indica quando a velocidade ocorre no sentido de jusante para montante (corrente de retorno). A figura 8.11 apresenta esses gráficos, juntamente com as medições no modelo físico. As velocidades da simulação com $n = 0,041$ resultaram um pouco inferiores às da simulação com $n = 0,031$, principalmente nas seções S3, S4 e S5. Não houve modificação significativa na forma dos gráficos. Na terceira simulação, houve uma redução das velocidades junto às margens, resultado da maior rugosidade nessa região. Em termos gerais, as medições em modelo parecem favorecer a simulação com rugosidade aumentada nos elementos das margens.

As direções das velocidades foram também plotadas em gráficos para cada seção. A direção é dada em graus e contada no sentido anti-horário, como no círculo trigonométrico, partindo de zero quando o vetor velocidade coincide com o eixo x de coordenadas globais. Os gráficos são apresentados na figura 8.12.

Nas seções S5, S7 e S8, a simulação com coeficiente n maior nas margens apresentou uma nítida diferença em relação às outras duas, captando com precisão a direção das velocidades junto aos contornos. As mudanças de direção junto ao contorno devem-se à presença de pequenas separações e correntes de retorno. No trecho entre as seções S5 e S8, essas correntes surgem apenas na simulação com coeficiente n maior nas margens, como pode ser visto na figura 8.13. A fotografia do modelo físico, figura 8.14, confirma a presença das correntes de retorno junto às margens entre as seções S5 e S8.

8.3.1 Problemas de Convergência e Ocorrência de Escoamento Supercrítico

Em nenhuma das tentativas de simulação com $n < 0,031$ aplicado uniformemente em toda a malha, foi obtida a convergência da solução. Observando-se a posição dos nós onde o programa apresentava as maiores oscilações de uma iteração para outra,

FIGURA 8.11 – VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 2a – VARIAÇÃO DA RUGOSIDADE – $Re^{malha} = 20$

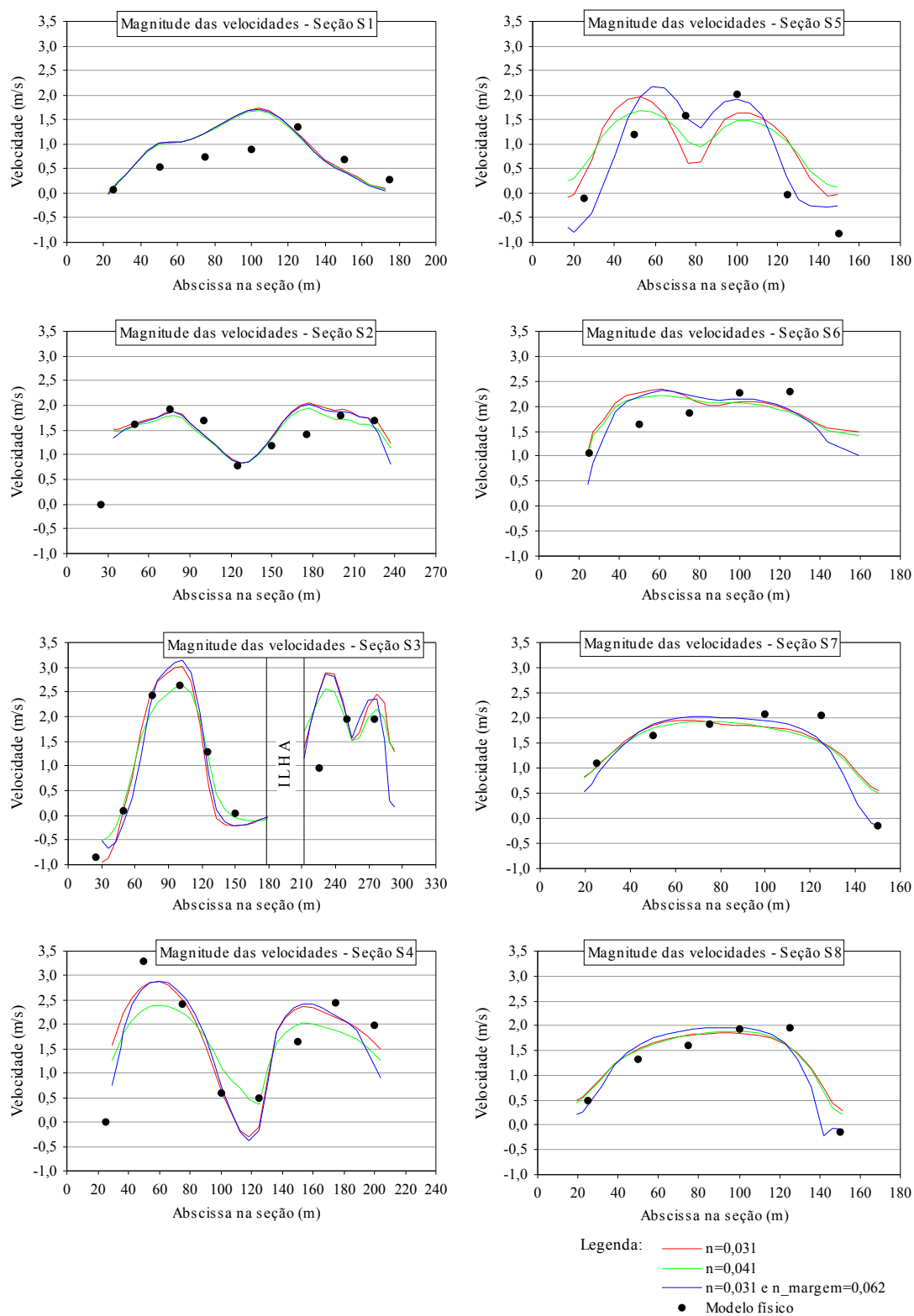


FIGURA 8.12 – DIREÇÕES DAS VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 2a – VARIAÇÃO DA RUGOSIDADE – $Re^{malha} = 20$

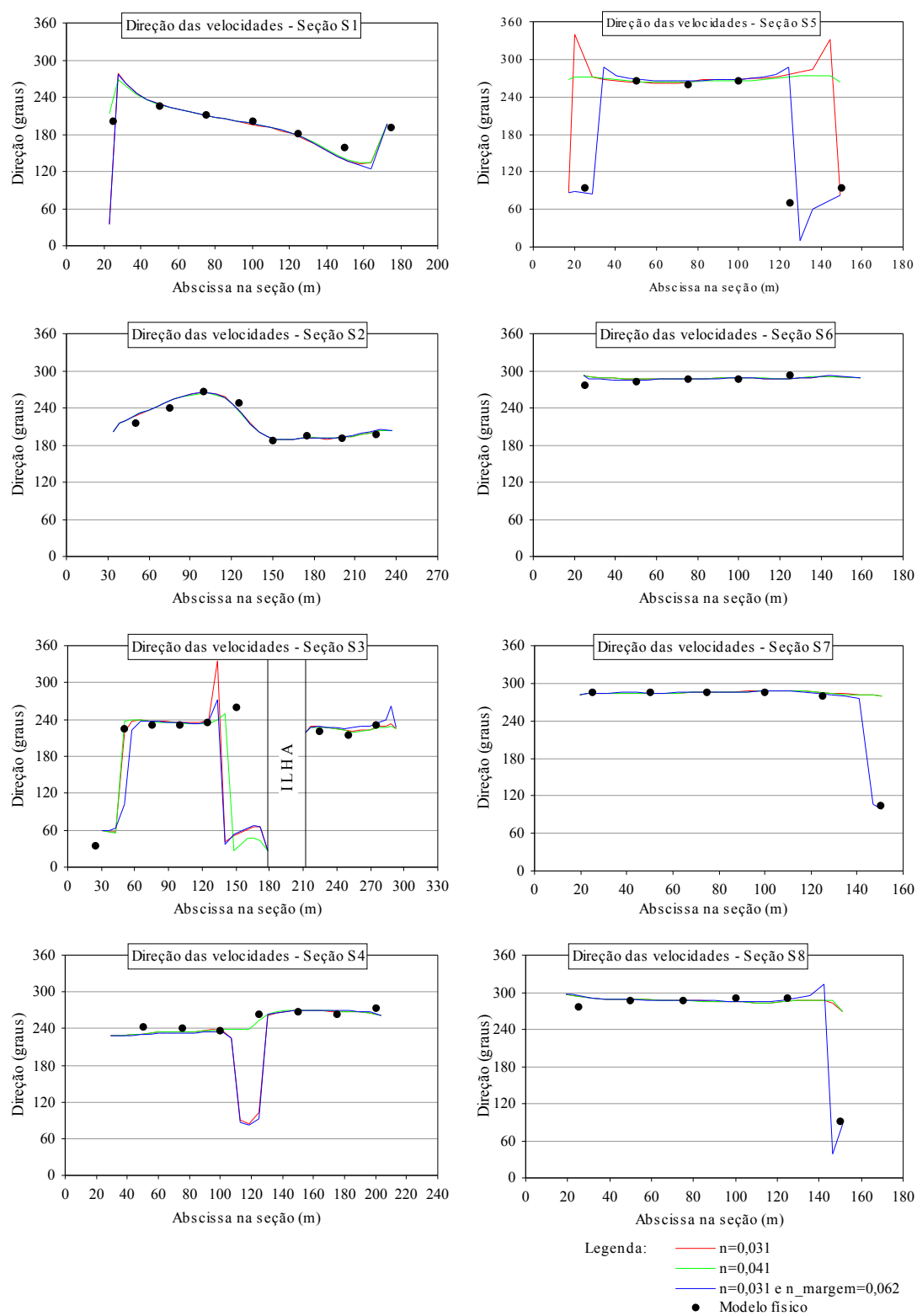
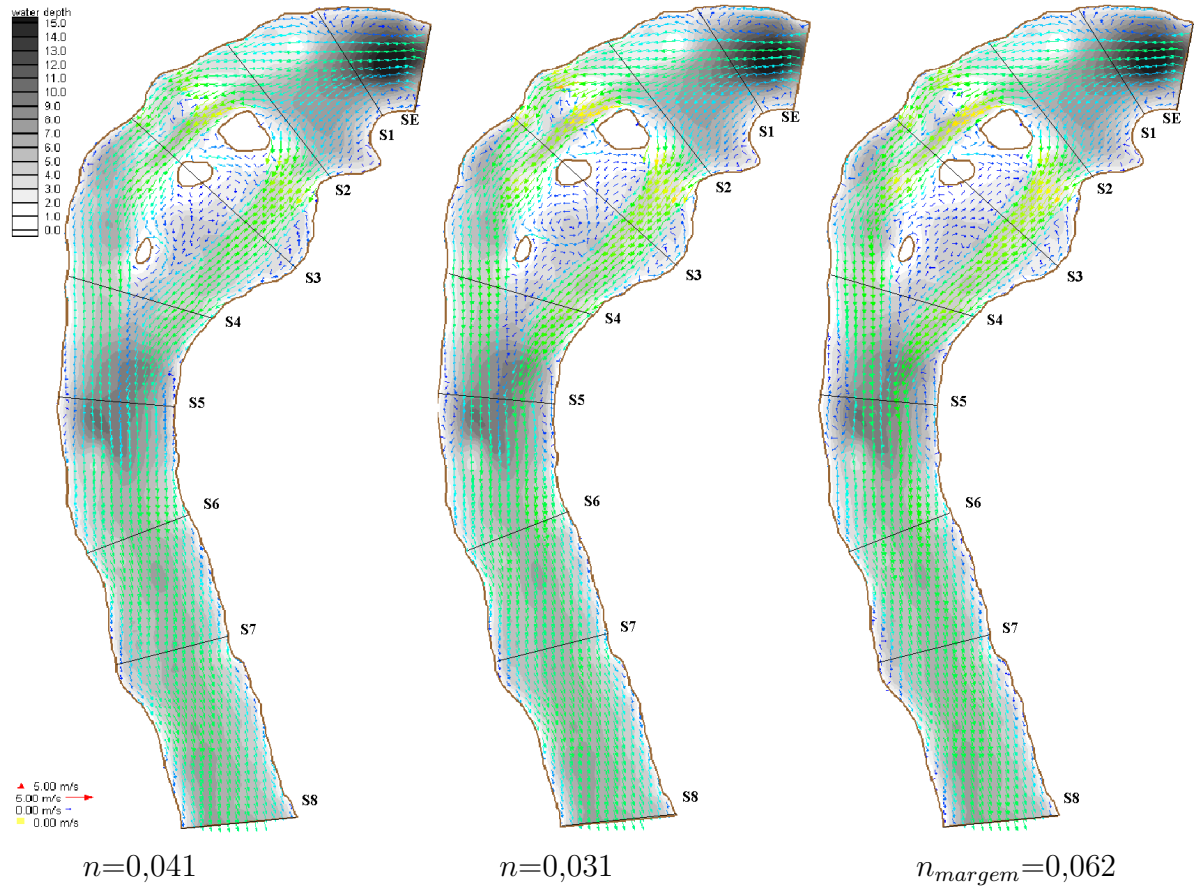


FIGURA 8.13 – CAMPO DE VELOCIDADES EM CADA SIMULAÇÃO – ENSAIO 2a – VARIAÇÃO DA RUGOSIDADE – $Re^{malha} = 20$

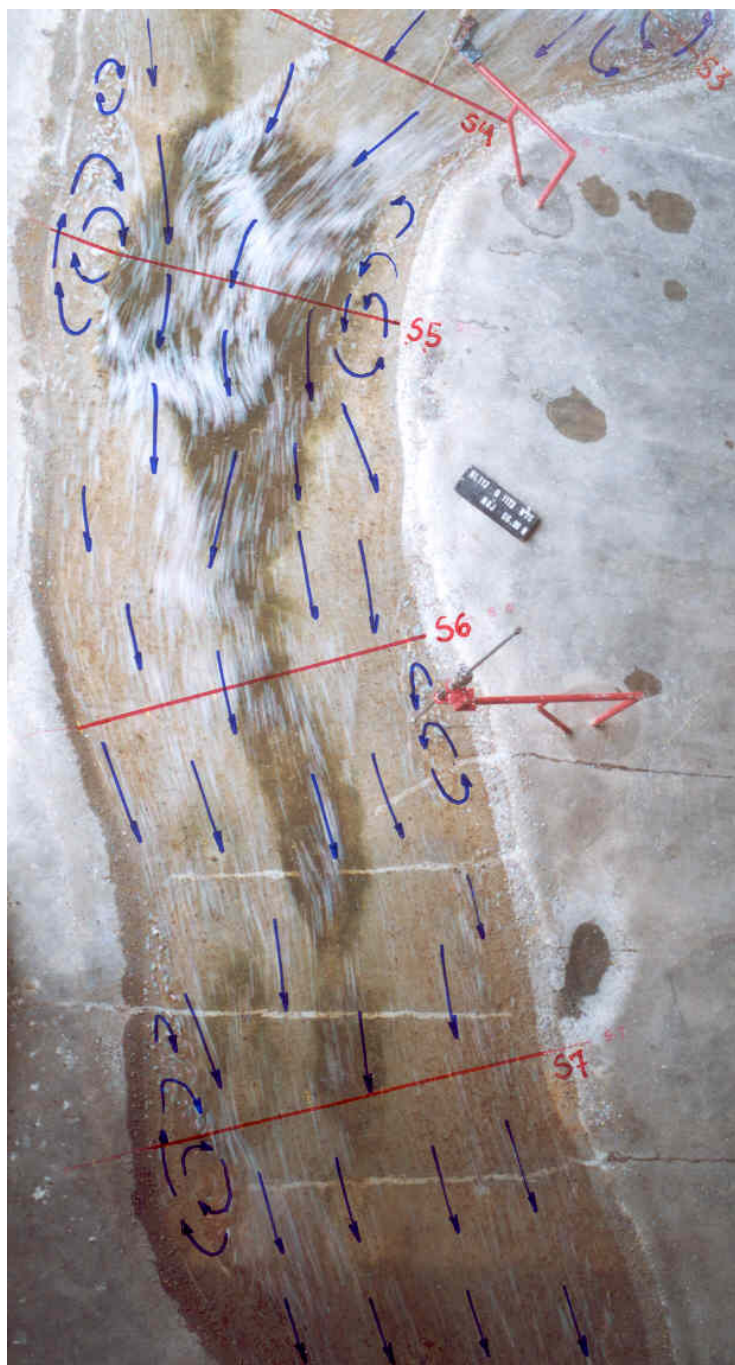


até divergir completamente, verificou-se tratar de uma região muito rasa. Com menores valores do coeficiente “n” de Manning, a profundidade tornava-se ainda menor e a velocidade aumentava excessivamente fazendo o programa divergir. Uma tentativa de obter convergência foi realizada rebaixando-se ligeiramente a elevação dos nós na região rasa. O modelo passou a oscilar em torno da solução, também sem convergir.

Essas observações apontaram para o fato de que o modelo RMA2 não é capaz de simular um escoamento torrencial. Utilizando-se os resultados da simulação com $n = 0,031$ — limite mínimo da rugosidade para convergência da solução numérica — foi calculado, para cada nó, o valor do número de Froude local:

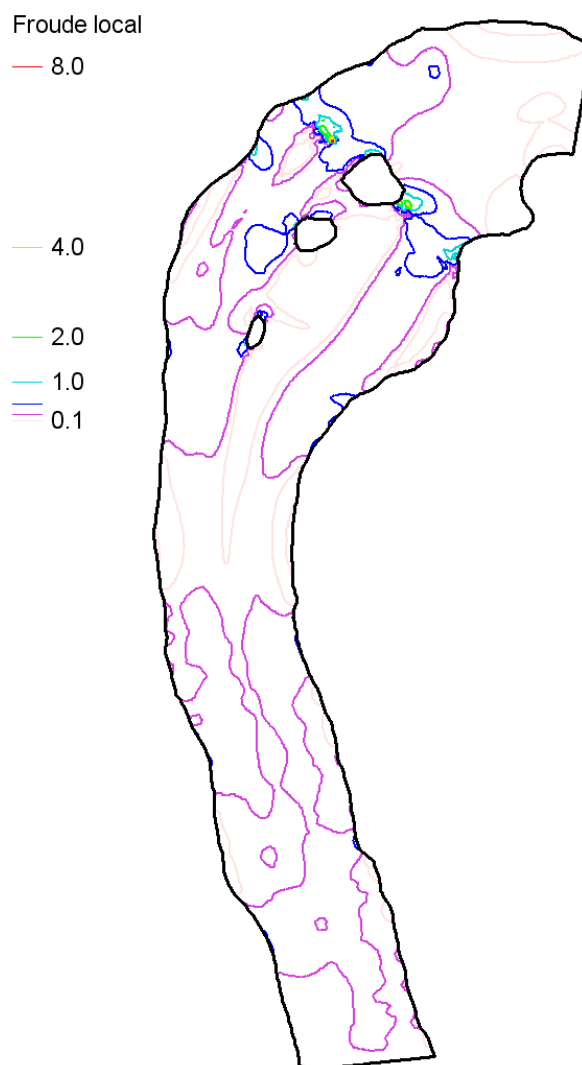
$$Fr_{local} = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{g h}}, \quad (8.1)$$

FIGURA 8.14 – CONFIGURAÇÃO DO ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO – ENSAIO 2a – TRECHO DE JUSANTE



onde U , V e h são valores no nó. O mapa com os valores de Fr resultantes é apresentado na figura 8.15. Percebe-se na figura que, em algumas regiões próximas da ilha de montante,

FIGURA 8.15 – NÚMERO DE FROUDE LOCAL NA SIMULAÇÃO DO ENSAIO 2a COM $n = 0,031$



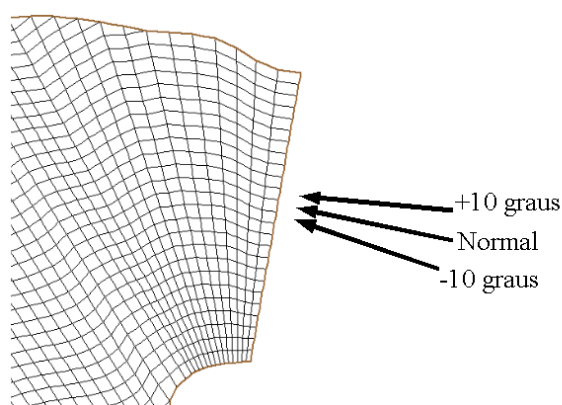
o número de Froude local ultrapassa a unidade, chegando próximo de oito em um ponto bastante raso entre a ilha e a margem direita. Como esses resultados são da simulação com $n = 0,031$, que convergiu, pode-se concluir que o modelo suporta condições de escoamento supercríticas locais, ou seja, o limite máximo para Fr_{local} é superior à unidade.

8.4 INFLUÊNCIA DA CONDIÇÃO DE CONTORNO NA ENTRADA

As primeiras experiências com o modelo computacional foram realizadas impondo-se a vazão de forma distribuída ao longo da seção de entrada SE. A distribuição entre os nós da seção foi feita de forma ponderada pela profundidade no nó. A vazão foi inicialmente imposta de tal forma que os vetores velocidade estivessem perpendiculares à seção de entrada.

Para verificar a influência da condição de contorno na entrada do modelo, foram realizadas três simulações variando-se o ângulo de entrada das vazões⁸ em 10 graus, como indicado na figura 8.16.

FIGURA 8.16 – VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE IMPOSIÇÃO DAS VELOCIDADES NA SEÇÃO DE ENTRADA



No ensaio 2a, as ilhas entre as seções S2 e S4 forçam o escoamento para os canais entre elas. Para esta análise foram adotadas as condições de contorno do ensaio 4a do modelo físico. Nessa condição hidráulica, a vazão e os níveis de água são maiores que no caso 2a e as ilhas estão afogadas. Espera-se, por isso, que o efeito da topografia sobre o escoamento seja menos marcante e a influência da condição de contorno possa propagar-se por uma distância maior, indicando assim o limite da influência da condição de contorno.

⁸Embora a condição de contorno de montante seja especificada em termos de vazão, o modelo RMA2 converte essa vazão para velocidade nos nós, em função da profundidade calculada em cada nó.

As simulações foram realizadas com número de Reynolds da malha $Re^{malha} = 20$ e com rugosidade $n = 0,033$, constantes para todo o domínio⁹.

Os gráficos comparativos das velocidades são apresentados na figura 8.17. Percebe-se que mesmo a pequena variação de 10 graus imposta ao ângulo das velocidades na entrada afeta de forma significativa as velocidades até a seção S5, ou seja, mais da metade do domínio modelado. Como esperado, a influência diminui de montante para jusante, em virtude do aumento da distância para o contorno.

A influência da condição de contorno é menos expressiva nos níveis de água. Pequenas diferenças são percebidas da seção SE até a seção S4, como mostrado na figura 8.18.

O grau de influência constatado nesta análise confirmou a necessidade das medições de velocidades — direção e magnitude — no modelo físico na posição da seção SE, para permitir uma imposição correta da condição de contorno de montante no modelo computacional. Essas medições foram utilizadas nas simulações do capítulo 9. Outra abordagem possível, normalmente utilizada quando não são conhecidas com precisão as condições de contorno, seria afastar, da região de interesse, o contorno do modelo computacional, de modo que sua influência sobre essa região fosse mínima¹⁰.

8.5 INFLUÊNCIA DO EFEITO DAS CORRENTES SECUNDÁRIAS

Como apresentado no capítulo 4, o RMA2, por ser um modelo bidimensional, não é capaz de reproduzir as correntes secundárias existentes na curva do rio Jacuí. Entretanto, ele é capaz de incluir em seus cálculos o efeito dessas correntes sobre as profundidades e as velocidades horizontais U e V , através de uma equação de transporte da vorticidade no plano vertical normal à direção do escoamento.

⁹Foram adotados, para Re^{malha} e para n , valores intermediários da faixa apresentada no estudo de sensibilidade desses parâmetros; são valores que facilitam a convergência da solução numérica.

¹⁰Pela facilidade de se elaborar o modelo computacional, é provável que seja mais econômico afastar os contornos do modelo computacional do que fazer, em campo, medições detalhadas das condições de contorno para aplicação no modelo computacional.

FIGURA 8.17 – VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – VARIAÇÃO DA DIREÇÃO DAS VELOCIDADES DA CONDIÇÃO DE CONTO RNO DE MONTANTE – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$

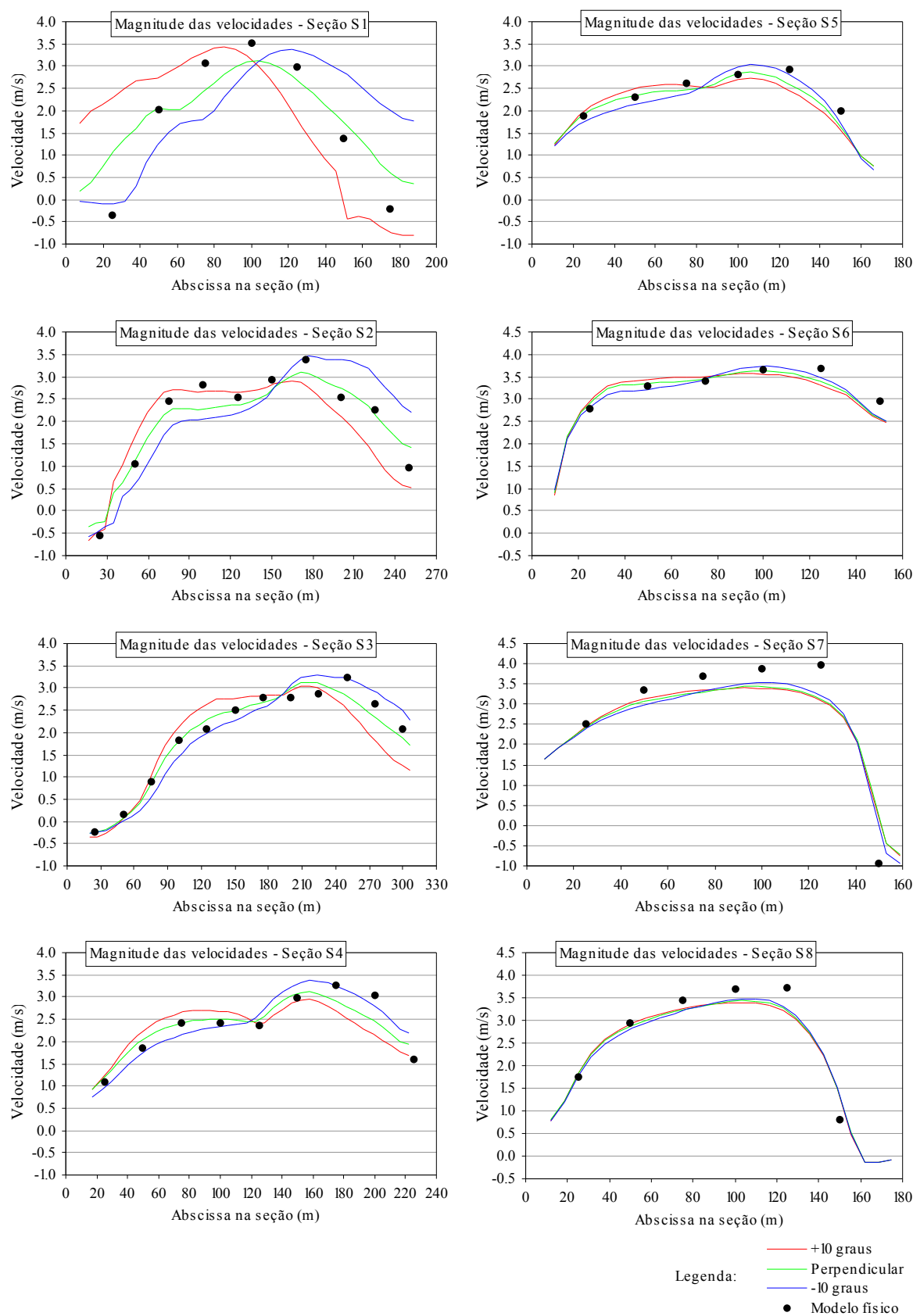
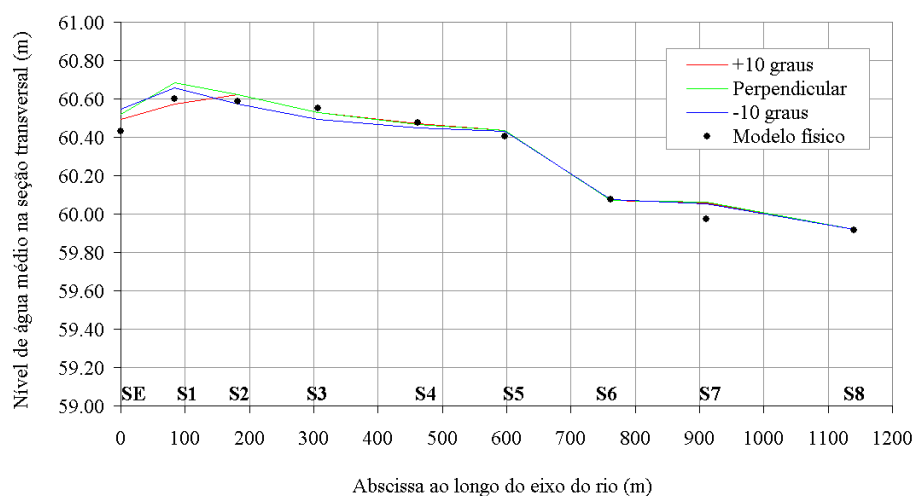


FIGURA 8.18 – NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – VARIAÇÃO DA DIREÇÃO DAS VELOCIDADES DA CONDIÇÃO DE CONTOURO DE MONTANTE – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$



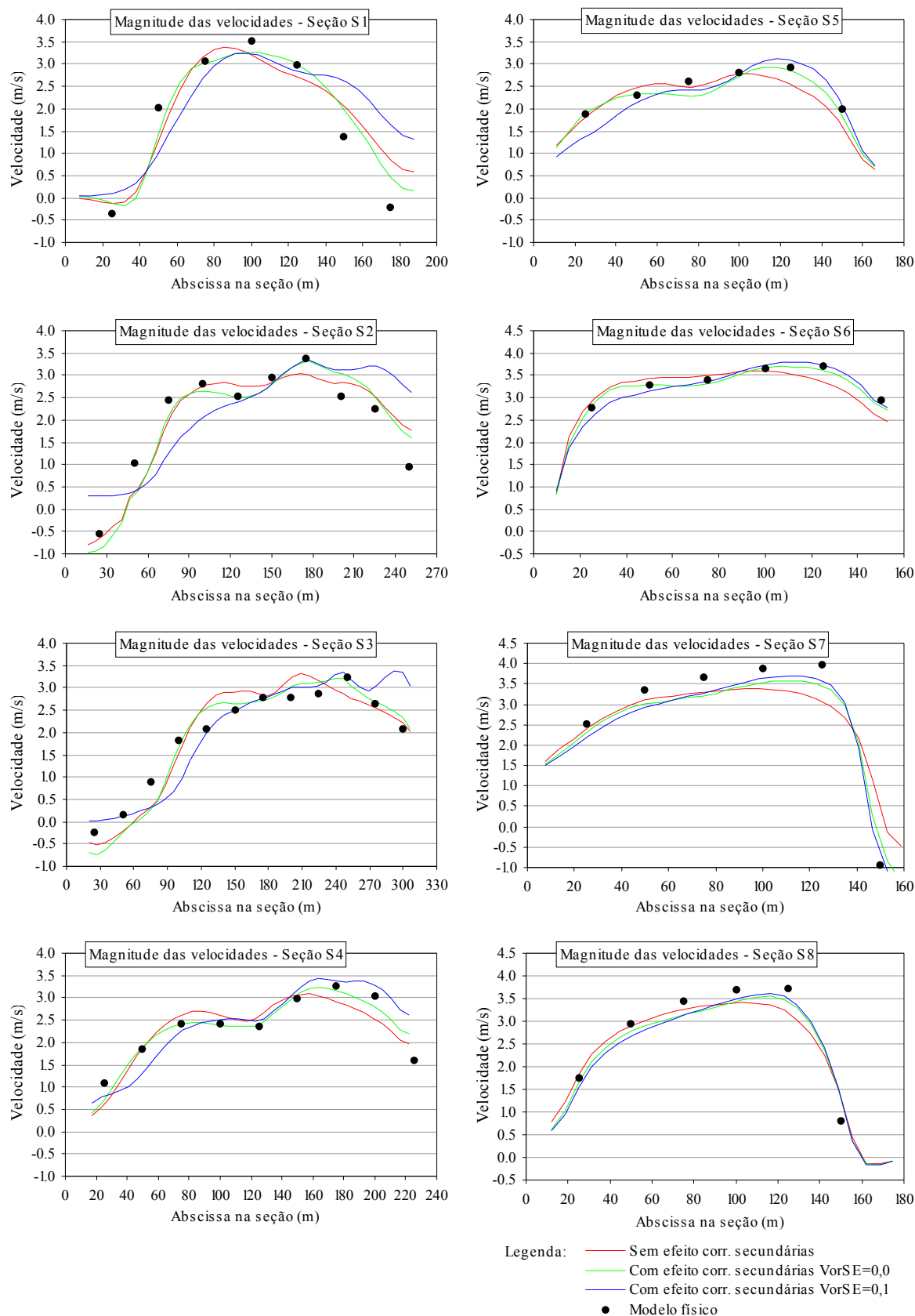
As correntes secundárias estão presentes no modelo físico e as medições nele devem indicar sua existência.

Para verificar os efeitos das correntes secundárias, três simulações foram realizadas utilizando-se os dados do ensaio 4a. Na primeira, não foi incluído o efeito das correntes secundárias; na segunda, foi incluído¹¹ e considerada a vorticidade igual a zero na seção de entrada SE; na terceira, foi incluído e considerada a vorticidade na seção SE igual a $0,1 \text{ s}^{-1}$. A vorticidade na seção de entrada SE não é conhecida, a princípio, mas essa seção está posicionada logo no começo da curva do rio Jacuí, de modo que ela pode apresentar algumas correntes secundárias e por isso ter vorticidade não nula.

Os gráficos de velocidades são mostrados na figura 8.19. Observando-se os gráficos, torna-se clara a influência das correntes secundárias: na simulação indicada pelas linhas verdes, que inclui o efeito das correntes, as velocidades mais altas são atraídas para o lado externo da curva, deslocando-se exatamente na direção dos pontos medidos no modelo físico. Na terceira simulação, indicada em linha azul, a atribuição de vorticidade não-nula na seção de entrada amplia os efeitos observados na simulação representada

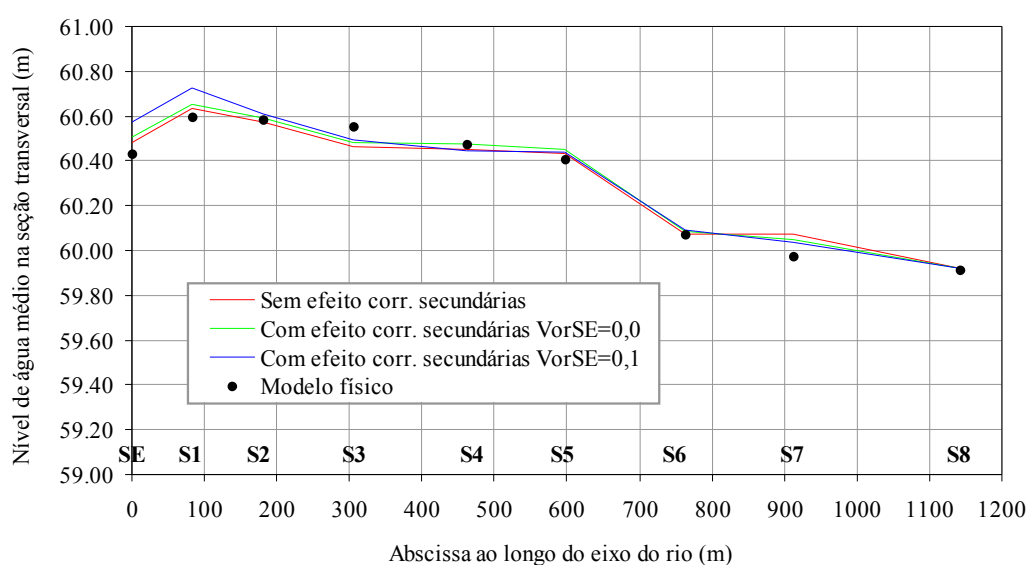
¹¹O cálculo da vorticidade é incluído através da inserção de uma linha de comando no arquivo de entrada de dados da simulação. O valor da vorticidade na entrada passa a ser uma condição de contorno.

FIGURA 8.19 – VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 4a – VARIAÇÃO DOS EFEITOS DAS CORRENTES SECUNDÁRIAS – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$



em cor verde, diminuindo a concordância entre os resultados do RMA2 e os do modelo físico. Conclui-se, por isso, que os efeitos das correntes secundárias precisam ser incluídos no modelo computacional e que a vorticidade na entrada do modelo é aproximadamente nula.

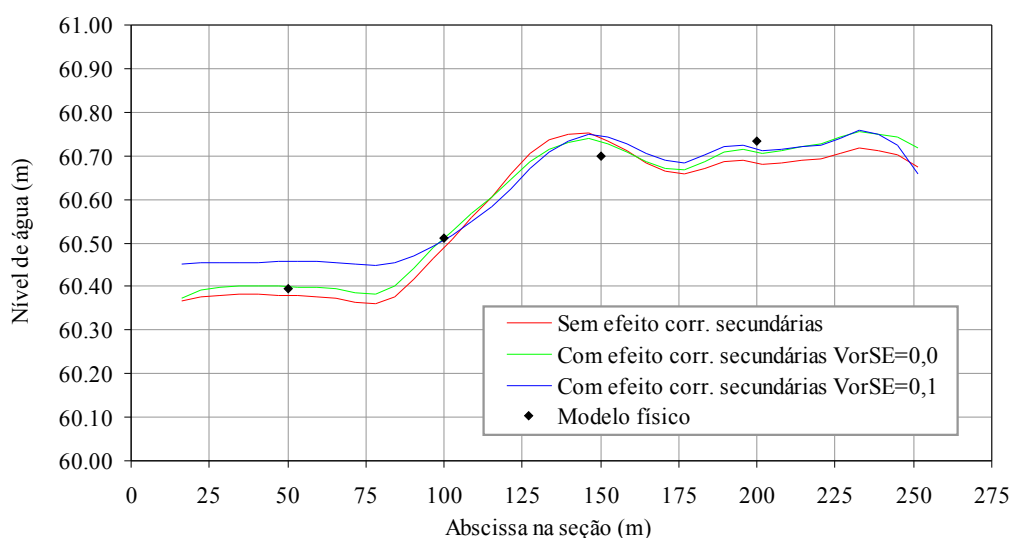
FIGURA 8.20 – NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 4a – VARIAÇÃO DOS EFEITOS DAS CORRENTES SECUNDÁRIAS – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$



As variações observadas nos níveis de água ao longo do modelo, entre uma simulação e outra, não foram grandes; as maiores diferenças ocorreram na simulação com a vorticidade igual a $0,1 \text{ s}^{-1}$ na seção de entrada, como pode ser visto na figura 8.20. Da mesma forma, as variações ao longo de uma mesma seção foram pouco significativas, como mostrado na figura 8.21. Novamente, a simulação incluindo o efeito das correntes e com vorticidade nula na entrada apresentou os melhores resultados.

Cabe mencionar que este trecho do rio Jacuí mostrou-se bem adequado para a análise deste efeito, por apresentar uma curvatura acentuada, com cerca de 90 graus e raio aproximado de 450 m no eixo do rio.

FIGURA 8.21 – NÍVEIS DE ÁGUA AO LONGO DA SEÇÃO S2 – ENSAIO 4a – VARIAÇÃO DOS EFEITOS DAS CORRENTES SECUNDÁRIAS – MANNING $n = 0,033$ E $Re^{malha} = 20$



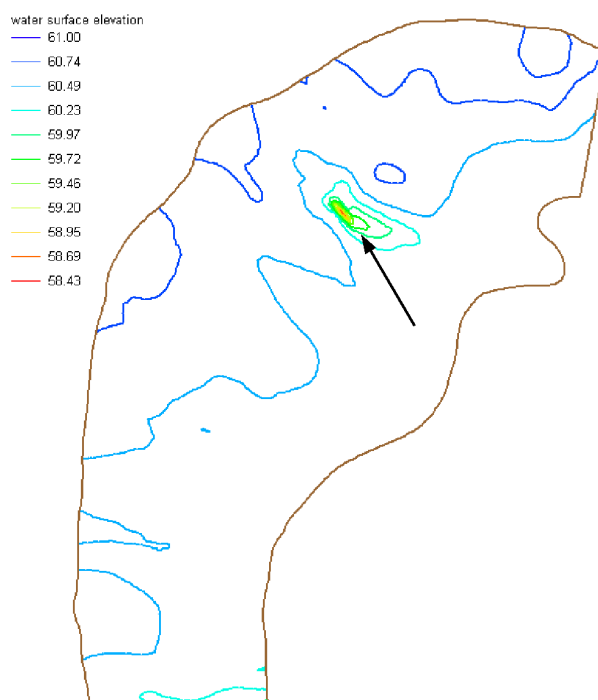
8.5.0.1 Artíficos para obter a convergência da solução

Nas simulações com inclusão das correntes secundárias foram enfrentados, novamente, problemas de convergência da solução. Na região onde, nas vazões menores, a ilha de montante emerge, foram observadas profundidades pequenas e velocidades altas nas primeiras simulações, que não convergiram com o número de Reynolds da malha desejado, $Re^{malha} = 20$. Na figura 8.22, a região onde a divergência teve início é apontada, juntamente com as isolinhas de níveis de água obtidas numa simulação com número de Péclet mais baixo. Em algumas simulações o modelo oscilou em torno da solução¹².

Para que fosse possível a simulação com $Re^{malha} = 20$ e com o efeito da vorticidade acionado, foi reduzida a elevação do fundo de 9 nós dessa região, com alterações entre 0,10 m e 0,70 m. Dessa forma foi reduzido o número de Froude local e o modelo passou a convergir, sacrificando-se a precisão da solução nessa região.

¹²As correções entre duas iterações sucessivas tinham mesma magnitude e sinais opostos.

FIGURA 8.22 – ISOLINHAS DE NÍVEIS DE ÁGUA – REGIÃO DE DIVERGÊNCIA DA SIMULAÇÃO DO ENSAIO 4a



9 CALIBRAGEM E VALIDAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL COM BASE NAS MEDIÇÕES NO MODELO FÍSICO

Neste capítulo é apresentado o trabalho de ajuste dos coeficientes aplicados no modelo computacional para aproximar os resultados do modelo computacional dos resultados do modelo físico. Os coeficientes obtidos na calibragem foram utilizados nas simulações computacionais dos diversos casos ensaiados no modelo físico.

9.1 CALIBRAGEM DO MODELO COMPUTACIONAL

No capítulo 8, foi analisada a influência de diversos itens sobre os resultados do modelo computacional. Como todos eles demonstraram influir significativamente nos resultados, a calibragem do modelo envolveu a determinação dos seguintes parâmetros:

- a) condição de contorno na seção de entrada;
- b) número de Reynolds da malha;
- c) rugosidade do leito e das margens.

O efeito das correntes secundárias não apresenta parâmetros de calibragem, pois as constantes da formulação do transporte de vorticidade são praticamente invariáveis, como apresentado na seção 4.5. A vorticidade na seção de entrada foi considerada nula em todas as simulações.

Em todas as simulações foi adotado um critério de convergência de 2 cm. Isso significa que a solução é considerada atingida quando, de uma iteração para outra, a maior correção necessária no nível de água, considerando-se todos os nós da malha, é inferior a 2 cm. Para determinar este valor algumas simulações foram feitas com valores maiores e menores do que 2 cm. Constatou-se que a adoção de um valor menor não conduz a um ganho significativo de precisão, mas, por outro lado, pode aumentar consideravelmente o tempo de processamento.

Muitos problemas de convergência foram enfrentados para realizar simulações com os parâmetros desejados, impedindo a abordagem sistemática inicialmente imaginada para o trabalho de calibragem. Aqui foram reunidos os resultados mais significativos; cada parâmetro é variado mantendo-se os outros fixos em seus valores finais obtidos na calibragem.

9.1.1 Condição de Contorno na Seção de Entrada

No estudo de sensibilidade do modelo à condição de vazão na entrada, verificou-se que, se esta condição não fosse atribuída da forma adequada, os resultados do modelo computacional poderiam estar comprometidos até a seção S5, aproximadamente.

Para garantir a confiabilidade dos resultados no trecho inicial do modelo RMA2, foi realizada no modelo físico uma medição detalhada das velocidades na seção de entrada SE. Foram medidas, em cada ensaio, a magnitude e a direção das velocidades em pontos espaçados de 6 metros, ao longo de toda a seção. Essas medições foram utilizadas para atribuir as condições de contorno da seção de entrada do modelo computacional. Cada nó da seção recebeu uma velocidade com direção e magnitude, interpolada a partir das

medições no modelo físico. A vazão calculada com base nessas medições de velocidades resultou ligeiramente diferente da vazão imposta no modelo físico através do medidor de vazão. Para corrigir essa diferença, todas as magnitudes foram multiplicadas por um coeficiente próximo da unidade, para forçar a vazão introduzida no modelo computacional, através das velocidades, a coincidir com a vazão imposta no ensaio em modelo físico.

9.1.2 Calibragem do Número de Reynolds da malha

Foram escolhidos os ensaios 2b e 4a para a calibragem do número de Reynolds da malha e feitas simulações com os seguintes números de Reynolds da malha: 10, 20 e 30. As figuras 9.1 e 9.2 apresentam as velocidades obtidas com cada número de Reynolds da malha para os casos 2b e 4a, respectivamente. Percebe-se, nas figuras, que a adoção do número de Reynolds da malha igual a 10 conduziu a perfis de velocidade mais uniformes do que os perfis medidos no modelo físico. O uso do número de Reynolds da malha igual a 20 fez os valores deslocarem-se na direção das medições do modelo físico, na maioria dos casos. Já com o número de Reynolds da malha igual a 30, os gradientes de velocidades tornaram-se exagerados, afastando-se bastante dos resultados do modelo físico, particularmente no ensaio 4a.

Uma comparação quantitativa entre as simulações foi feita através do cálculo das diferenças entre as velocidades obtidas no modelo físico e no modelo RMA2, normalizadas pela velocidade máxima em cada seção, conforme a expressão:

$$\frac{(V_{RMA} - V_{fisico})^2}{V_{max\ na\ secao}}. \quad (9.1)$$

Os valores calculados nos ensaios 2b e 4a são apresentados, respectivamente, nas tabelas 9.1 e 9.2. Através das médias gerais mostradas no final de cada tabela, conclui-se que as simulações com $Re^{malha} = 20$ são as que apresentam menor desvio em relação aos resultados do modelo físico.

FIGURA 9.1 – VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 2b – $Re^{malha} = 10, 20 \text{ e } 30$

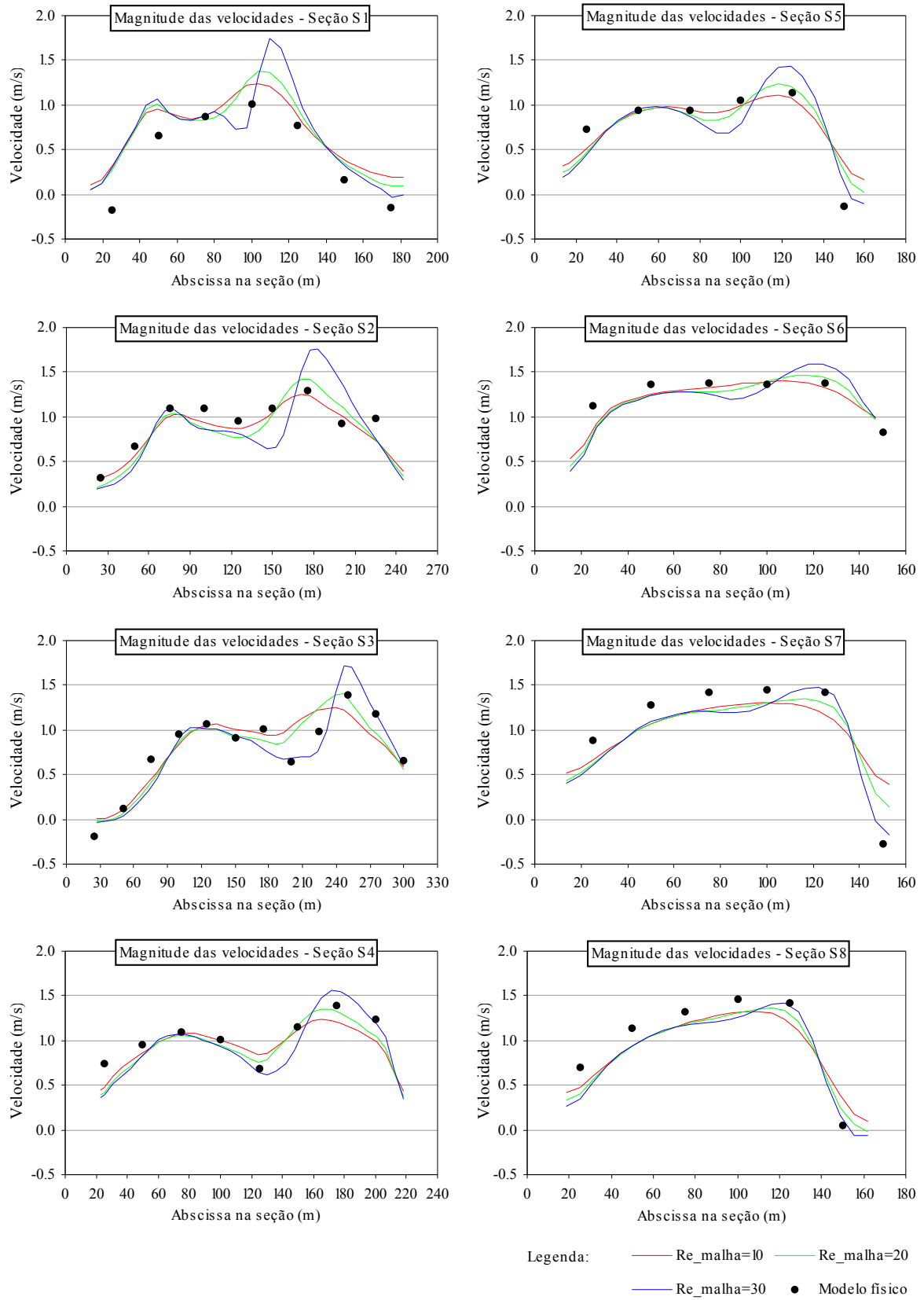


FIGURA 9.2 – VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 4a – $Re^{malha} = 10, 20 \text{ e } 30$

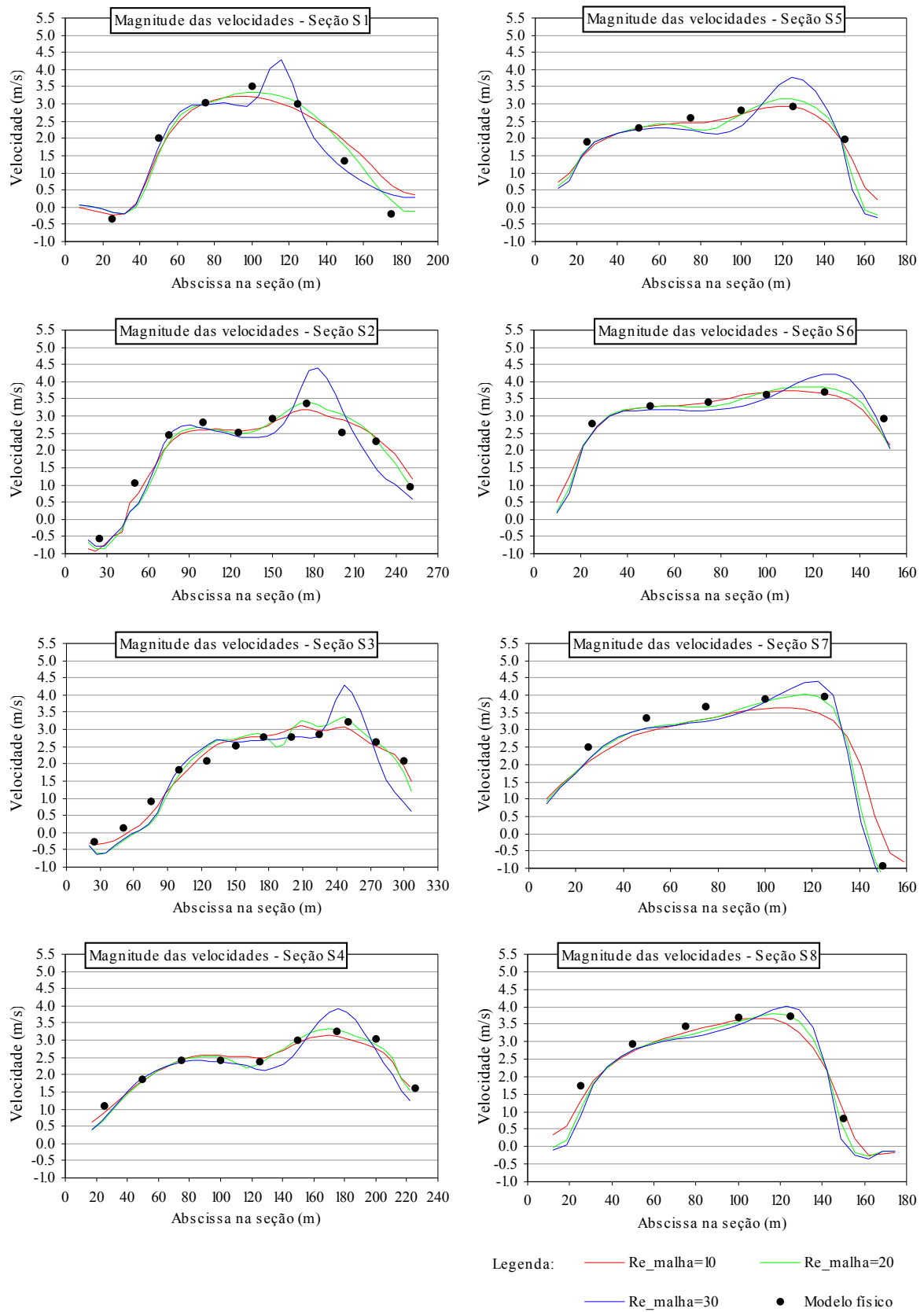


TABELA 9.1 – DIFERENÇAS NORMALIZADAS ENTRE AS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 – ENSAIO 2b – $Re^{malha} = 10, 20 \text{ e } 30$

Abscissa			Velocidades obtidas (m/s)			Diferenças Normalizadas			
			Modelo Físico	Modelo RMA2			(v _{RMA2} - v _{físico}) ² / v _{max}		
				Re ^{malha} ₌₁₀	Re ^{malha} ₌₂₀	Re ^{malha} ₌₃₀	Re ^{malha} ₌₁₀	Re ^{malha} ₌₂₀	Re ^{malha} ₌₃₀
Seção 1	25	-0,17	0,31	0,27	0,30	0,228	0,193	0,215	
	50	0,66	0,95	1,01	1,06	0,085	0,120	0,155	
	75	0,87	0,88	0,84	0,89	0,000	0,001	0,000	
	100	1,02	1,23	1,30	0,96	0,044	0,082	0,003	
	125	0,77	0,88	0,96	1,12	0,012	0,038	0,123	
	150	0,16	0,39	0,35	0,33	0,051	0,035	0,027	
	175	-0,14	0,20	0,10	-0,02	0,117	0,057	0,016	
v _{max} =		1,02	Médias =			0,077	0,075	0,077	
Seção 2	25	0,33	0,31	0,20	0,20	0,000	0,012	0,012	
	50	0,68	0,57	0,51	0,46	0,009	0,021	0,036	
	75	1,10	1,01	1,03	1,07	0,007	0,004	0,000	
	100	1,10	0,93	0,87	0,87	0,022	0,041	0,043	
	125	0,95	0,87	0,77	0,80	0,005	0,025	0,017	
	150	1,09	1,06	1,04	0,65	0,001	0,002	0,147	
	175	1,30	1,25	1,42	1,67	0,002	0,011	0,108	
	200	0,93	1,01	1,11	1,38	0,005	0,026	0,155	
	225	0,98	0,73	0,73	0,75	0,048	0,047	0,042	
	v _{max} =		1,30	Médias =			0,011	0,021	0,062
Seção 3	25	-0,19	0,01	-0,03	-0,03	0,026	0,019	0,017	
	50	0,12	0,11	0,06	0,04	0,000	0,002	0,005	
	75	0,68	0,45	0,41	0,36	0,036	0,050	0,072	
	100	0,96	0,84	0,86	0,90	0,009	0,007	0,002	
	125	1,06	1,05	1,02	1,02	0,000	0,002	0,002	
	150	0,91	1,01	0,93	0,93	0,007	0,000	0,000	
	175	1,01	0,95	0,89	0,79	0,003	0,012	0,035	
	200	0,65	1,04	0,94	0,68	0,111	0,059	0,001	
	225	0,98	1,22	1,25	0,80	0,042	0,053	0,024	
	250	1,39	1,20	1,35	1,71	0,028	0,001	0,071	
	275	1,17	0,90	0,96	1,18	0,054	0,032	0,000	
	300	0,66	0,59	0,56	0,60	0,003	0,007	0,003	
v _{max} =		1,39	Médias =			0,027	0,020	0,019	
Seção 4	25	0,74	0,47	0,42	0,39	0,053	0,075	0,090	
	50	0,96	0,86	0,83	0,83	0,006	0,011	0,012	
	75	1,10	1,07	1,06	1,07	0,000	0,001	0,001	
	100	1,01	1,00	0,94	0,94	0,000	0,004	0,004	
	125	0,69	0,84	0,76	0,64	0,017	0,004	0,002	
	150	1,16	1,12	1,17	0,98	0,001	0,000	0,022	
	175	1,40	1,21	1,33	1,56	0,026	0,004	0,018	
	200	1,24	0,98	1,05	1,20	0,046	0,026	0,001	
v _{max} =		1,40	Médias =			0,019	0,016	0,019	
Seção 5	25	0,73	0,51	0,46	0,44	0,045	0,064	0,077	
	50	0,94	0,92	0,92	0,94	0,000	0,000	0,000	
	75	0,94	0,95	0,89	0,88	0,000	0,002	0,003	
	100	1,05	0,99	0,98	0,80	0,003	0,004	0,056	
	125	1,14	1,06	1,19	1,41	0,005	0,003	0,067	
	150	-0,13	0,36	0,27	0,14	0,207	0,139	0,064	
	v _{max} =		1,14	Médias =			0,043	0,036	0,045
Seção 6	25	1,12	0,84	0,81	0,78	0,054	0,069	0,083	
	50	1,36	1,25	1,24	1,24	0,009	0,011	0,012	
	75	1,38	1,32	1,28	1,25	0,002	0,007	0,012	
	100	1,37	1,39	1,39	1,33	0,000	0,000	0,001	
	125	1,38	1,33	1,44	1,58	0,002	0,002	0,028	
	150	0,83	0,96	0,91	0,88	0,012	0,005	0,002	
	v _{max} =		1,38	Médias =			0,013	0,016	0,023
Seção 7	25	0,89	0,66	0,61	0,59	0,036	0,053	0,061	
	50	1,27	1,07	1,07	1,09	0,028	0,027	0,023	
	75	1,42	1,24	1,21	1,20	0,022	0,029	0,031	
	100	1,45	1,30	1,30	1,29	0,015	0,015	0,019	
	125	1,42	1,17	1,29	1,45	0,042	0,011	0,001	
	150	-0,28	0,44	0,21	-0,10	0,356	0,164	0,022	
	v _{max} =		1,45	Médias =			0,083	0,050	0,026
Seção 8	25	0,70	0,48	0,40	0,35	0,035	0,062	0,084	
	50	1,14	0,94	0,94	0,94	0,028	0,028	0,027	
	75	1,32	1,19	1,18	1,17	0,013	0,015	0,016	
	100	1,46	1,31	1,31	1,26	0,015	0,017	0,028	
	125	1,43	1,19	1,29	1,39	0,038	0,013	0,001	
	150	0,04	0,35	0,22	0,12	0,062	0,021	0,004	
	v _{max} =		1,46	Médias =			0,032	0,026	0,027
					Re ^{malha} ₌₁₀	Re ^{malha} ₌₂₀	Re ^{malha} ₌₃₀		
Médias gerais =					0,038	0,032	0,037		

TABELA 9.2 – DIFERENÇAS NORMALIZADAS ENTRE AS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 – ENSAIO 4a – $Re^{malha} = 10, 20 \text{ e } 30$

Abscissa			Velocidades obtidas (m/s)			Diferenças Normalizadas			
			Modelo	Modelo RMA2			$(v_{RMA2} - v_{físico})^2 / v_{max}$		
			Físico	Re ^{malha} =10	Re ^{malha} =20	Re ^{malha} =30	Re ^{malha} =10	Re ^{malha} =20	Re ^{malha} =30
Seção 1	25	-0,34	-0,23	-0,14	-0,15	0,003	0,011	0,010	
	50	2,01	1,55	1,49	1,70	0,061	0,079	0,027	
	75	3,05	3,01	3,02	2,98	0,001	0,000	0,002	
	100	3,53	3,22	3,35	3,02	0,027	0,009	0,072	
	125	2,99	2,81	3,01	3,09	0,009	0,000	0,003	
	150	1,37	1,92	1,77	1,10	0,086	0,047	0,021	
	175	-0,20	0,64	0,22	0,37	0,203	0,051	0,094	
	v _{max} =		3,53				Médias =	0,056	0,028
Seção 2	25	-0,56	-0,84	-0,86	-0,78	0,023	0,027	0,015	
	50	1,04	0,61	0,30	0,33	0,054	0,160	0,148	
	75	2,45	2,15	2,18	2,38	0,026	0,022	0,002	
	100	2,81	2,60	2,65	2,66	0,013	0,008	0,007	
	125	2,53	2,58	2,51	2,41	0,001	0,000	0,005	
	150	2,94	2,79	2,84	2,49	0,007	0,003	0,061	
	175	3,38	3,19	3,39	4,18	0,012	0,000	0,186	
	200	2,53	2,89	3,05	3,27	0,037	0,078	0,160	
	225	2,26	2,38	2,34	1,51	0,004	0,002	0,168	
	250	0,96	1,23	0,94	0,64	0,021	0,000	0,031	
v _{max} =		3,38				Médias =	0,020	0,030	0,078
Seção 3	25	-0,25	-0,33	-0,52	-0,53	0,002	0,023	0,025	
	50	0,15	-0,09	-0,21	-0,18	0,019	0,042	0,034	
	75	0,90	0,55	0,31	0,34	0,039	0,108	0,099	
	100	1,82	1,57	1,68	1,84	0,019	0,006	0,000	
	125	2,08	2,38	2,51	2,56	0,028	0,059	0,072	
	150	2,52	2,70	2,73	2,63	0,010	0,014	0,004	
	175	2,77	2,80	2,82	2,69	0,000	0,001	0,002	
	200	2,79	3,04	2,96	2,77	0,019	0,009	0,000	
	225	2,87	2,96	3,09	2,84	0,003	0,015	0,000	
	250	3,23	3,02	3,28	4,19	0,014	0,001	0,285	
	275	2,64	2,53	2,63	2,26	0,004	0,000	0,044	
	300	2,09	1,95	1,75	0,89	0,006	0,036	0,444	
	v _{max} =		3,23				Médias =	0,014	0,026
Seção 4	25	1,08	0,92	0,71	0,73	0,009	0,043	0,039	
	50	1,86	1,82	1,82	1,88	0,001	0,001	0,000	
	75	2,42	2,43	2,42	2,38	0,000	0,000	0,001	
	100	2,42	2,55	2,51	2,36	0,005	0,002	0,001	
	125	2,37	2,49	2,32	2,14	0,004	0,001	0,017	
	150	3,00	2,93	3,02	2,74	0,001	0,000	0,020	
	175	3,28	3,10	3,29	3,90	0,009	0,000	0,119	
	200	3,04	2,74	2,86	2,69	0,027	0,009	0,036	
	225	1,61	1,52	1,37	1,12	0,003	0,019	0,074	
	v _{max} =		3,28				Médias =	0,007	0,008
Seção 5	25	1,89	1,61	1,66	1,66	0,027	0,018	0,018	
	50	2,32	2,29	2,31	2,25	0,000	0,000	0,002	
	75	2,61	2,44	2,28	2,23	0,010	0,037	0,051	
	100	2,80	2,70	2,72	2,35	0,004	0,002	0,069	
	125	2,93	2,92	3,14	3,76	0,000	0,015	0,238	
	150	1,99	1,77	1,62	1,45	0,017	0,046	0,101	
v _{max} =		2,93				Médias =	0,010	0,020	0,080
Seção 6	25	2,79	2,52	2,53	2,50	0,019	0,018	0,022	
	50	3,28	3,25	3,26	3,17	0,000	0,000	0,003	
	75	3,40	3,41	3,27	3,17	0,000	0,004	0,015	
	100	3,64	3,70	3,70	3,53	0,001	0,001	0,004	
	125	3,70	3,65	3,83	4,22	0,001	0,005	0,075	
	150	2,94	2,49	2,50	2,62	0,055	0,053	0,029	
v _{max} =		3,70				Médias =	0,013	0,014	0,024
Seção 7	25	2,52	2,05	2,13	2,14	0,054	0,039	0,036	
	50	3,35	2,96	3,06	3,04	0,039	0,021	0,025	
	75	3,68	3,32	3,31	3,24	0,033	0,034	0,048	
	100	3,88	3,62	3,82	3,81	0,017	0,001	0,001	
	125	3,98	3,41	3,84	4,25	0,081	0,004	0,018	
	150	-0,94	-0,05	-1,23	-1,42	0,199	0,021	0,057	
v _{max} =		3,98				Médias =	0,071	0,020	0,031
Seção 8	25	1,74	1,32	1,05	0,87	0,049	0,129	0,204	
	50	2,94	2,72	2,74	2,75	0,013	0,011	0,009	
	75	3,44	3,26	3,18	3,11	0,008	0,018	0,030	
	100	3,69	3,61	3,57	3,47	0,002	0,004	0,013	
	125	3,71	3,44	3,70	3,99	0,021	0,000	0,020	
	150	0,81	1,02	0,53	0,12	0,012	0,022	0,127	
v _{max} =		3,71				Médias =	0,018	0,031	0,067
						Re ^{malha} =10	Re ^{malha} =20	Re ^{malha} =30	
Médias gerais =						0,026	0,022	0,054	

As diferenças resultantes nos níveis de água médios nas seções, entre uma simulação e outra, foram pouco significativas no ensaio 4a e praticamente inexistentes no ensaio 2b.

9.1.3 Calibragem da Rugosidade do Leito e das Margens

Para a rugosidade do leito foi adotado, a princípio, um coeficiente n de Manning igual a 0,031, porque no estudo de sensibilidade (item 8.3) esse valor havia resultado em níveis de água semelhantes aos do modelo físico.

Optou-se também pelo uso de coeficientes de rugosidade maiores nos elementos junto às margens. Para definição desses coeficientes, foram realizadas simulações de alguns casos de escoamento, variando-se os valores de Manning para os elementos das margens. Variações significativas foram observadas nos gráficos de velocidades do ensaio 3a, apresentados na figura 9.3. Os parâmetros numéricos de comparação (quadrado das diferenças normalizado) encontram-se na tabela 9.3.

Em função dos resultados da figura 9.3, da tabela 9.3 e também do resultado de outras simulações, foi escolhido o valor $n = 0,065$ para a rugosidade dos elementos junto às margens.

O aumento do coeficiente de rugosidade das margens causou um aumento nos níveis de água ao longo do modelo, apresentado na figura 9.4. Para compensar esse aumento, a rugosidade do restante da malha precisou ser reduzida. Algumas simulações foram realizadas e constatou-se que a simulação com $n = 0,029$ para o restante da malha forneceu níveis de água semelhantes aos do modelo físico. Para se obter a convergência desta simulação, foi necessário um trabalho meticuloso para definir uma variação gradativa, entre uma iteração e outra, dos coeficientes de rugosidade e do número de Reynolds da malha até os valores desejados ($n = 0,029$ e $Re^{malha} = 20$).

FIGURA 9.3 – VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S1 A S8 – ENSAIO 3a – $n_{margem} = 0,040, 0,065$ E $0,090$

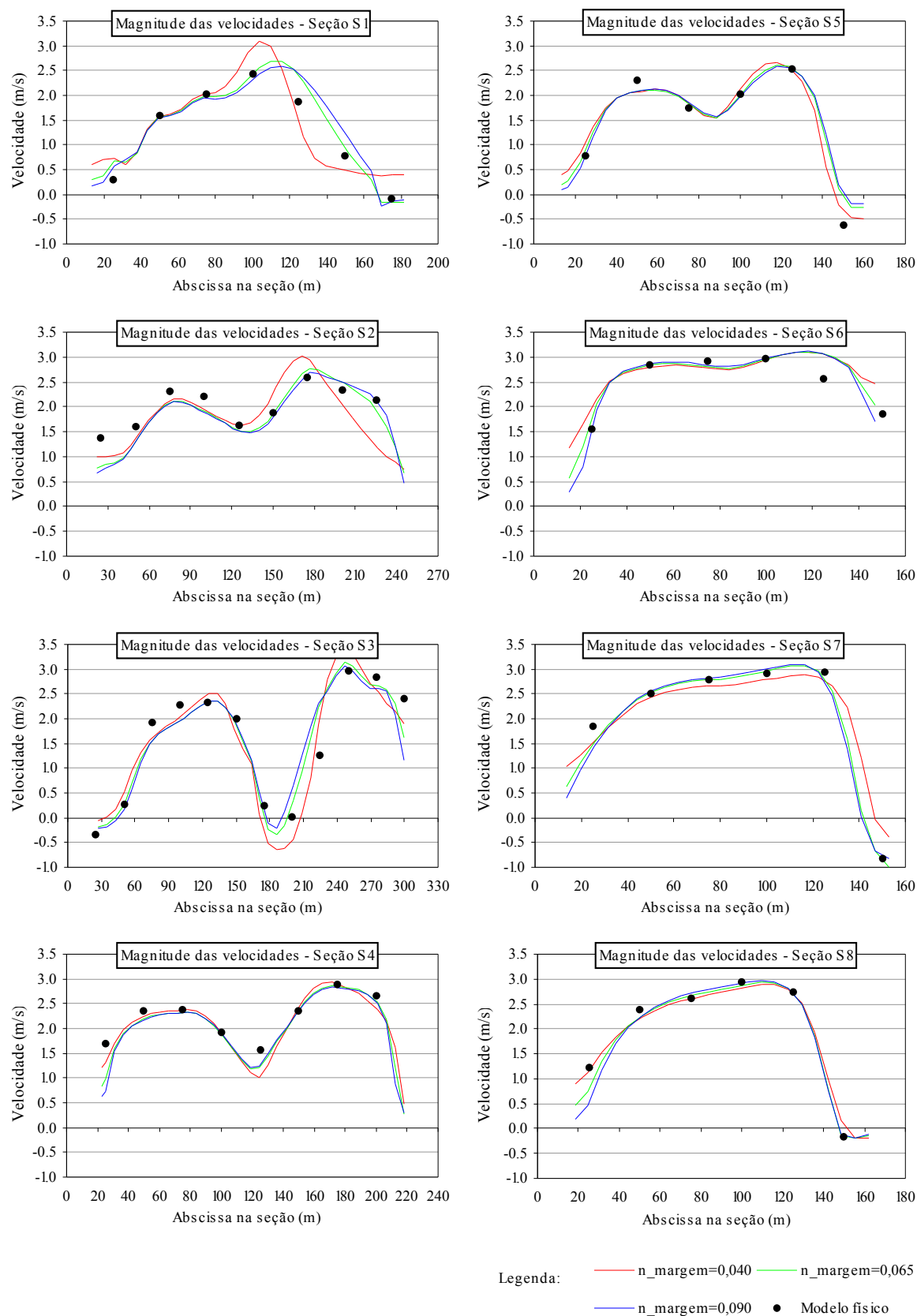
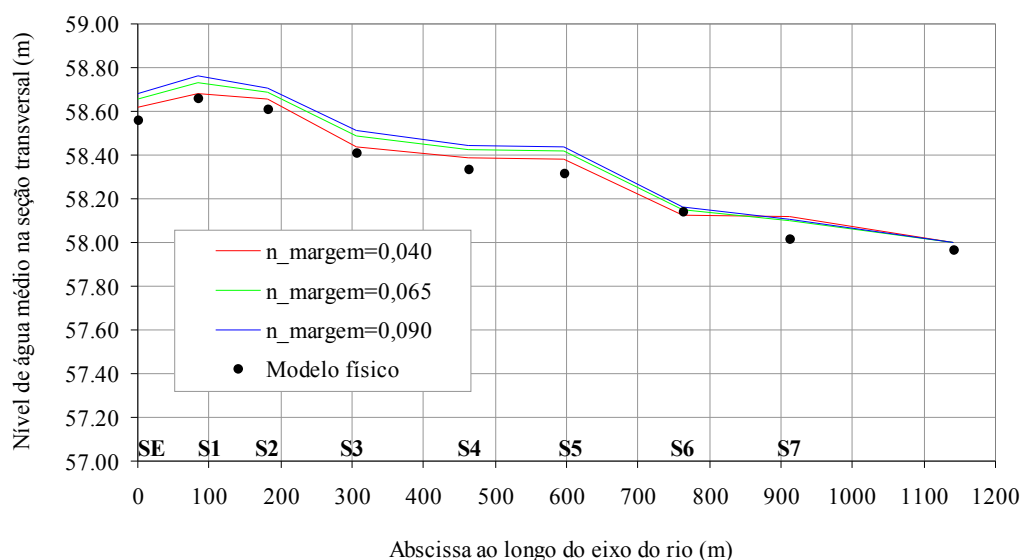


TABELA 9.3 – DIFERENÇAS NORMALIZADAS ENTRE AS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 – ENSAIO 3a – $n_{\text{margem}} = 0,040, 0,065 \text{ E } 0,090$

Abscissa		Velocidades obtidas (m/s)				Diferenças Normalizadas		
		Modelo Físico	Modelo RMA2			$(v_{RMA2} - v_{físico})^2 / v_{max}$		
			$n_{margem}=0,040$	$n_{margem}=0,065$	$n_{margem}=0,090$	$n_{margem}=0,040$	$n_{margem}=0,065$	$n_{margem}=0,090$
Seção 1	25	0,30	0,73	0,64	0,54	0,075	0,047	0,024
	50	1,60	1,57	1,56	1,56	0,000	0,001	0,001
	75	2,01	2,04	1,96	1,94	0,000	0,001	0,002
	100	2,43	2,94	2,42	2,31	0,110	0,000	0,006
	125	1,88	1,49	2,39	2,44	0,065	0,106	0,128
	150	0,77	0,49	0,93	1,23	0,033	0,011	0,088
	175	-0,09	0,39	-0,17	-0,15	0,096	0,002	0,001
	$v_{max} =$		2,43		Médias =		0,054	0,024
Seção 2	25	1,38	1,00	0,78	0,71	0,057	0,142	0,174
	50	1,60	1,36	1,29	1,29	0,023	0,038	0,037
	75	2,31	2,12	2,07	2,06	0,014	0,022	0,024
	100	2,21	1,95	1,91	1,90	0,025	0,035	0,038
	125	1,63	1,63	1,54	1,52	0,000	0,004	0,005
	150	1,87	2,27	1,85	1,79	0,062	0,000	0,003
	175	2,60	2,97	2,73	2,64	0,052	0,007	0,001
	200	2,34	2,06	2,50	2,51	0,031	0,010	0,011
	225	2,13	1,22	1,94	2,12	0,319	0,013	0,000
	$v_{max} =$		2,60		Médias =		0,065	0,030
Seção 3	25	-0,35	-0,05	-0,18	-0,22	0,031	0,010	0,005
	50	0,27	0,52	0,28	0,18	0,020	0,000	0,003
	75	1,93	1,61	1,55	1,56	0,035	0,050	0,048
	100	2,27	2,04	1,96	1,96	0,018	0,032	0,031
	125	2,32	2,49	2,35	2,34	0,009	0,000	0,000
	150	2,00	1,70	1,86	1,91	0,029	0,006	0,003
	175	0,25	-0,24	0,06	0,18	0,083	0,012	0,002
	200	0,03	-0,47	0,28	0,57	0,084	0,021	0,098
	225	1,27	2,02	2,28	2,34	0,187	0,342	0,384
	250	2,97	3,38	3,10	3,03	0,056	0,006	0,001
	275	2,84	2,57	2,67	2,62	0,025	0,010	0,016
	300	2,40	1,90	1,61	1,16	0,084	0,213	0,520
	$v_{max} =$		2,97		Médias =		0,055	0,059
Seção 4	25	1,68	1,31	0,98	0,74	0,049	0,172	0,309
	50	2,35	2,25	2,19	2,18	0,004	0,009	0,010
	75	2,39	2,37	2,32	2,32	0,000	0,002	0,002
	100	1,94	1,92	1,89	1,91	0,000	0,001	0,000
	125	1,56	1,03	1,23	1,27	0,097	0,039	0,030
	150	2,35	2,43	2,37	2,35	0,002	0,000	0,000
	175	2,89	2,90	2,85	2,82	0,000	0,000	0,001
	200	2,67	2,41	2,55	2,54	0,022	0,005	0,006
	$v_{max} =$		2,89		Médias =		0,022	0,029
Seção 5	25	0,77	1,04	0,88	0,77	0,027	0,005	0,000
	50	2,32	2,07	2,07	2,08	0,025	0,023	0,021
	75	1,76	1,84	1,83	1,85	0,003	0,002	0,004
	100	2,02	2,13	2,01	1,98	0,004	0,000	0,001
	125	2,52	2,51	2,54	2,53	0,000	0,000	0,000
	150	-0,62	-0,30	-0,01	0,06	0,040	0,147	0,183
	$v_{max} =$		2,52		Médias =		0,017	0,030
Seção 6	25	1,56	2,00	1,78	1,56	0,064	0,016	0,000
	50	2,85	2,80	2,84	2,86	0,001	0,000	0,000
	75	2,91	2,77	2,80	2,84	0,006	0,004	0,002
	100	2,98	2,95	2,95	2,97	0,000	0,000	0,000
	125	2,57	3,05	3,06	3,06	0,076	0,078	0,080
	150	1,86	2,39	1,84	1,39	0,095	0,000	0,076
	$v_{max} =$		2,98		Médias =		0,040	0,016
Seção 7	25	1,85	1,51	1,46	1,38	0,040	0,052	0,076
	50	2,52	2,44	2,55	2,57	0,002	0,000	0,001
	75	2,80	2,65	2,78	2,82	0,007	0,000	0,000
	100	2,92	2,79	2,97	3,00	0,006	0,001	0,002
	125	2,93	2,77	2,80	2,76	0,009	0,006	0,010
	150	-0,83	-0,22	-0,84	-0,75	0,126	0,000	0,002
	$v_{max} =$		2,93		Médias =		0,032	0,010
Seção 8	25	1,22	1,13	0,75	0,46	0,003	0,076	0,194
	50	2,38	2,21	2,23	2,23	0,010	0,008	0,008
	75	2,61	2,61	2,67	2,71	0,000	0,001	0,003
	100	2,93	2,82	2,88	2,92	0,005	0,001	0,000
	125	2,75	2,70	2,69	2,70	0,001	0,001	0,001
	150	-0,17	0,10	-0,14	-0,13	0,024	0,000	0,000
	$v_{max} =$		2,93		Médias =		0,007	0,015
					$n_{margem}=0,040$	$n_{margem}=0,065$	$n_{margem}=0,090$	
Médias gerais =					0,036	0,026	0,040	

FIGURA 9.4 – NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 3a
– $n_{margem} = 0,040, 0,065$ E $0,090$



Durante a calibragem do modelo físico, foi necessário aumentar a rugosidade do leito nos canais entre as ilhas, como indicado na fotografia da figura 9.5. No modelo

FIGURA 9.5 – REGIÕES COM RUGOSIDADE AUMENTADA NO MODELO FÍSICO



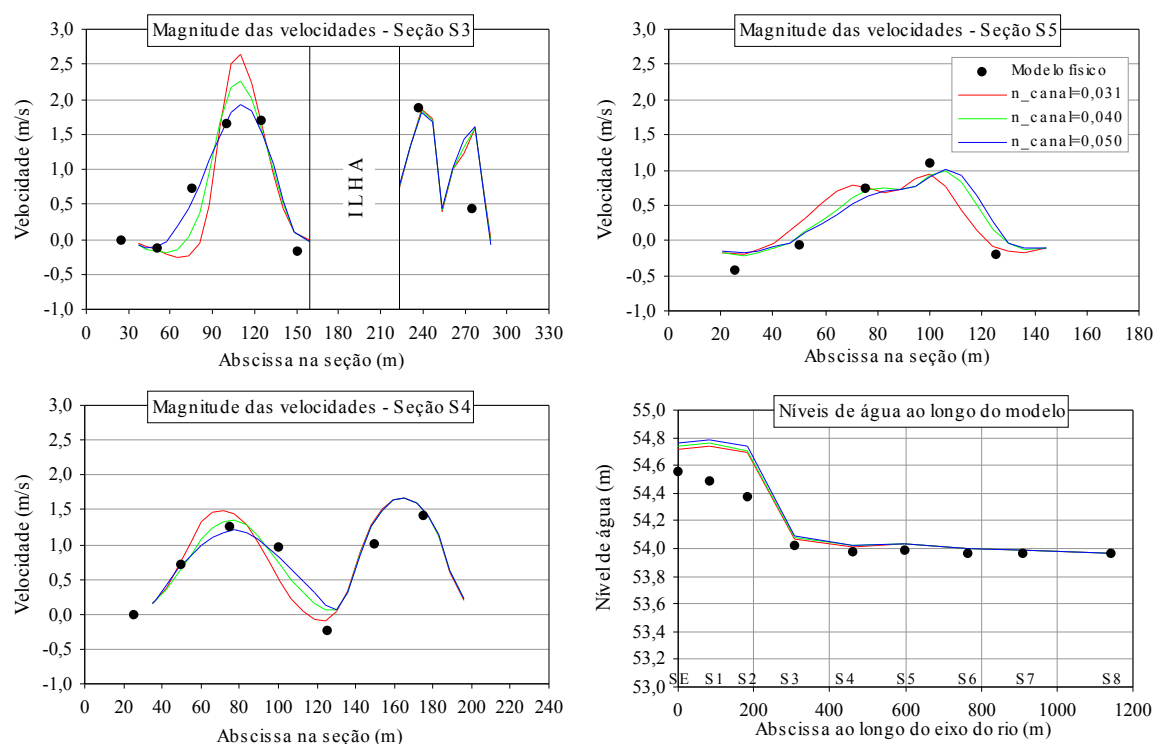
Vista da margem esquerda

Vista de montante

computacional esse aumento de rugosidade foi também experimentado. Com o aumento, as velocidades nas simulações com vazões e níveis de água baixos mostraram maior concordância com o modelo físico. O efeito desse aumento pode ser visto na figura 9.6, que mostra as velocidades nas seções S3 a S5, com diferentes valores de n na região dos canais. A alternativa com $n_{canal} = 0,50$ apresentou os melhores resultados, como pode ser confirmado pelos parâmetros comparativos da tabela 9.4. Nas demais seções não houve alteração nos gráficos de velocidades. Os níveis de água médios ao longo do modelo, indi-

cados na mesma figura, não foram afetados. As alterações nos ensaios com vazões e níveis de água mais altos não foram significativas.

FIGURA 9.6 – VELOCIDADES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS S3 A S5 E NÍVEIS DE ÁGUA AO LONGO DO MODELO – ENSAIO 1a – $n_{canais} = 0,031, 0,040$ E $0,050$



O resultado final da calibragem da rugosidade do leito é apresentado na figura 9.7, para as malhas dos ensaios 1a e 4b. As malhas dos demais ensaios seguem a mesma configuração de rugosidade.

FIGURA 9.7 – MAPA DE COEFICIENTES DE RUGOSIDADE DO MODELO COMPUTACIONAL CALIBRADO



TABELA 9.4 – DIFERENÇAS NORMALIZADAS ENTRE AS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 – ENSAIO 1a – $n_{canais} = 0,031, 0,040$ E $0,050$

Abscissa		Velocidades obtidas (m/s)				Diferenças Normalizadas		
		Modelo Físico	Modelo RMA2			$(v_{RMA2} - v_{físico})^2 / v_{max}$		
			$n_{canal}=0,031$	$n_{canal}=0,040$	$n_{canal}=0,050$	$n_{canal}=0,031$	$n_{canal}=0,040$	$n_{canal}=0,050$
Seção 3	50	-0,12	-0,15	-0,18	-0,09	0,000	0,002	0,000
	75	0,72	-0,18	0,13	0,54	0,425	0,183	0,017
	100	1,65	2,15	1,97	1,67	0,132	0,052	0,000
	125	1,70	1,64	1,56	1,53	0,002	0,011	0,016
	150	-0,17	0,08	0,08	0,08	0,033	0,035	0,034
	237	1,88	1,73	1,71	1,68	0,013	0,017	0,021
	275	0,43	1,51	1,53	1,56	0,611	0,634	0,677
$v_{max} =$		1,88	Médias =			0,174	0,133	0,109
Seção 4	50	0,73	0,77	0,65	0,70	0,001	0,005	0,001
	75	1,26	1,46	1,34	1,19	0,029	0,004	0,003
	100	0,96	0,52	0,75	0,83	0,135	0,031	0,012
	125	-0,24	-0,09	0,07	0,13	0,016	0,067	0,100
	150	1,02	1,36	1,34	1,34	0,082	0,076	0,076
	175	1,41	1,48	1,48	1,49	0,003	0,003	0,004
	$v_{max} =$		1,41	Médias =			0,044	0,031
Seção 5	25	-0,43	-0,19	-0,19	-0,17	0,053	0,051	0,063
	50	-0,07	0,25	0,06	0,05	0,094	0,016	0,013
	75	0,73	0,75	0,69	0,61	0,000	0,002	0,015
	100	1,09	0,94	0,91	0,89	0,021	0,032	0,038
	125	-0,20	-0,09	0,14	0,23	0,011	0,102	0,168
	$v_{max} =$		1,09	Médias =			0,036	0,040
					$n_{canal}=0,031$	$n_{canal}=0,040$	$n_{canal}=0,050$	
Médias gerais =					0,085	0,068	0,067	

9.2 SIMULAÇÃO DOS ENSAIOS COM O MODELO COMPUTACIONAL CALIBRADO

As simulações finais, de validação dos resultados do modelo computacional, foram realizadas com número de Reynolds da malha $Re^{malha} = 20$ e com os coeficientes de rugosidade definidos conforme a figura 9.7, ou seja, $n = 0,029$ para a maior parte da malha, $n = 0,065$ para os elementos junto às margens e $n = 0,050$ para os canais entre as ilhas. Para exemplificar a forma de entrada dos dados no programa RMA2, os arquivos de entrada dos ensaios 1b e 4a são listados no apêndice 2.

A questão da continuidade local, nem sempre garantida no modelo de elementos finitos, foi verificada em todas as simulações através do cálculo da vazão em duas seções transversais da malha. O modelo RMA2 faz uma integração das velocidades nos nós ao longo dessas seções e indica o resultado (vazão) durante a execução do programa. Os erros em relação à vazão imposta na entrada do modelo foram sempre inferiores a 0,5%.

A apresentação dos resultados foi dividida nos itens:

- a) configuração do campo de escoamento;
- b) níveis de água;
- c) velocidades.

9.2.1 Resultados – Configuração do Campo de Escoamento

Durante os ensaios no modelo foram feitas fotografias com traçadores superficiais (confetes) com tempo de exposição prolongado (0,5 ou 1 segundo). Essas fotografias registram bem o campo de escoamento, pois revelam as linhas de corrente superficiais, as regiões com correntes de retorno e as regiões de maior e de menor velocidade.

Mapas representativos do campo de escoamento resultante no modelo RMA2 foram também produzidos através do programa de pós-processamento BOSS-SMS. As figuras 9.8 a 9.15 reúnem a fotografia (modelo físico) e a figura (modelo RMA2) de cada ensaio, para comparação.

Observando-se as figuras, nota-se que o modelo RMA2 simulou adequadamente as linhas de corrente, em todos os ensaios. Quase todas as correntes de retorno ocorridas no modelo físico estiveram presentes nas simulações computacionais, com dimensões semelhantes. São particularmente interessantes as linhas de correntes do ensaio 3a (figura 9.12), entre as seções S2 e S4. Neste ensaio, as ilhas estão todas afogadas, mas o escoamento na região delas é desacelerado em virtude da pequena profundidade da região, gerando correntes de retorno irregulares no centro do rio. O modelo RMA2 reproduziu bem essas correntes.

Algumas correntes de retorno de proporções reduzidas observadas no modelo físico, principalmente junto às margens, não aparecem nas simulações computacionais. É possível fazer com que algumas dessas correntes surjam aumentando-se o número de Reynolds da malha (reduzindo-se a viscosidade turbulenta). Entretanto, o número de Reynolds da malha escolhido ($Re^{malha} = 20$) é o que melhor reproduz os gráficos de velocidade, como foi visto na seção 9.1.2. Dessa aparente contradição emerge a lembrança

de que o grau de refinamento da malha impõe um limite mínimo para o tamanho dos fenômenos resolvíveis por ela. Se tais correntes de retorno de tamanho reduzido fossem o foco principal do estudo, a abordagem mais correta seria diminuir o tamanho dos elementos finitos, ao invés de aumentar o número de Reynolds da malha. A mesma consideração pode ser feita em relação ao grau de irregularidade das correntes de retorno, muito maior no modelo físico.

Um ponto importante a considerar é a variabilidade temporal das linhas de corrente no modelo físico. Para um mesmo ensaio, várias fotografias com confetes foram obtidas. De uma fotografia para outra, da mesma região, sempre há diferenças nas linhas de corrente reveladas pelos confetes. Isso reforça novamente a noção de que o escoamento turbulento tem sempre um caráter transiente, como visto no capítulo 3, mesmo quando o escoamento é, nas maiores escalas, “permanente”.

FIGURA 9.8 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1a

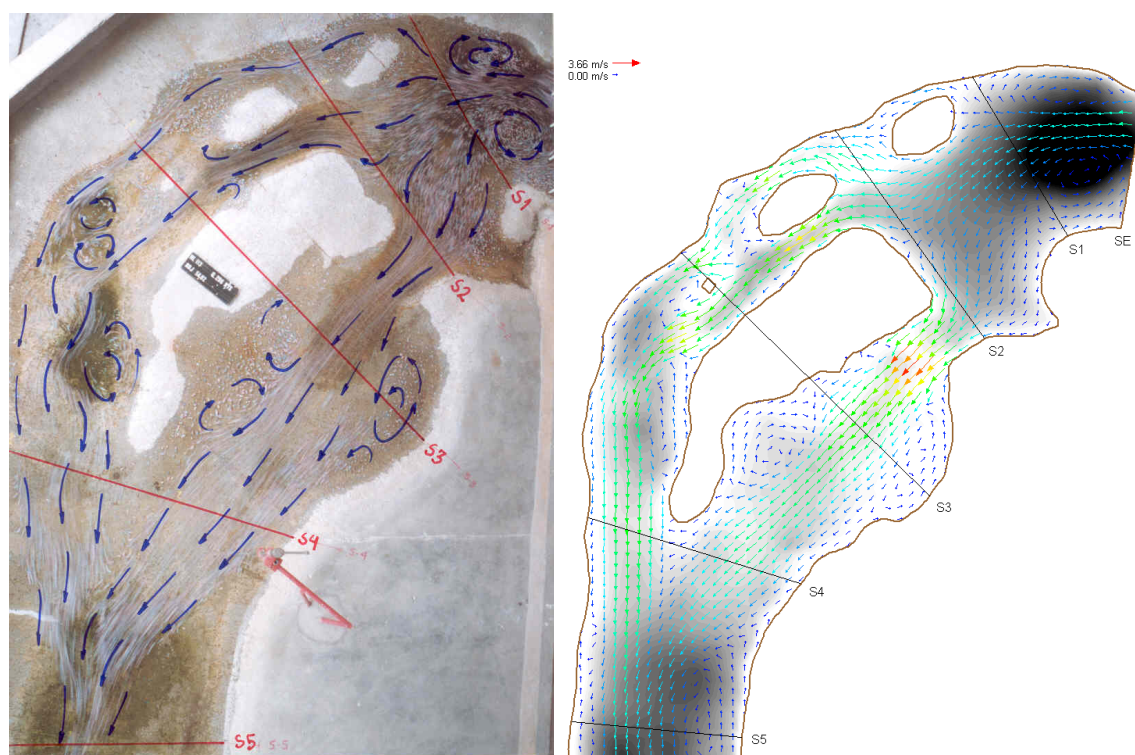


FIGURA 9.9 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1b

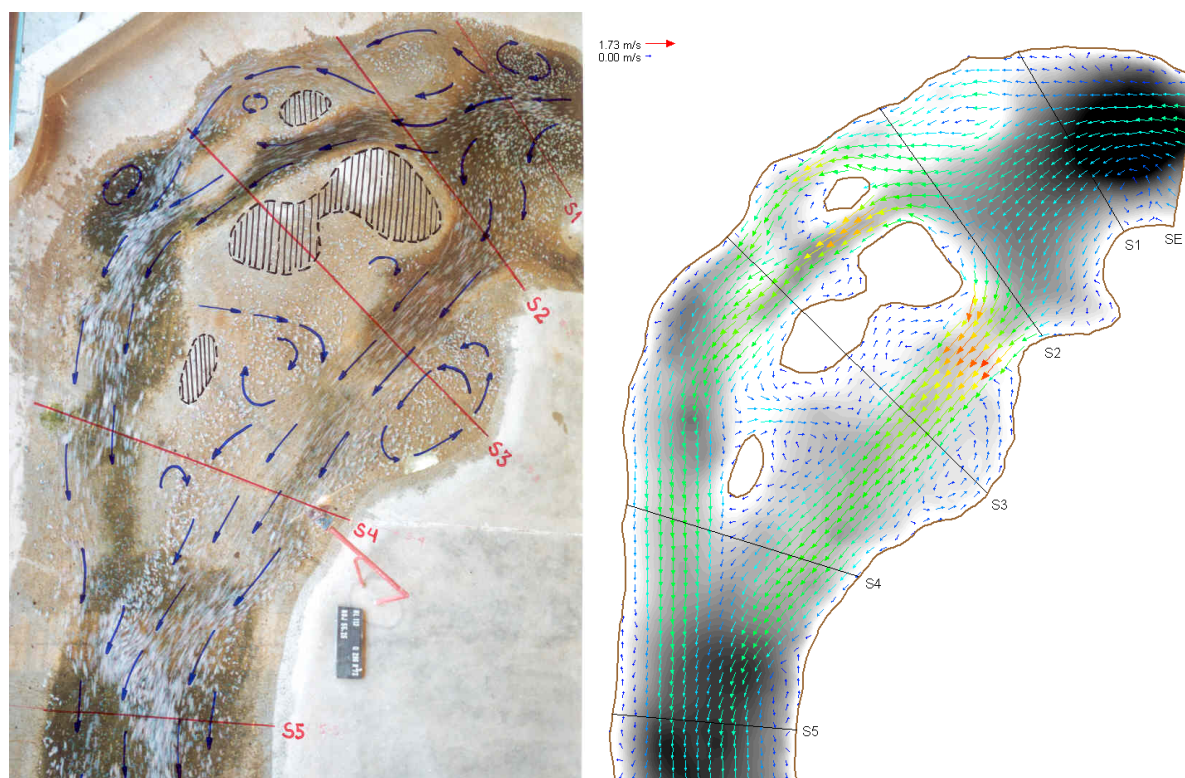


FIGURA 9.10 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2a

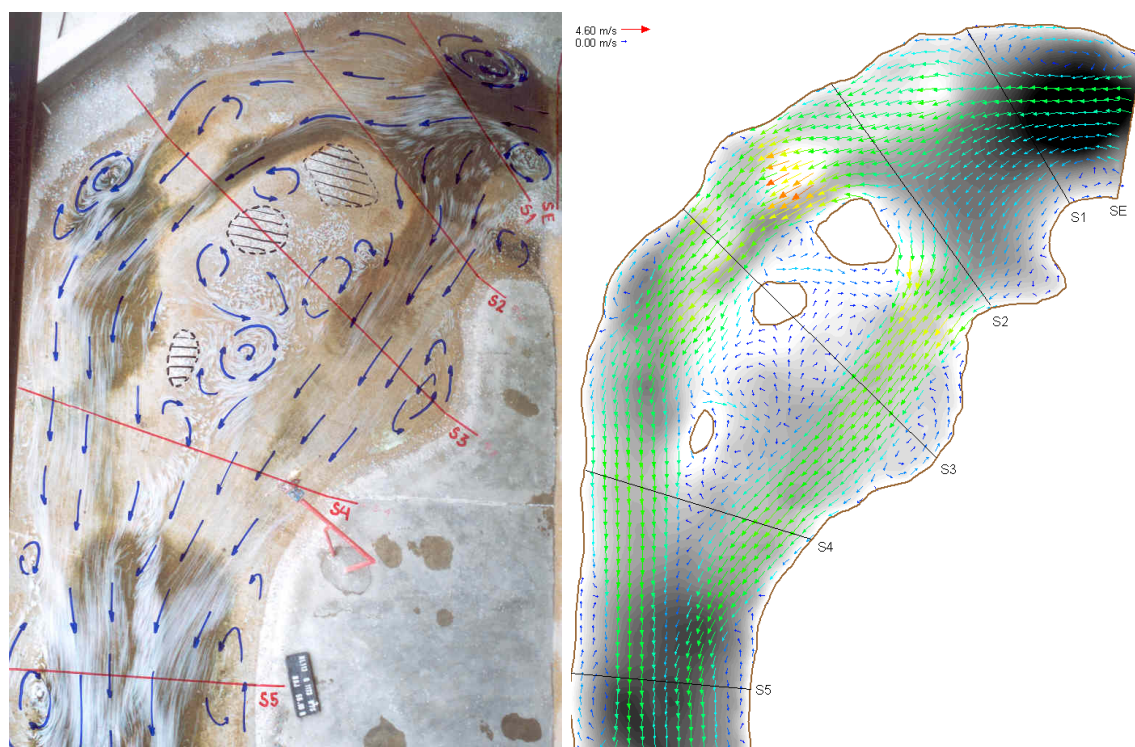


FIGURA 9.11 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2b

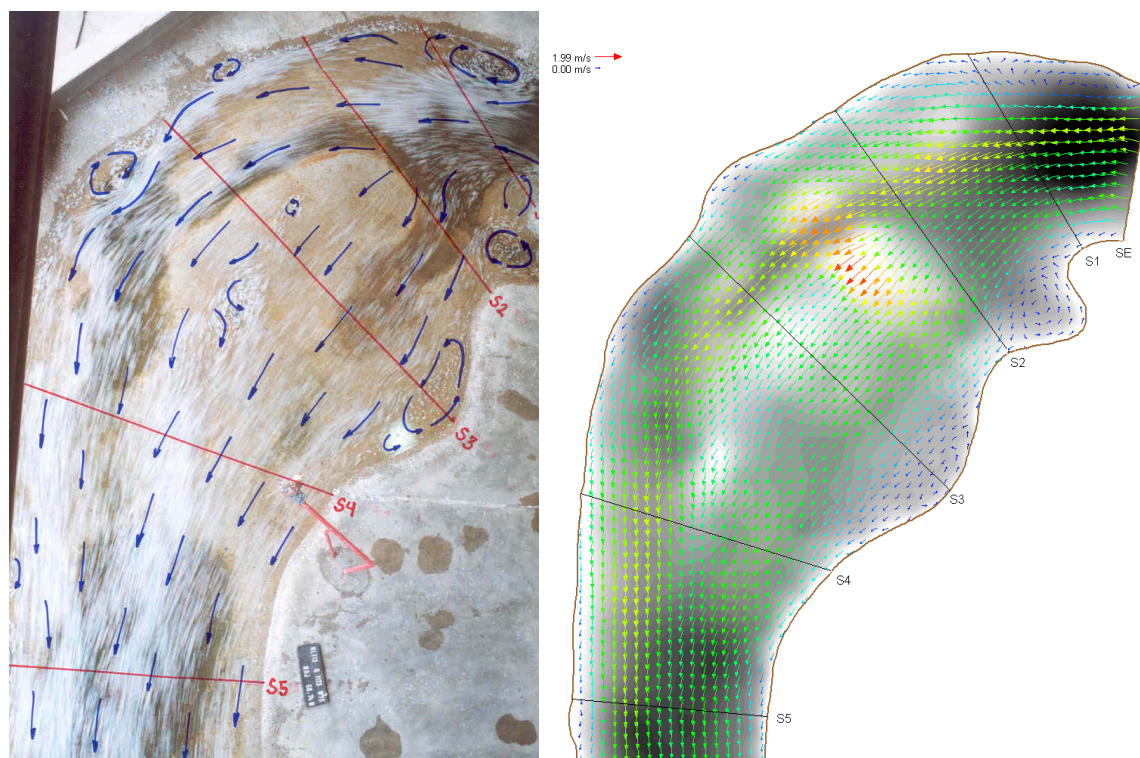


FIGURA 9.12 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3a

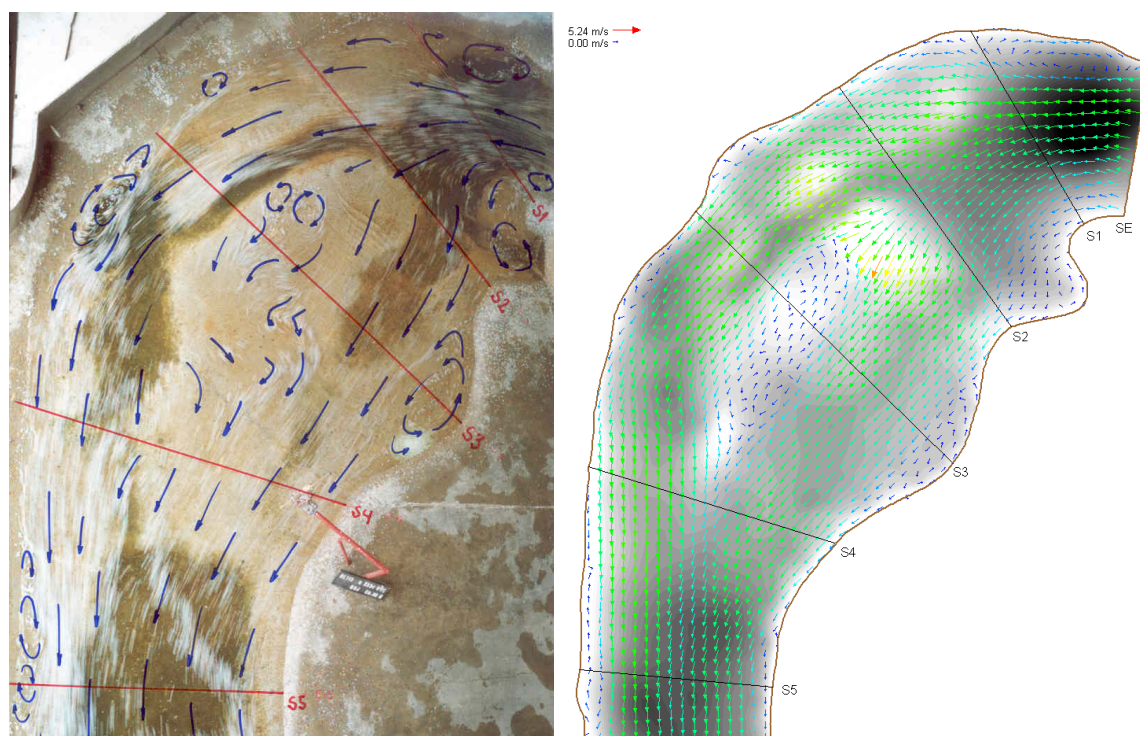


FIGURA 9.13 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3b

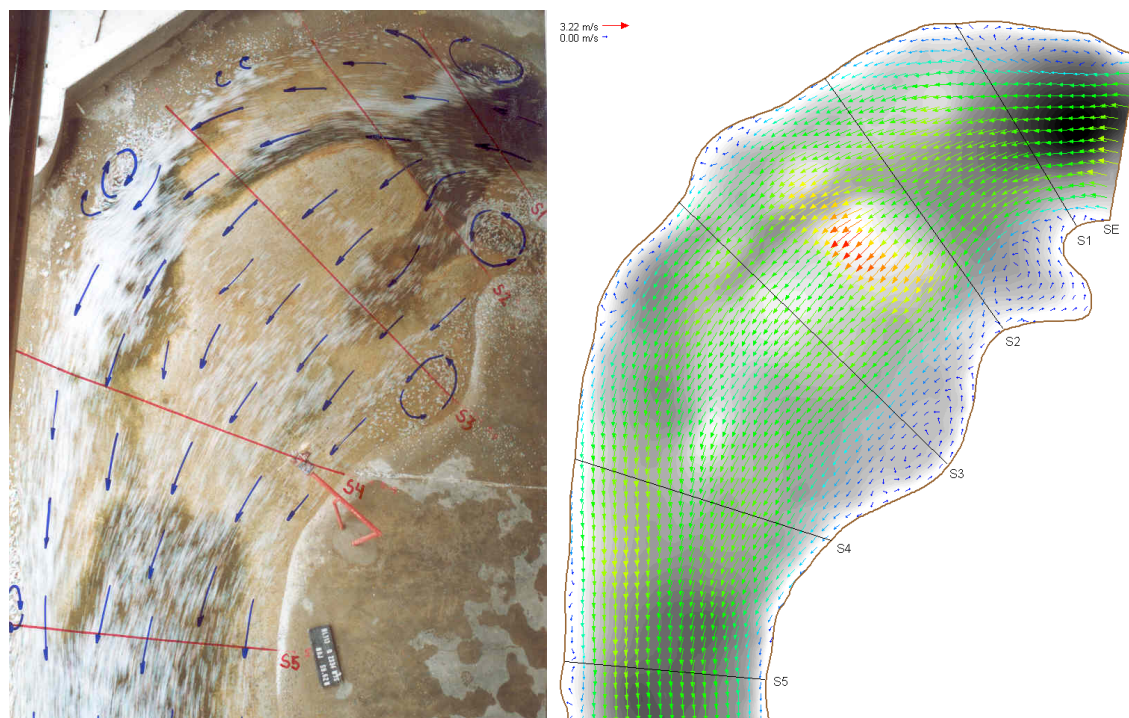


FIGURA 9.14 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4a

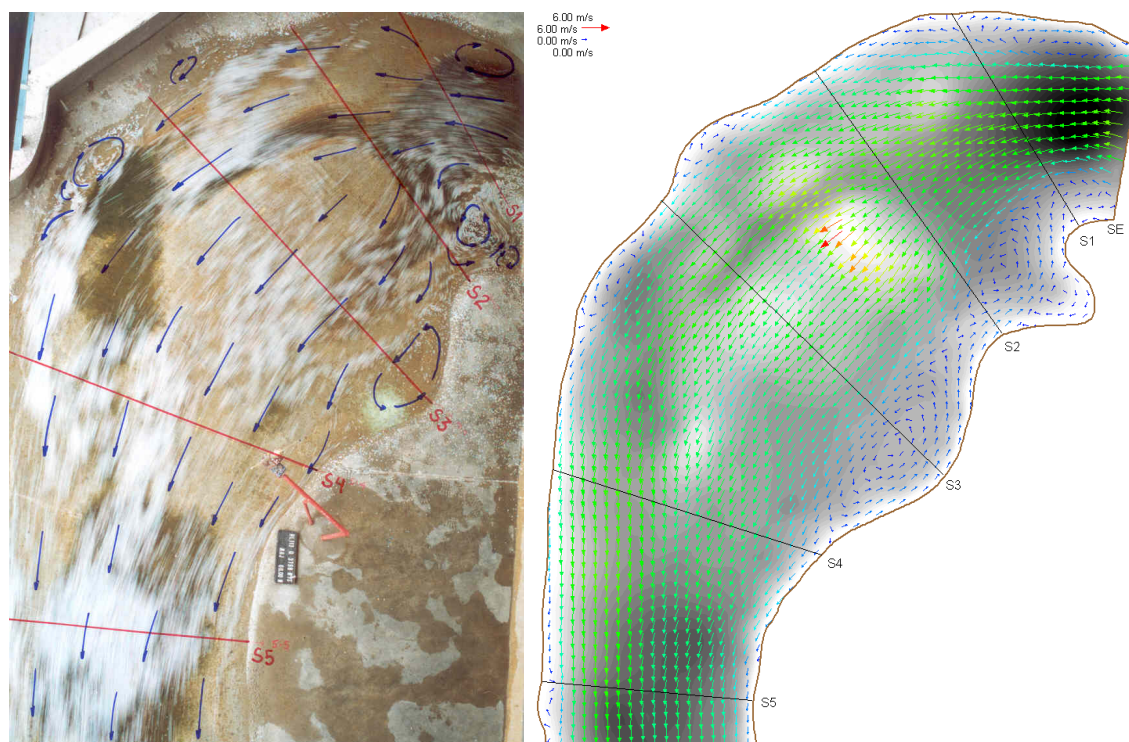
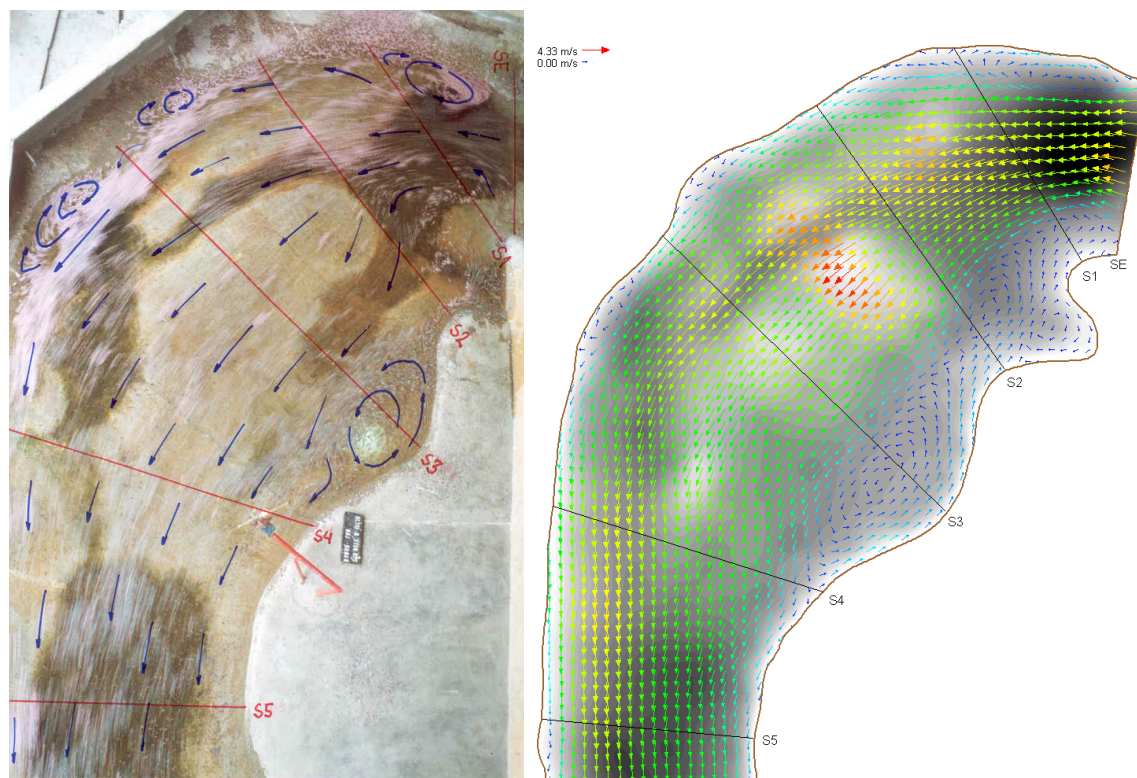


FIGURA 9.15 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4b



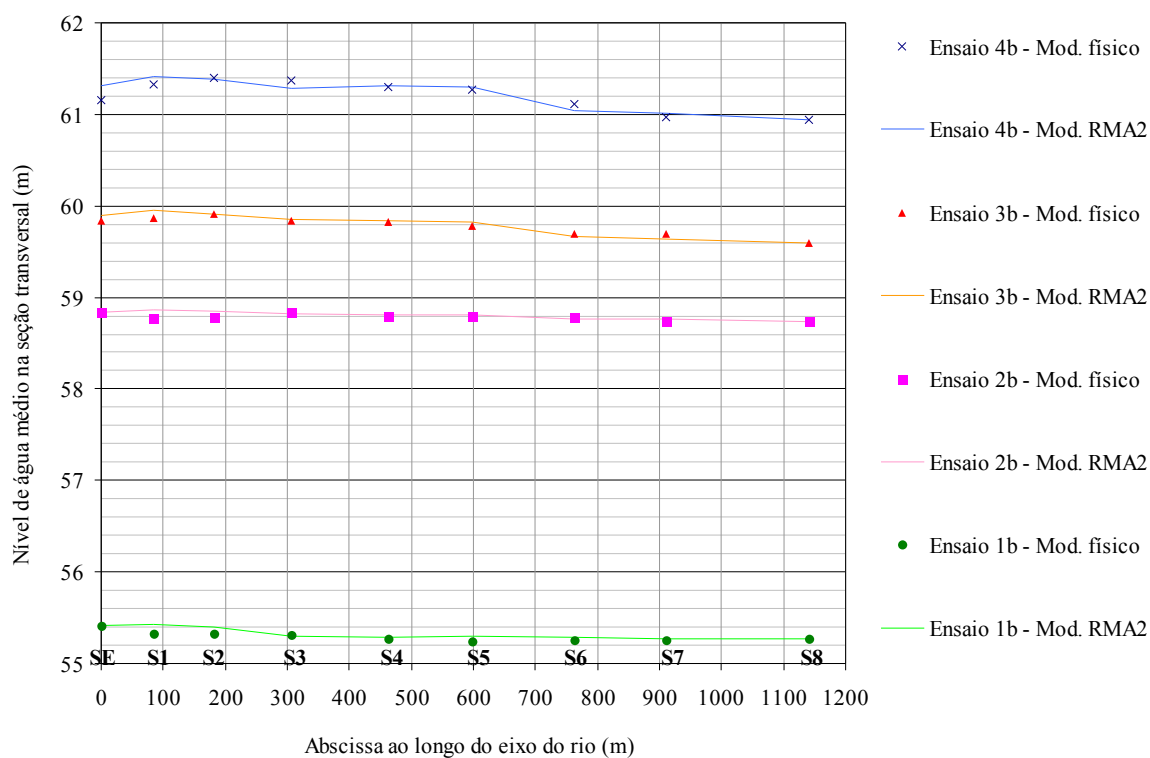
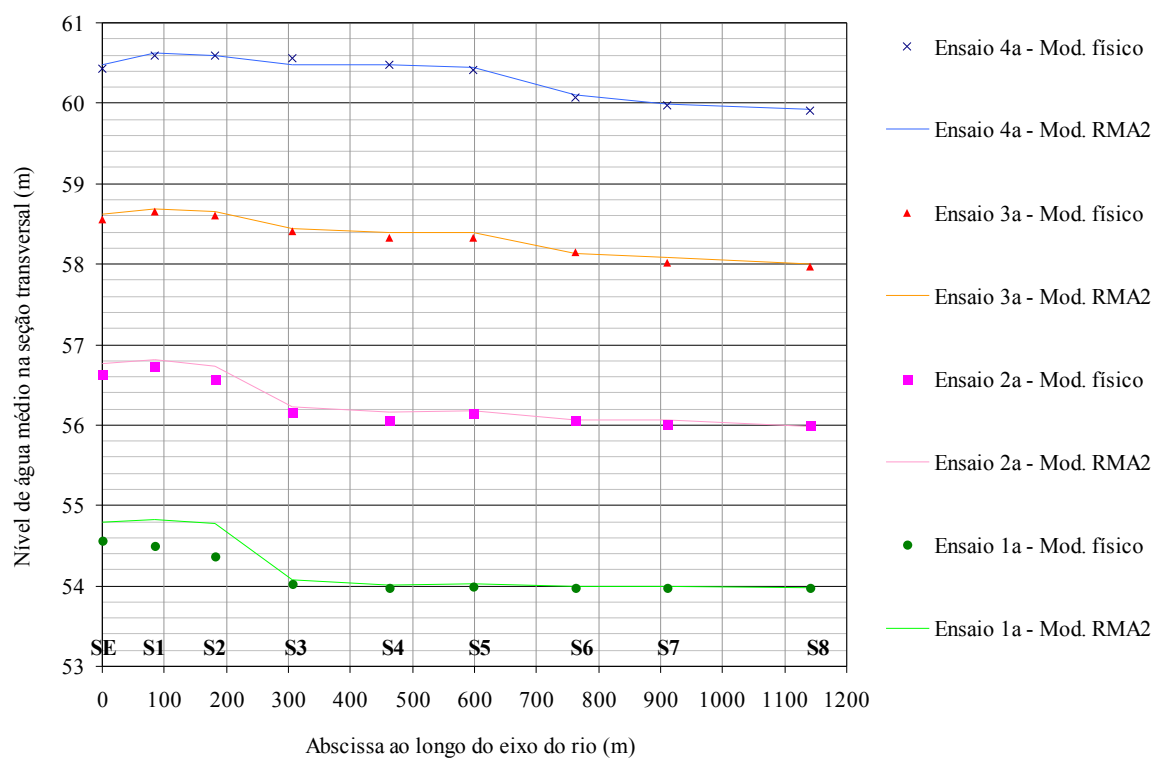
9.2.2 Resultados – Níveis de Água

O trecho do Rio Jacuí escolhido para este trabalho não apresenta grandes variações de níveis de água. As maiores variações estão nos ensaios 1a, 2a, 3a e 4a, onde o nível de jusante foi imposto conforme a curva de descarga natural do rio. Os ensaios 1b, 2b, 3b e 4b foram realizados com o nível de jusante artificialmente elevado, reduzindo bastante o desnível de jusante para montante.

Os níveis de água médios em cada seção são apresentados na figura 9.16, no modelo físico e no modelo RMA2, para todos os ensaios.

Os níveis de água resultantes no modelo computacional mostraram boa concordância com as medições no modelo físico, acompanhando a forma de variação ao longo do rio. Nos ensaios “a”, o modelo computacional resultou em níveis de água 0,07 m mais altos do que os do modelo físico, em média. Já nos ensaios “b”, o modelo computacional resultou em níveis de água 0,02 m mais altos.

FIGURA 9.16 – NÍVEIS DE ÁGUA MÉDIOS NAS SEÇÕES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO



Em termos gerais, é possível suspeitar que um coeficiente n de Manning ligeiramente inferior a 0,029 fornecesse níveis de água um pouco melhores, particularmente nos ensaios 1a, 1b e 3a. Entretanto, o valor de 0,029 representou também um limite mínimo para a convergência da solução numérica, principalmente nos ensaios “a”. A razão desse limite está associada à ocorrência de escoamento supercrítico na região das ilhas. Coeficientes de rugosidade menores causam níveis de água também menores e números de Froude locais maiores.

Algumas simulações, de cunho exploratório, foram conduzidas utilizando-se diferentes coeficientes de rugosidade n para cada trecho do rio, separados pelas seções S1, S2, ... e S8. Assim procedendo, foi possível obter níveis de água médios nas seções exatamente iguais aos níveis obtidos no modelo físico, com poucas alterações nos gráficos de velocidades. Todavia, julgou-se que a adoção de um coeficiente n diferente para cada trecho prejudicaria o caráter mais geral que se buscava durante a calibragem. O uso de diferentes coeficientes n por trecho foi, então, abandonado.

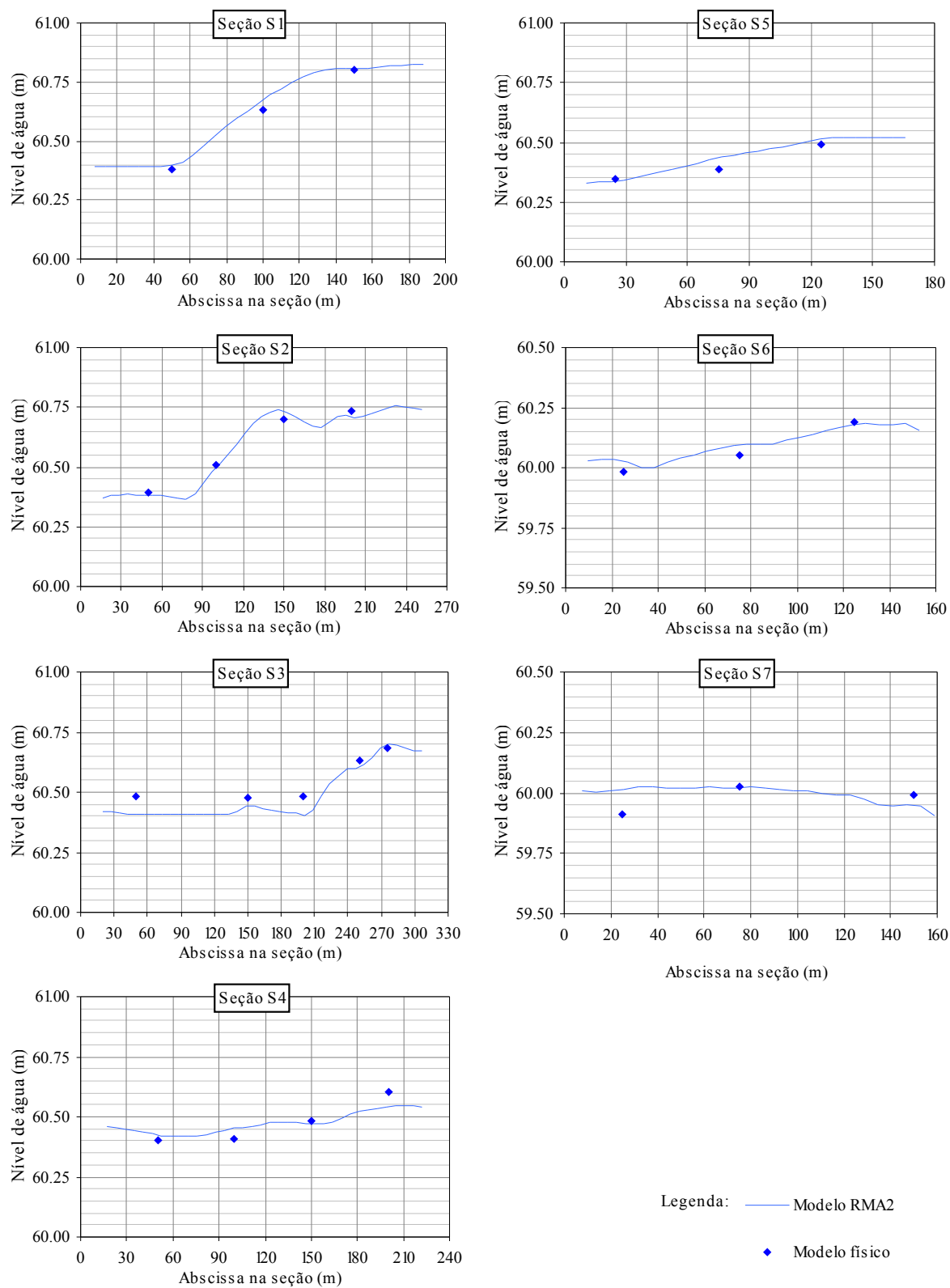
Os níveis de água ao longo de uma mesma seção também mostraram um bom ajuste com as leituras de níveis no modelo físico. A figura 9.17 ilustra a variação de níveis de água ao longo de cada seção, para o ensaio 4a.

9.2.3 Resultados – Velocidades

As figuras 9.18 a 9.33 apresentam os gráficos com as magnitudes e com as direções das velocidades nas seções S1 a S8. De modo geral, tanto as magnitudes quanto as direções das velocidades apresentaram boa concordância entre o modelo físico e o modelo computacional. Algumas diferenças foram observadas; comentários sobre as mesmas são feitos a seguir.

No ensaio 2a o modelo reproduziu bem as correntes de retorno junto às margens nas seções S7 e S8. Por outro lado, nos ensaios 1a (seções S7 e S8), 1b (seções S6, S7 e S8), 2b (seções S1, S5 e S7) e 3b (seção S2), as correntes de retorno junto às margens

FIGURA 9.17 – NÍVEIS DE ÁGUA LOCAIS NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO– ENSAIO 4a



não foram perfeitamente reproduzidas, como pode ser constatado nos gráficos de direção das velocidades. Ainda assim, as magnitudes nesses pontos resultaram próximas de zero, como no modelo físico. Cabe aqui o mesmo comentário feito no item 9.2.1: as correntes de retorno poderiam ser forçadas artificialmente através do aumento do número de Reynolds da malha, mas, na realidade, é o grau de refinamento da malha quem está impondo o limite para que essas correntes sejam corretamente simuladas. Além disso, em alguns pontos da margem é provável que a batimetria no modelo computacional não esteja configurada exatamente como no modelo físico, o que pode gerar as diferenças. Pequenas reentrâncias na margem são freqüentemente a causa do aparecimento dessas correntes de retorno.

Nos ensaios 2a e 2b os resultados apresentaram discrepâncias significativas nas seções S1 e S2. Como as diferenças têm um caráter aleatório, é provável que sejam devidas a imprecisões nas medições de velocidades no modelo físico na seção SE, que foram usadas na imposição da condição de contorno de montante no modelo RMA2.

Outra possível fonte de erro pode ser notada nos gráficos das seções S7 e S8, no ensaio 2b, e da seção S8, no ensaio 4b. As velocidades calculadas pelo modelo RMA2 são sistematicamente inferiores às velocidade medidas no modelo físico. Como a integração do gráfico do modelo RMA2 resultou na vazão do ensaio com erro inferior a 0,5%, conclui-se que as medições no modelo estão incorretas nessas seções, pois a integração destas resultaria em uma vazão maior que a do ensaio. Uma hipótese para essa diferença sistemática é o posicionamento do medidor eletromagnético de velocidades muito próximo à superfície, e não na posição onde se mediria uma velocidade média na seção (aproximadamente $0,6h$). A mesma observação pode ser feita quanto às seções S1 e S2 do ensaio 3b, mas, neste caso, as velocidades no modelo RMA2 resultaram sistematicamente maiores que no modelo físico. Mesmo buscando sempre posicionar o medidor de velocidades na profundidade correta, como o medidor foi operado por mais de uma pessoa, o posicionamento em relação à profundidade pode ter sido uma fonte de imprecisões. Infelizmente, essas suposições não puderam ser comprovadas porque o modelo não estava mais disponível quando as discrepâncias foram detectadas.

No ensaio 4b, seção S5, os dois pontos próximos da margem esquerda medidos no modelo físico destoam das medições nos mesmos pontos, nos outros ensaios, e dos resultados do modelo RMA2, em magnitude e direção. A fotografia com traçadores também não revela a existência de alguma corrente de retorno nessa região. A integração das velocidades obtidas no modelo físico conduz a uma vazão inferior à vazão do ensaio. As evidências de que há erros nas medições dos dois pontos são claras, mas é difícil apontar uma causa. Uma possibilidade é que tenha ocorrido a obstrução do medidor eletromagnético por um confete, prejudicando completamente a medição.

Os melhores resultados foram obtidos nas simulações dos ensaios 3a e 4a, em que as magnitudes e as direções das velocidades nos dois modelos foram muito semelhantes, em todas as seções.

FIGURA 9.18 – MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1a

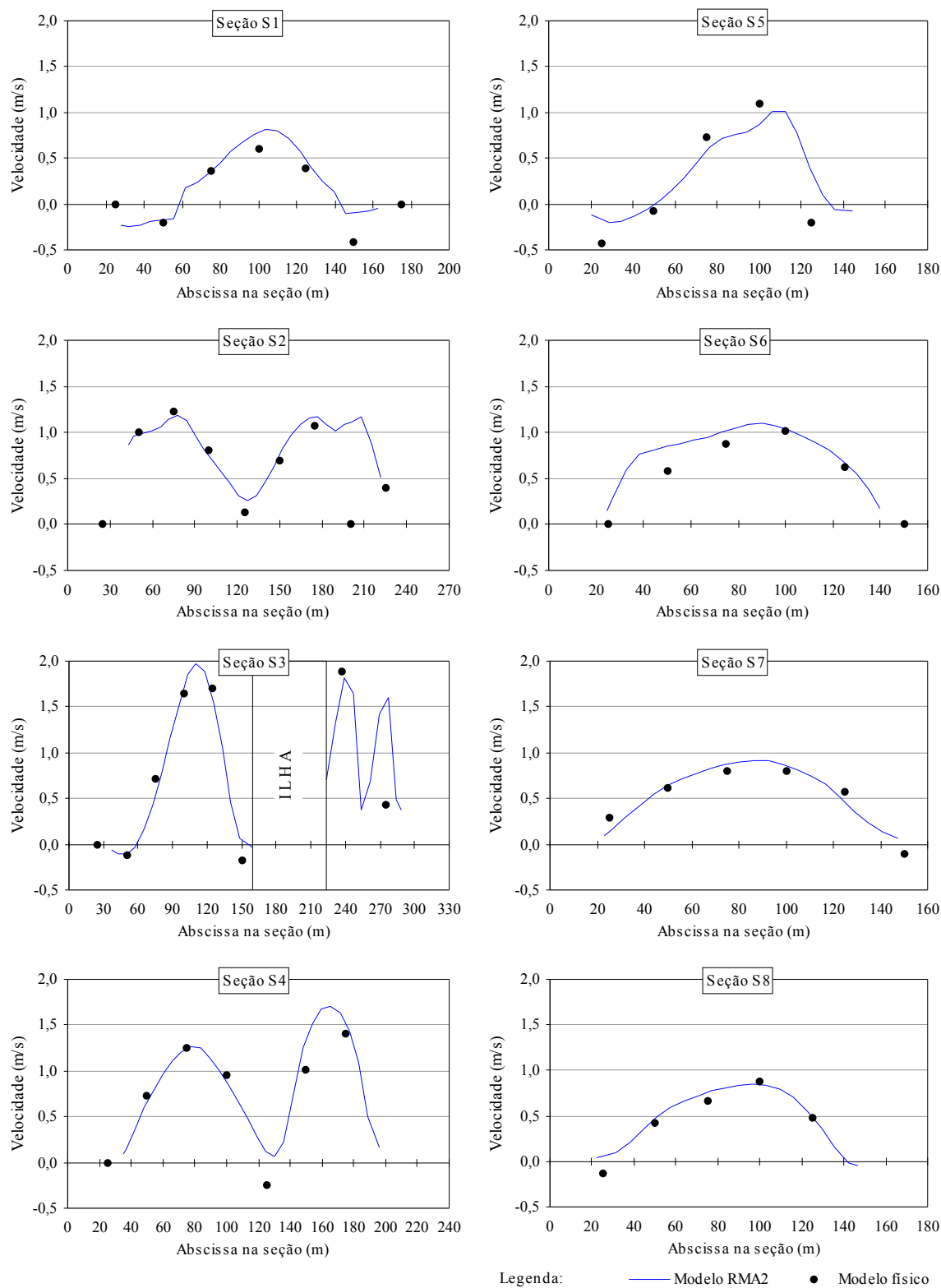


FIGURA 9.19 – DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1a

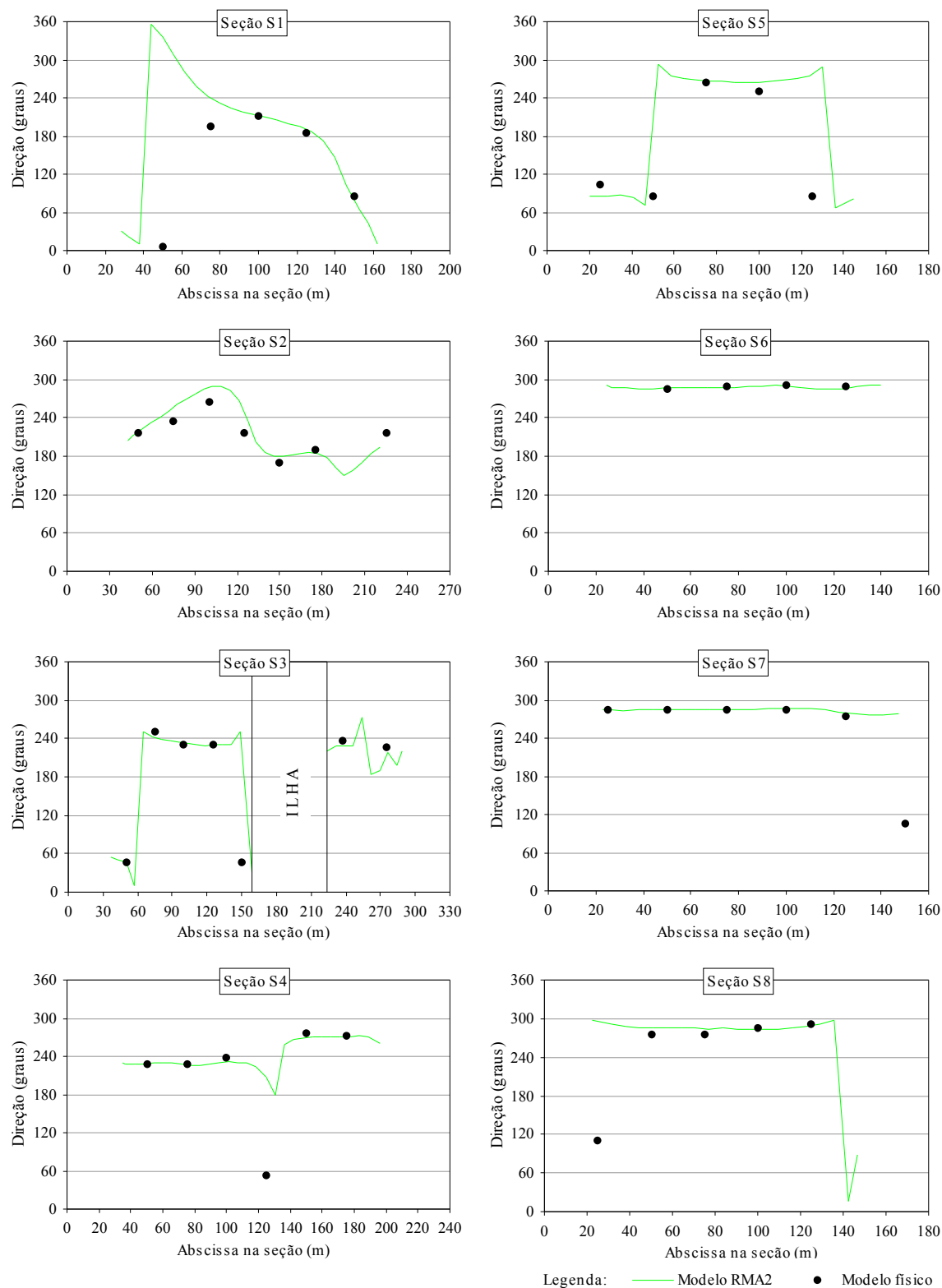
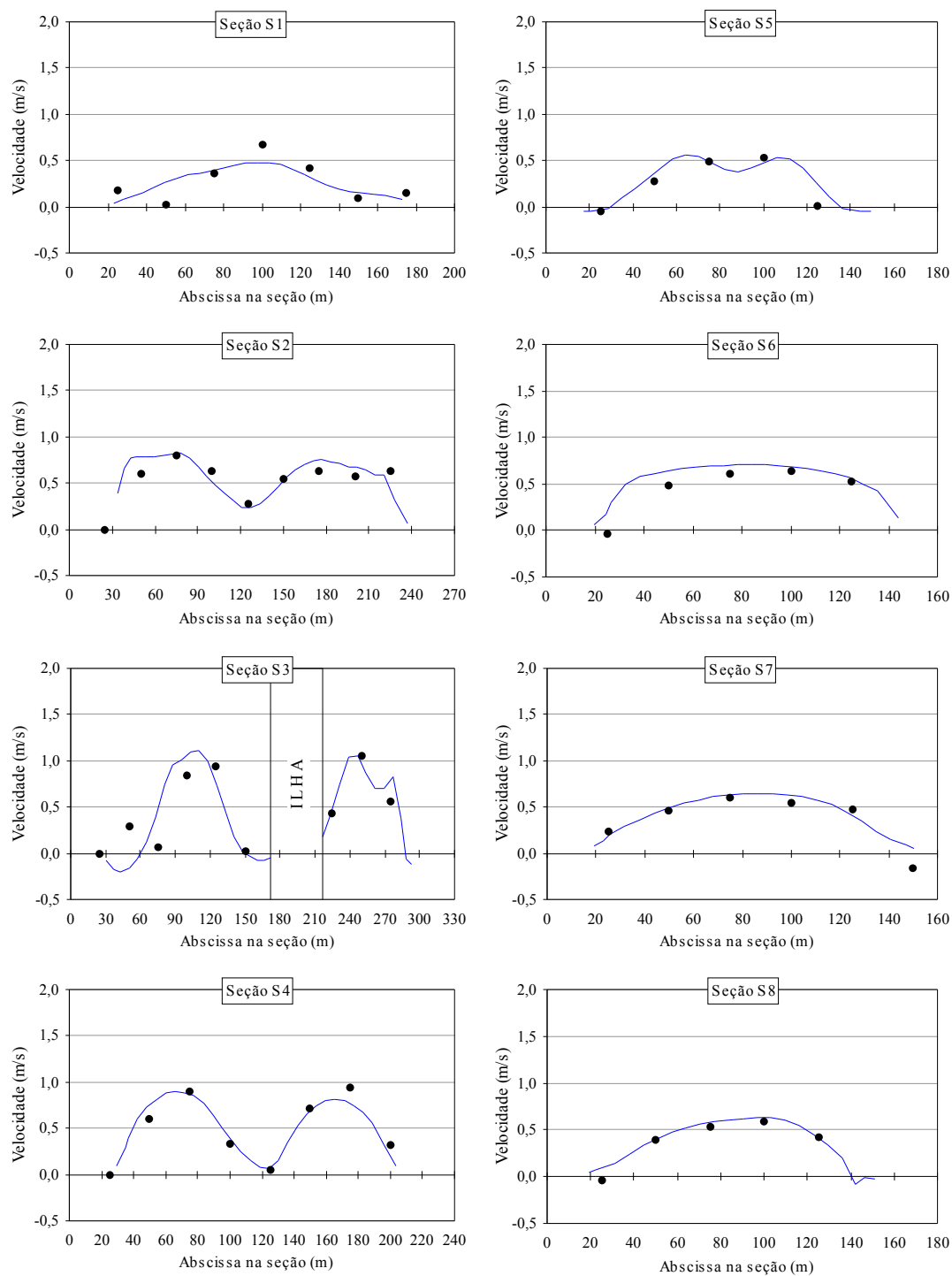


FIGURA 9.20 – MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1b



Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

FIGURA 9.21 – DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 1b

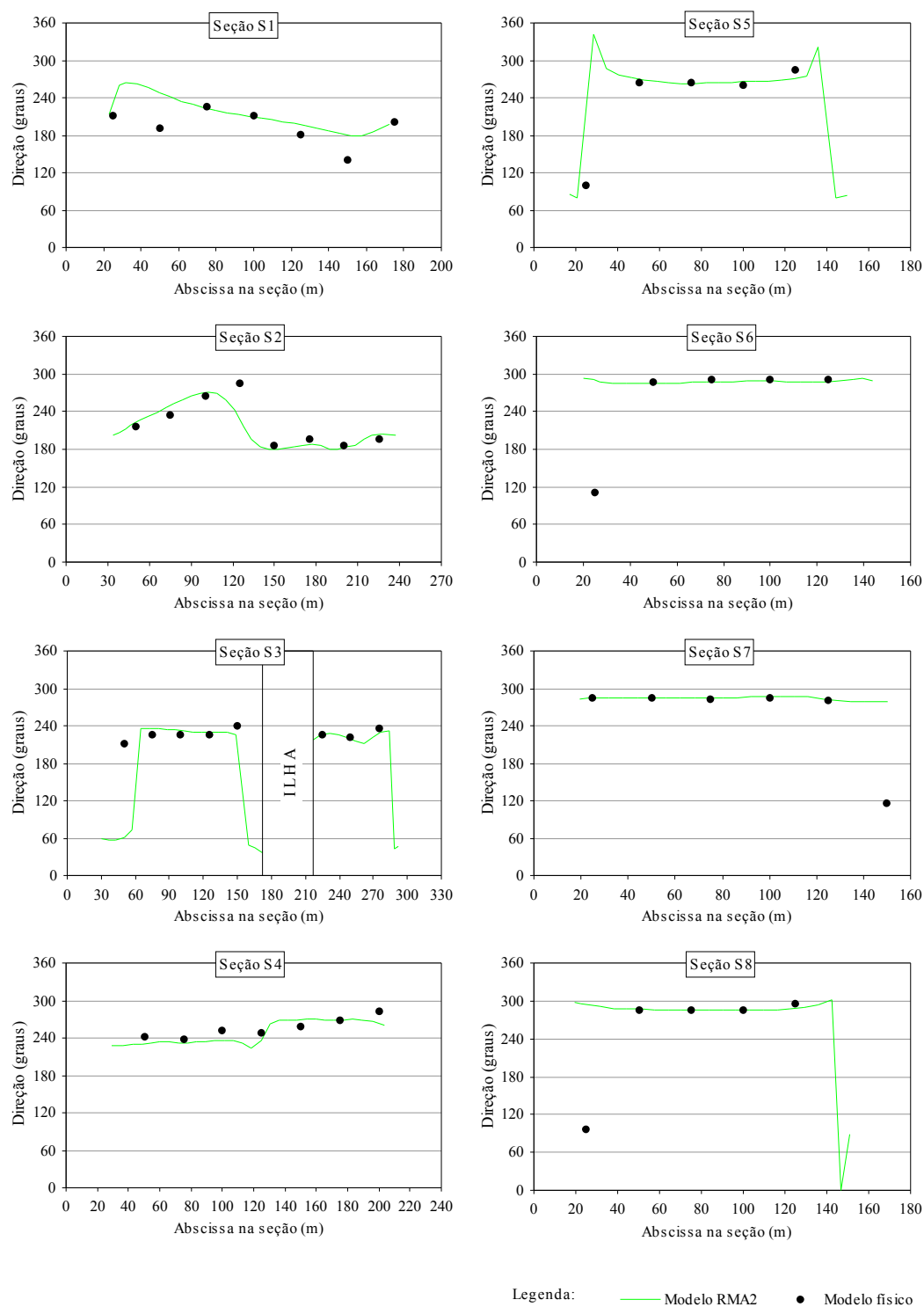
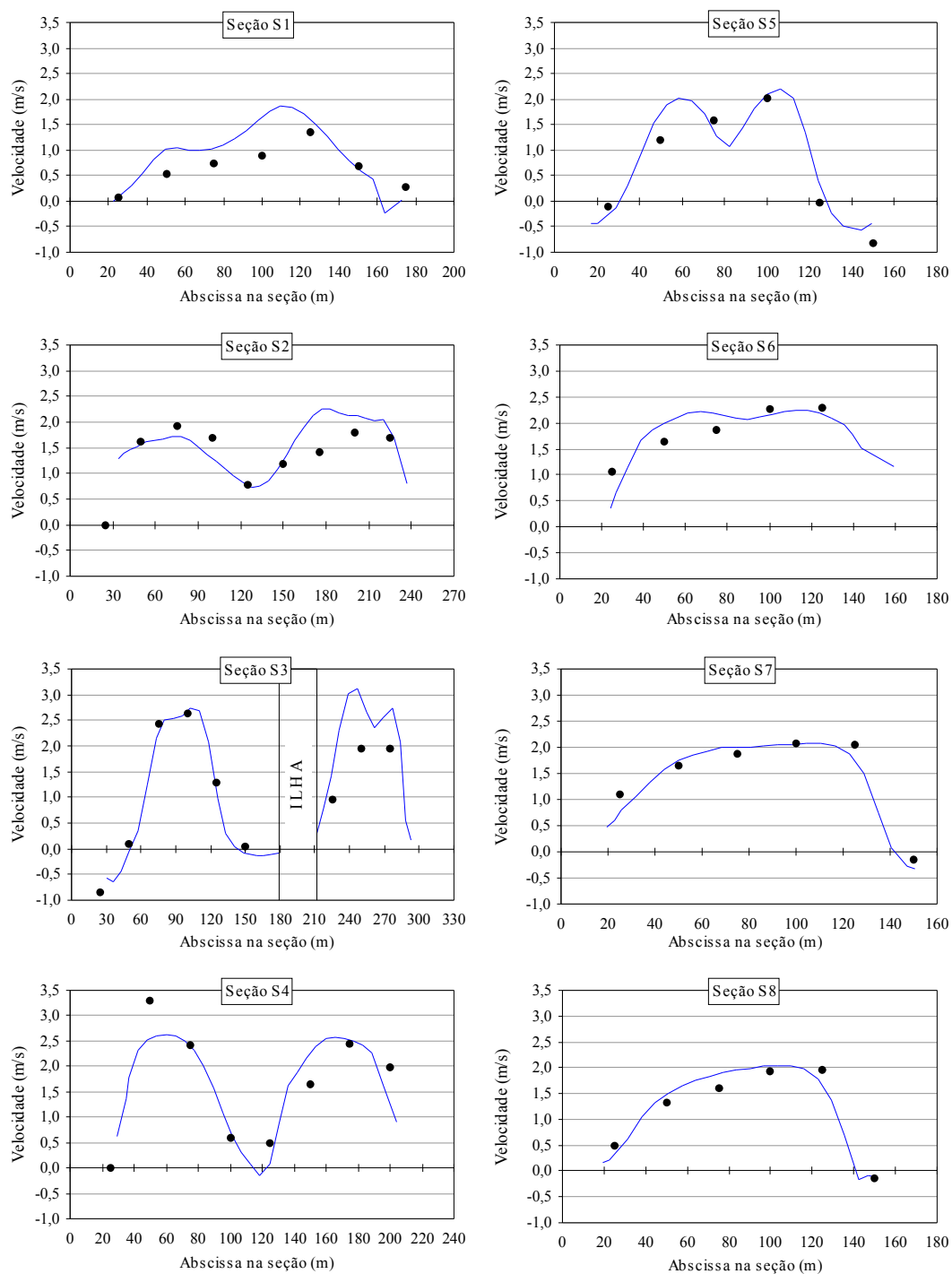


FIGURA 9.22 – MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2a



Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

FIGURA 9.23 – DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2a

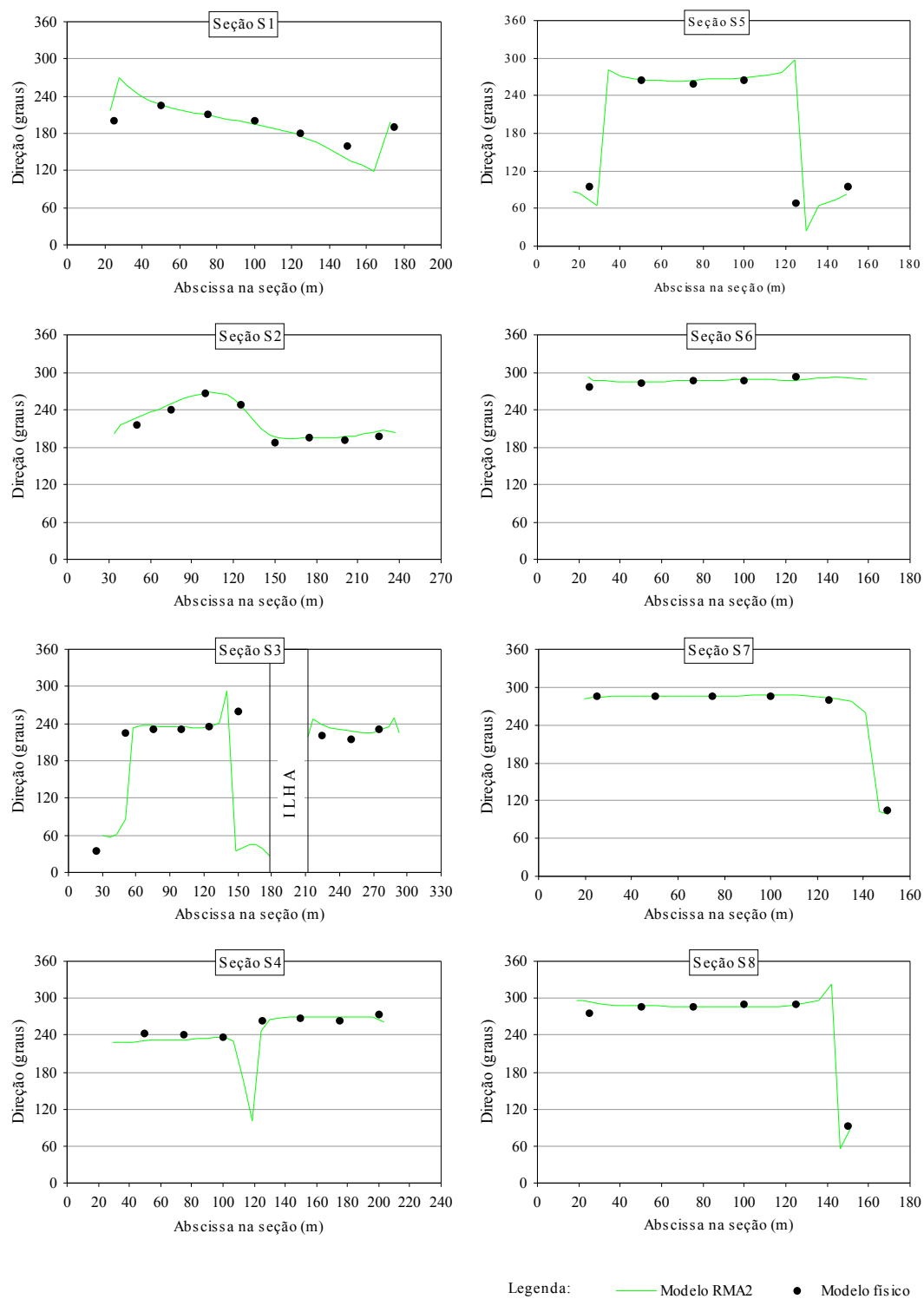
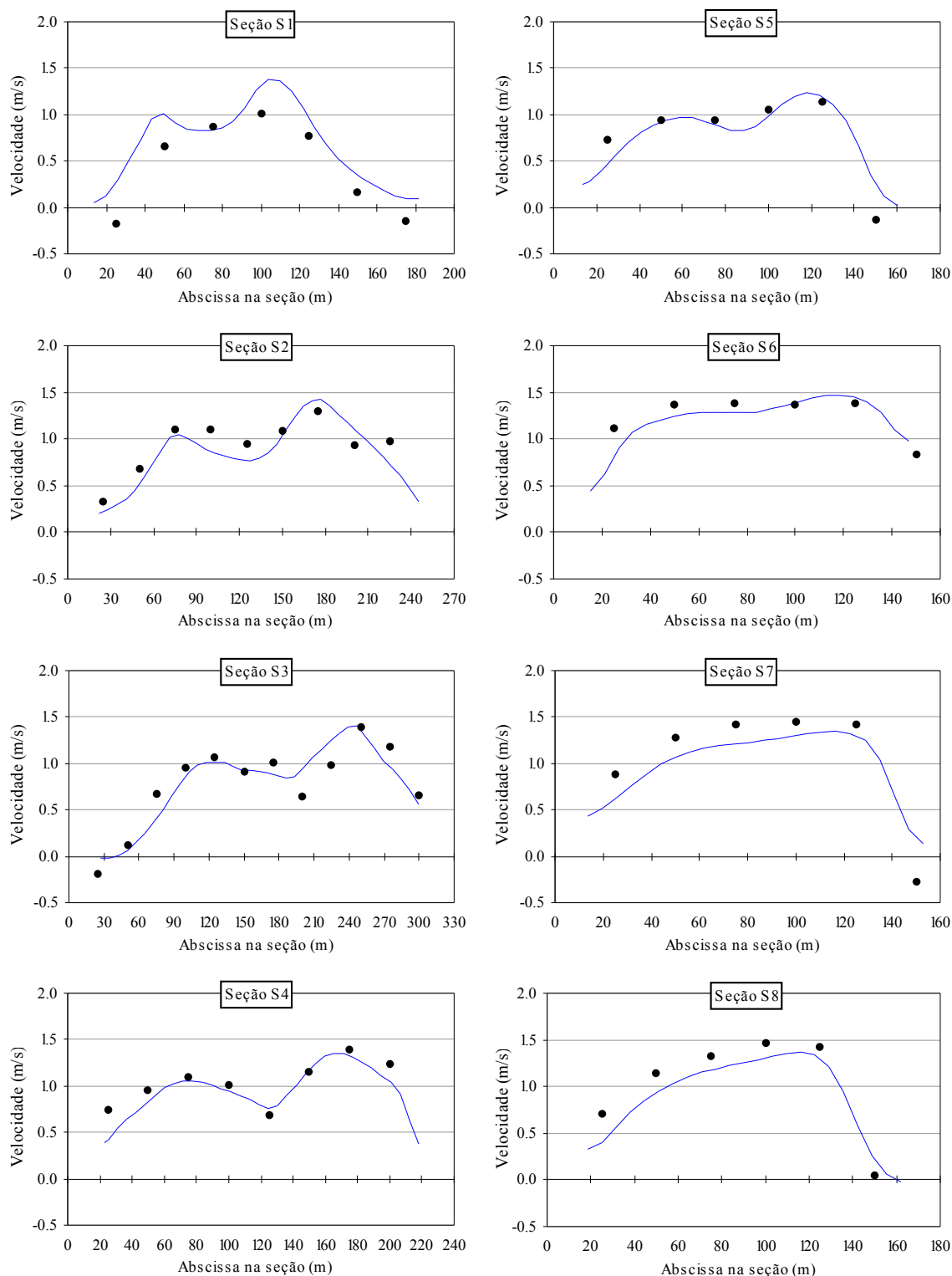
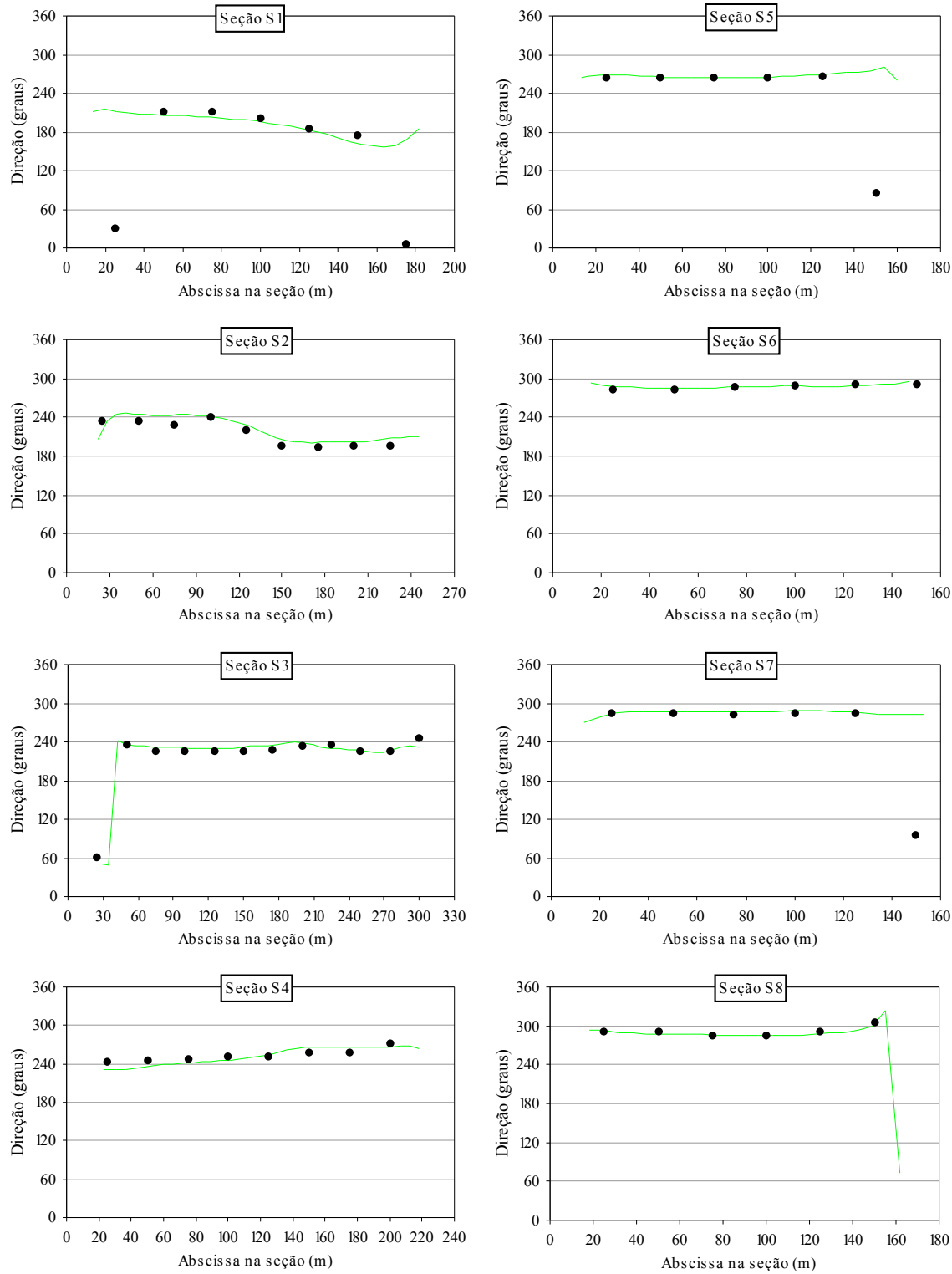


FIGURA 9.24 – MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2b



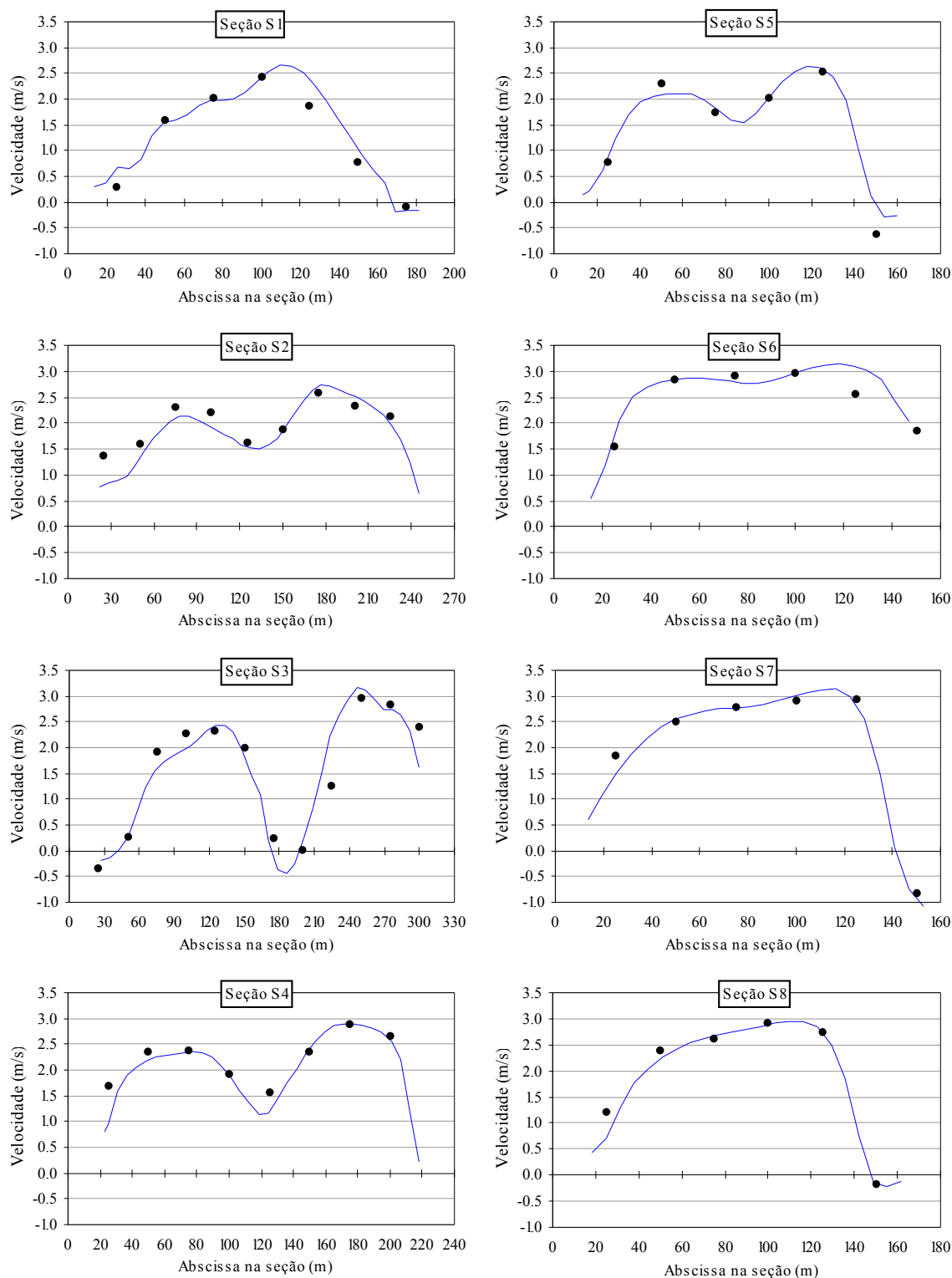
Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

FIGURA 9.25 – DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 2b



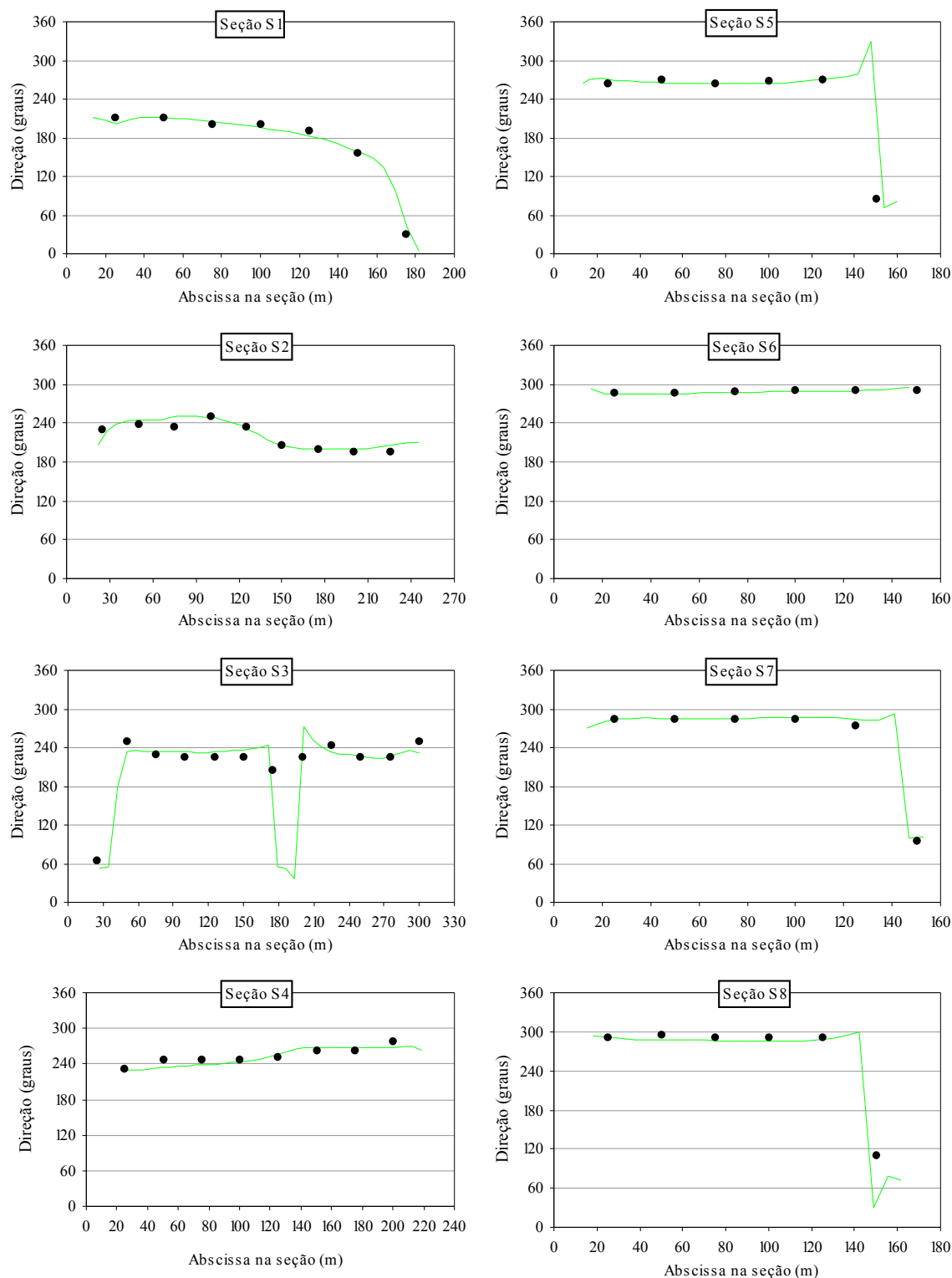
Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

FIGURA 9.26 – MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3a



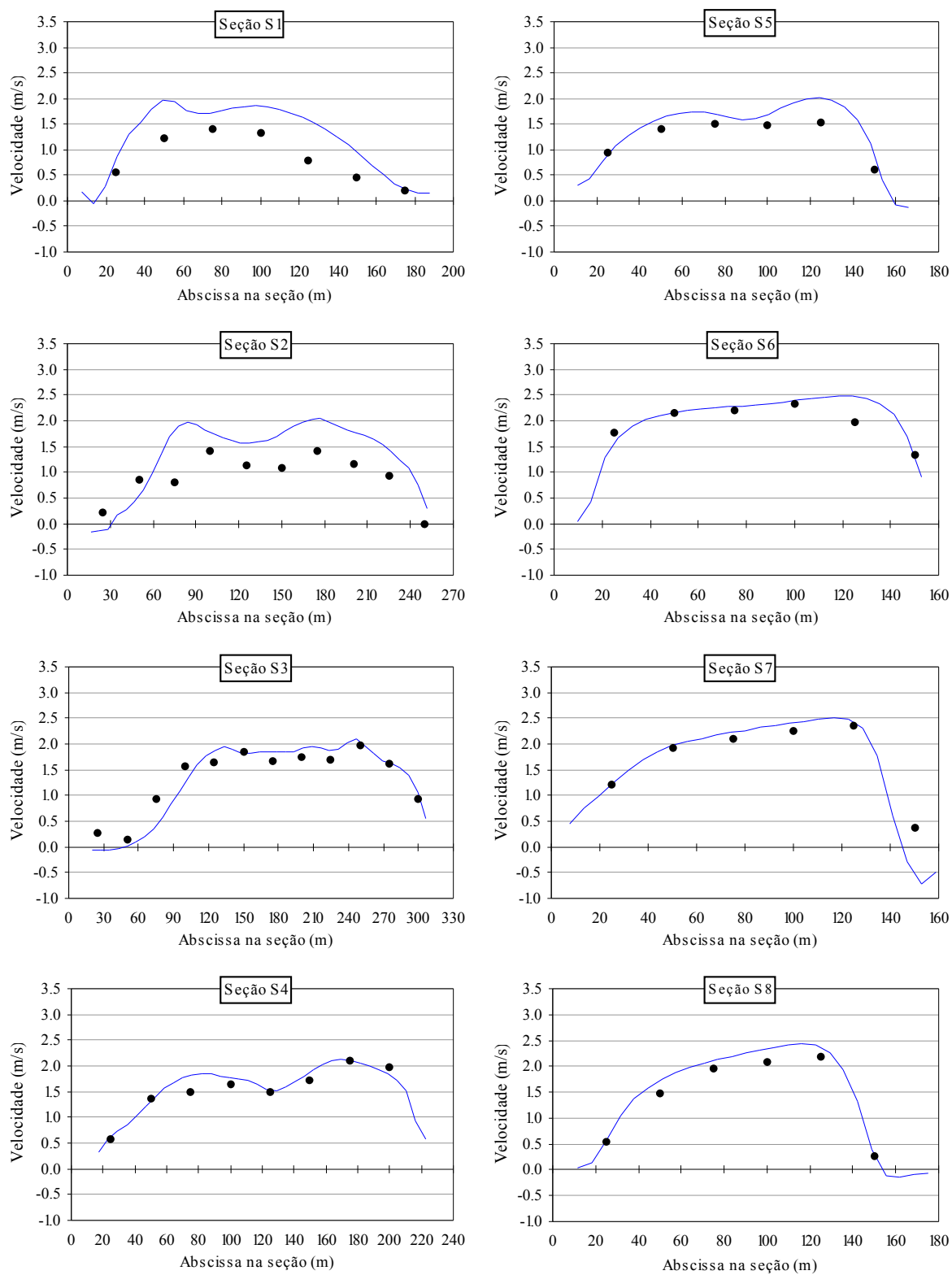
Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

FIGURA 9.27 – DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3a



Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

FIGURA 9.28 – MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3b



Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

FIGURA 9.29 – DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 3b

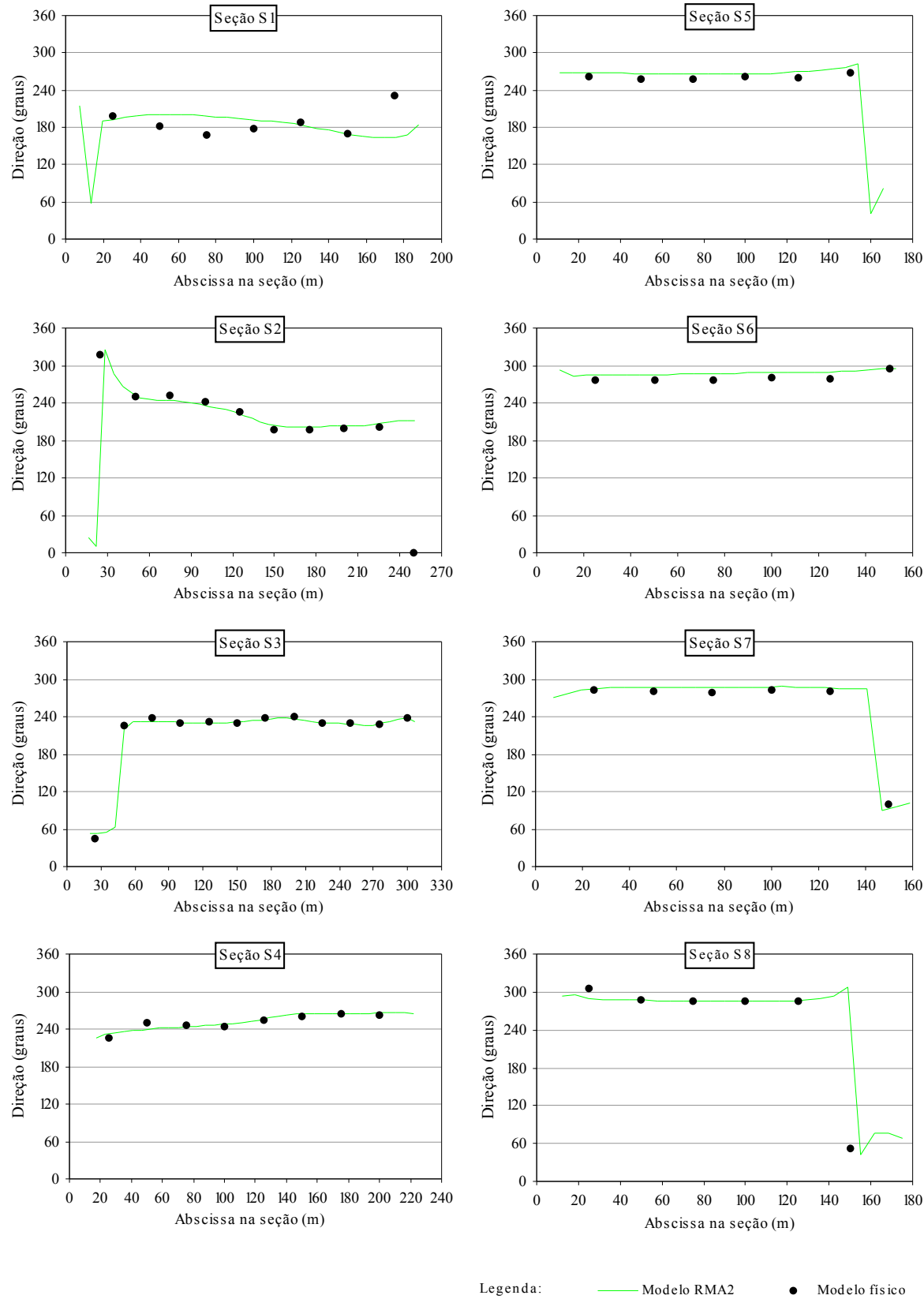
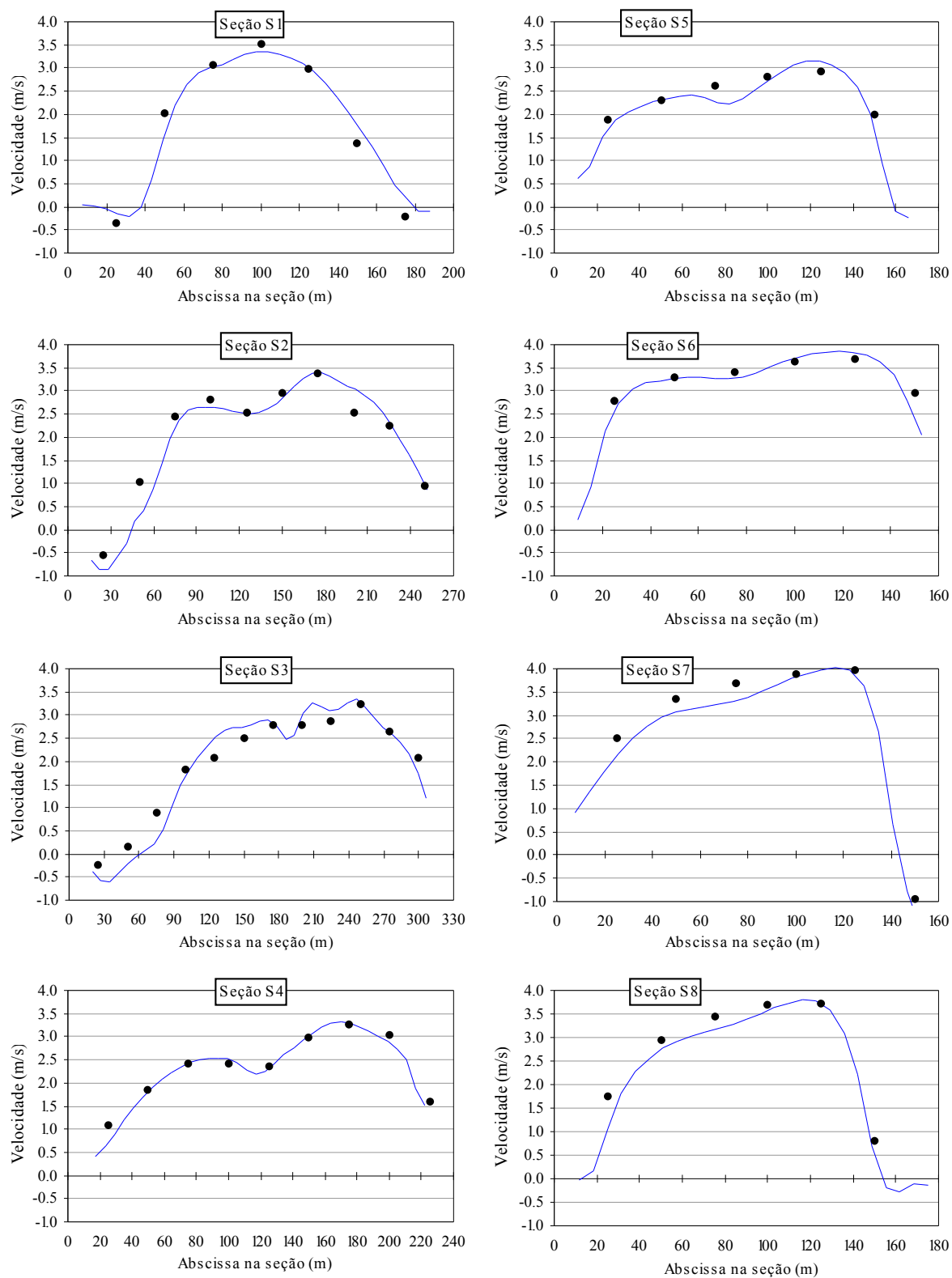
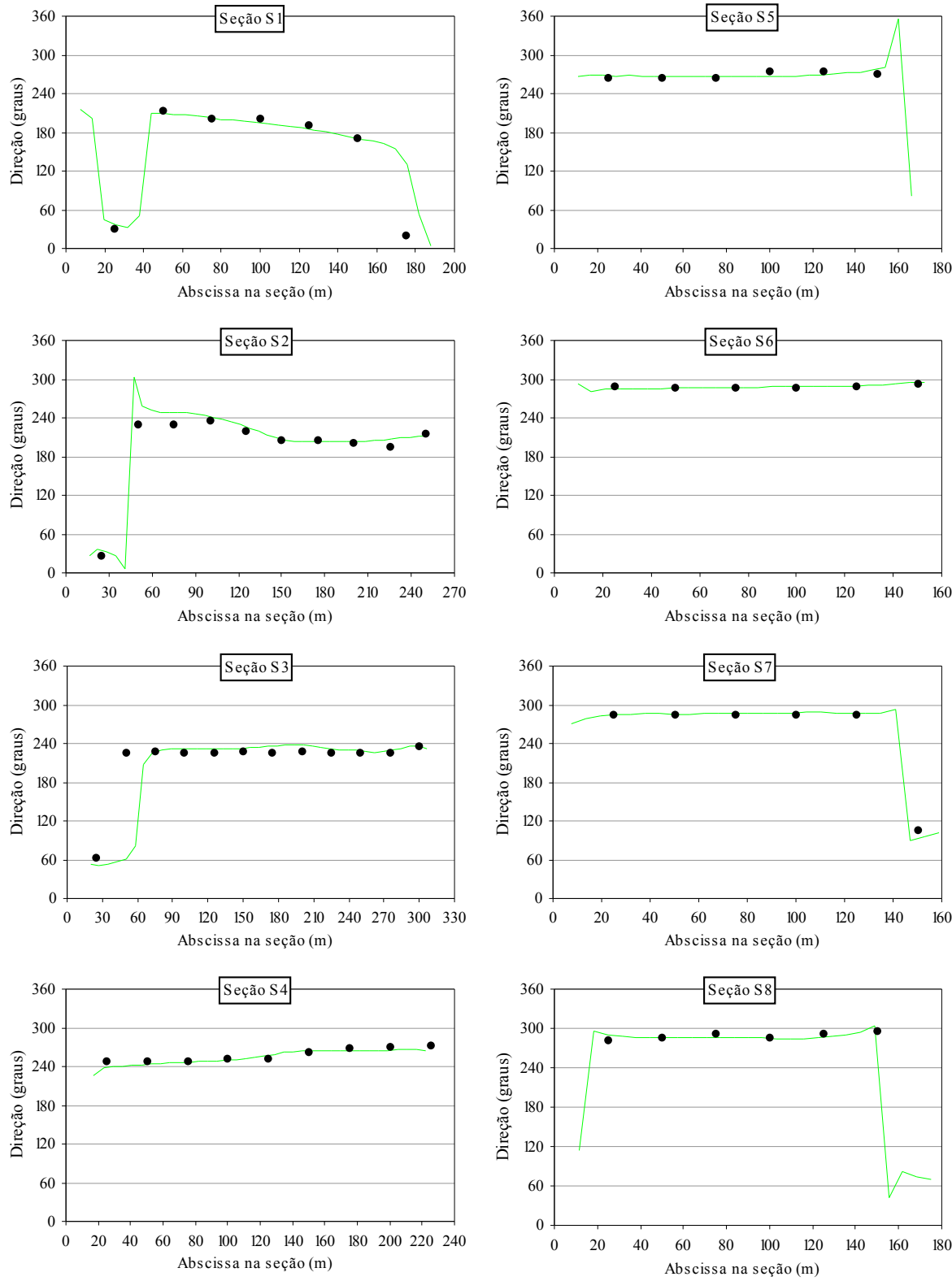


FIGURA 9.30 – MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4a



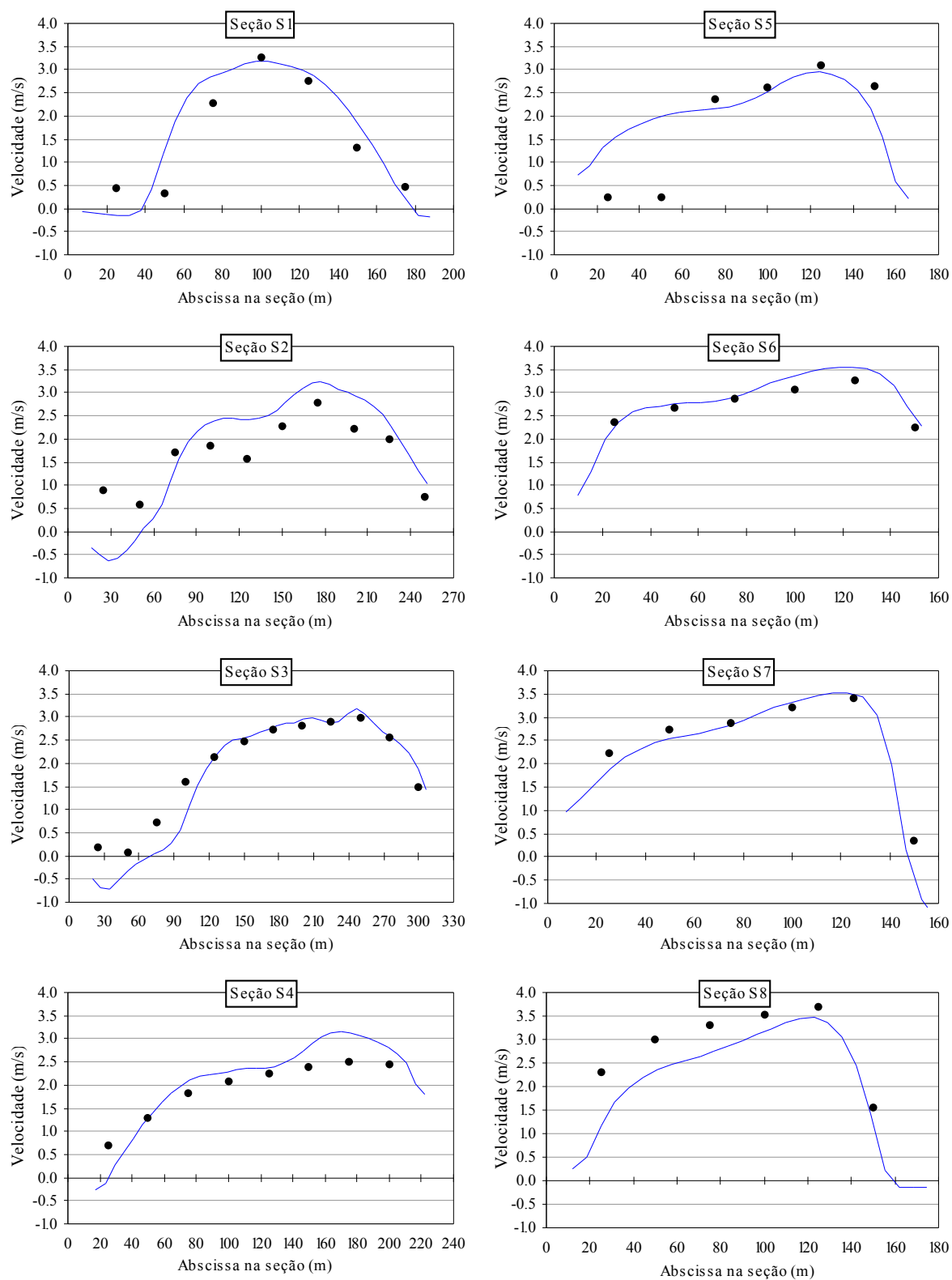
Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

FIGURA 9.31 – DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4a



Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

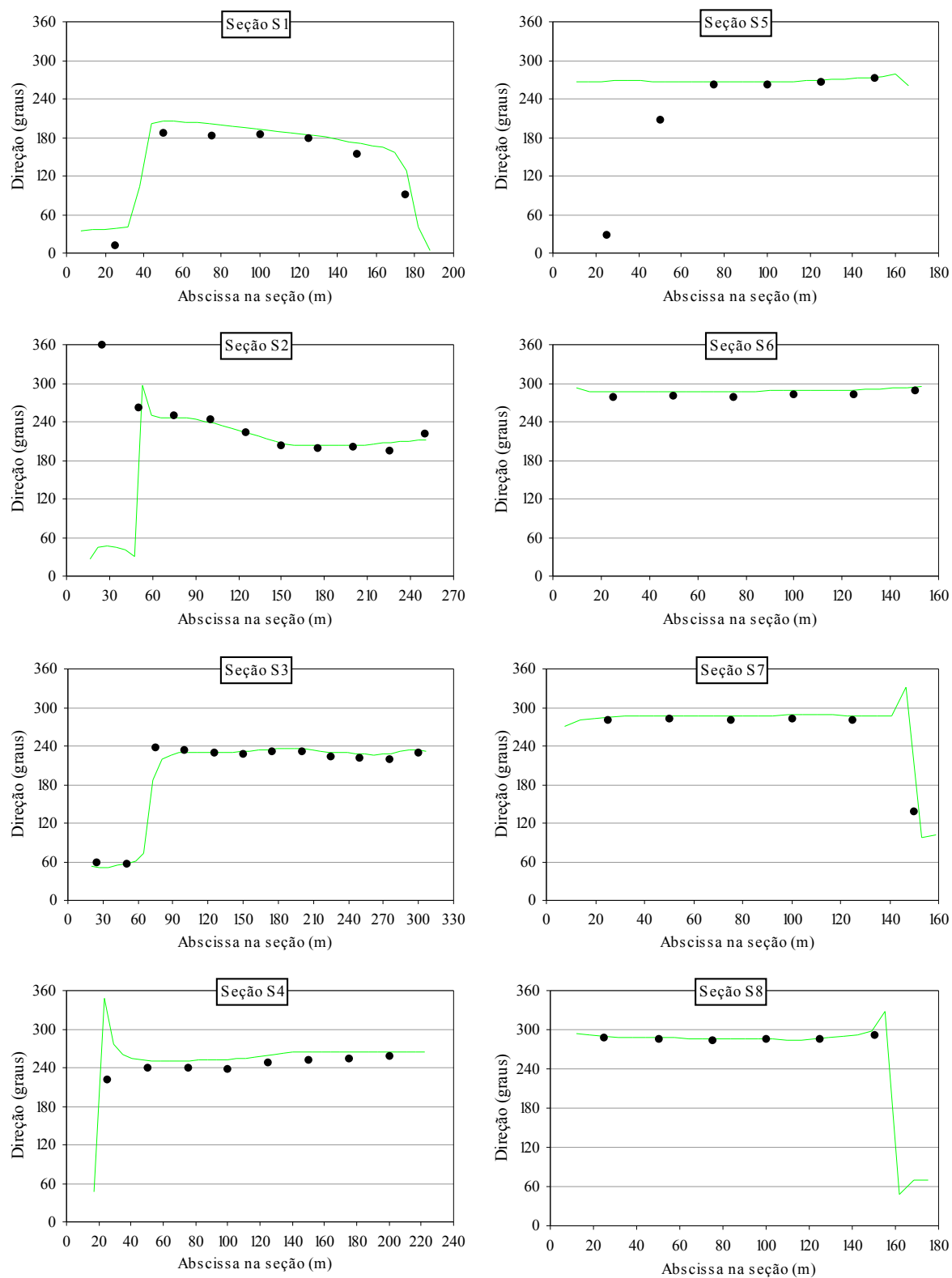
FIGURA 9.32 – MAGNITUDE DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4b



Legenda:

— Modelo RMA2 • Modelo físico

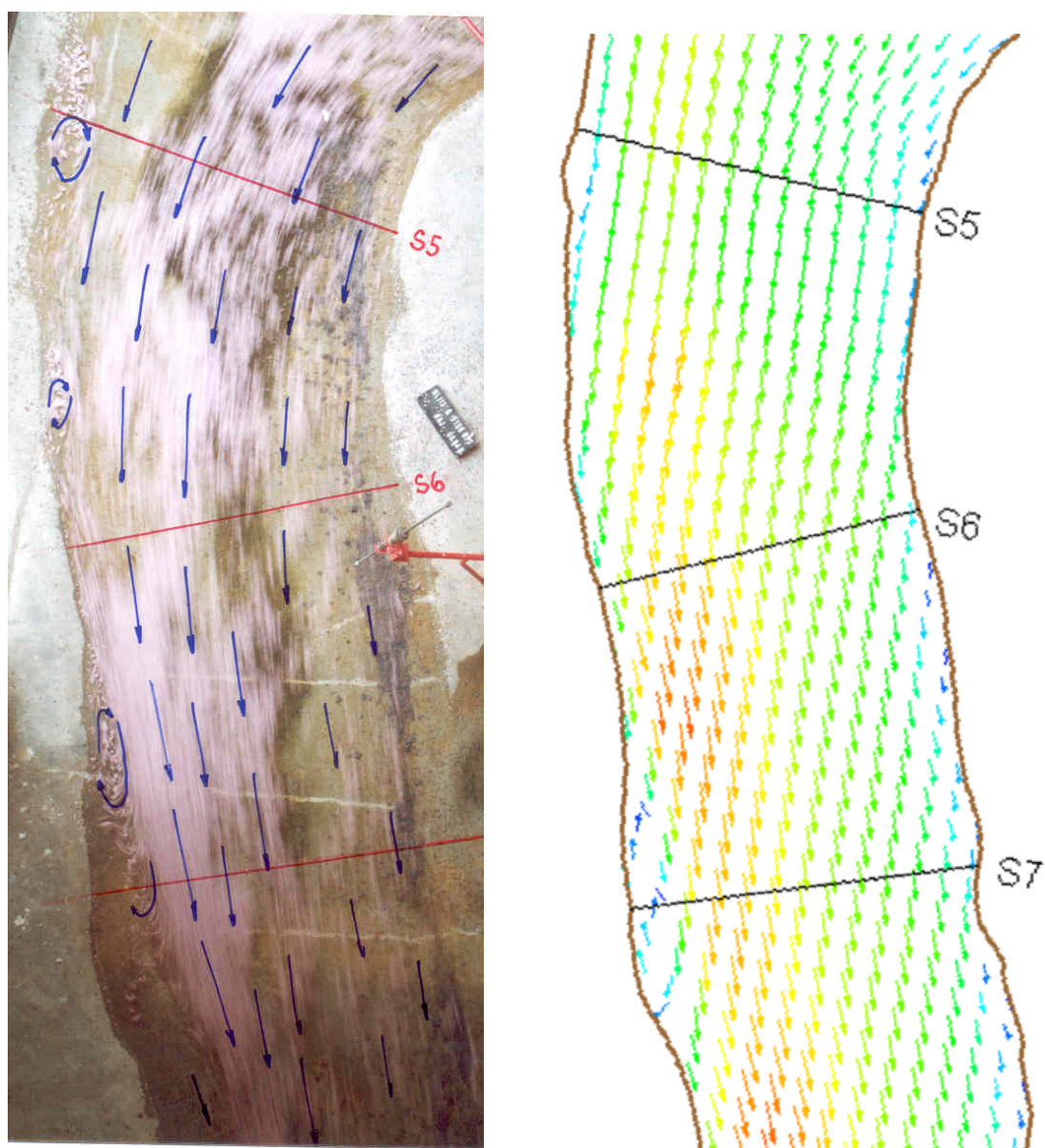
FIGURA 9.33 – DIREÇÃO DAS VELOCIDADES NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – ENSAIO 4b



Legenda: — Modelo RMA2 • Modelo físico

Uma observação feita no ensaio 4b parece interessante. Nos ensaios em modelo físico nota-se com frequência que os confetes lançados sobre a superfície tendem a se agrupar nas regiões de maior velocidade. Esse efeito é nítido na fotografia da figura 9.34 do ensaio 4b, entre as seções S5 e S8. Na mesma figura é apresentado o mapa de velocidade no modelo RMA2, escalonado por cores. Nesse mapa, a concentração das cores vermelho e amarelo junto à margem direita indicam a região de velocidades mais altas, coincidente com a região revelada pelos confetes na fotografia.

FIGURA 9.34 – CAMPO DE ESCOAMENTO NO MODELO FÍSICO E NO MODELO RMA2 CALIBRADO – TRECHO DE JUSANTE – ENSAIO 4b



10 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

10.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o estudo comparativo de um escoamento fluvial simulado em modelo físico e em modelo computacional. Foi escolhido um trecho do Rio Jacuí, no estado do Rio Grande do Sul. O modelo físico foi construído no CEHPAR (Centro de Hidráulica e Hidrologia Prof. Parigot de Souza) na escala geométrica 1:100 e operado de acordo com o critério de semelhança de Froude. O modelo computacional utilizou o programa RMA2, desenvolvido pelo *Resource Management Associates* (EUA) para simulações de escoamentos bidimensionais em planta (modelo 2DH).

A utilização de modelos físicos reduzidos para o estudo deste tipo de escoamento já é consagrada e o CEHPAR detém uma experiência de 45 anos na utilização desses modelos. Portanto, esta dissertação configurou-se, de certa forma, como um trabalho de calibração e validação do modelo computacional com base nas medições feitas no modelo físico. O trabalho permitiu a obtenção de conclusões, principalmente, sobre as características de operação do modelo hidrodinâmico de elementos finitos, sobre a validade dos seus resultados e sobre o processo de modelagem computacional em geral. Essas conclusões são apresentadas a seguir.

10.1.1 Operação do Modelo Computacional

Muitos problemas de estabilidade numérica foram enfrentados durante as simulações com o modelo computacional. O algoritmo do modelo RMA2 não mostrou-se muito robusto, o que foi constatado por fatos como:

- a) uma simulação com critério de convergência de 4 cm (alteração máxima no nível de água de uma iteração para outra) atingiu a convergência, enquanto a mesma simulação com um critério menor, 2 cm, divergiu;

- b) uma alteração de 0,20 m aplicada sobre a condição inicial de nível de água, usada na primeira iteração, foi suficiente para fazer o modelo convergir ou divergir, em alguns casos;
- c) simulações que atingiram a convergência passaram a divergir após a inserção dos efeitos das correntes secundárias.

Os fatores que geralmente dificultam a convergência e aumentam o tempo de processamento são: número de Reynolds da malha alto (viscosidade baixa), coeficiente de rugosidade baixo e aplicação dos efeitos das correntes secundárias. A falta de robustez do RMA2, apontada também por outros autores, tem relação com a formulação de elementos finitos adotada pelo programa.

Uma vantagem evidente do método de elementos finitos está na possibilidade de se utilizar malhas não-estruturadas para a modelagem de domínios com geometria complexa e para variar o grau de refinamento da malha de uma região para outra, conforme o interesse sobre a região. No trecho de rio estudado aqui, com geometria relativamente simples e sem regiões de maior ou menor interesse, não foi tirado proveito dessa vantagem. É provável que um modelo de diferenças finitas, cuja malha estruturada poderia facilmente ter sido elaborada, apresentasse menos problemas de estabilidade da solução numérica e resultados igualmente bons.

Em alguns casos a convergência da solução aconteceu de forma muito lenta, com alterações máximas de 1 mm na profundidade, de uma iteração para outra. Em outros casos, ocorreu o problema oposto: as iterações oscilavam em torno da solução, ou seja, as correções consecutivas tinham mesma magnitude mas sinais opostos. No caso das oscilações, não raramente, a solução numérica acabava divergindo após muitas iterações. Nas duas situações, é possível que o uso de um *coeficiente de relaxação*, opção ausente no RMA2, facilitasse a convergência da solução.

Um artifício muito eficaz para conduzir o modelo à solução foi iniciar as iterações com coeficientes favoráveis à convergência e gradativamente alterá-los, ao longo das

iterações, até os valores desejados. Eventualmente foi também necessário reduzir artificialmente a elevação do fundo em alguns nós, para evitar o surgimento de instabilidades devidas à ocorrência de escoamento supercrítico nesses nós.

A elaboração do arquivo de definição da malha de elementos finitos e de entrada de dados (coeficientes e condições de contorno) deve ser extremamente cautelosa. Por diversas vezes um erro de digitação ou de sintaxe gerou problemas de difícil reconhecimento e rastreo a partir dos resultados.

10.1.2 Processo de Modelagem Computacional

No trecho de rio estudado, todos os fatores cuja sensibilidade foi analisada demonstraram ter influência expressiva sobre os resultados: o coeficiente de rugosidade do leito, o parâmetro de turbulência (Reynolds da malha), a condição de contorno na entrada do modelo e os efeitos das correntes secundárias.

A condição de contorno na entrada (magnitude e ângulo da velocidade em cada nó) teve influência até pouco mais da metade do domínio simulado. Isso deve-se, em parte, à largura relativamente grande da seção de entrada em relação ao domínio. A medição das velocidades na seção de entrada no modelo físico foi essencial para a atribuição correta da condição de contorno de montante no modelo computacional. Numa situação em que não se dispusesse das medições de velocidades na seção entrada, seria necessário afastar essa seção da área de interesse do estudo, modelando um trecho adicional do rio a montante dessa área.

Como esperado, o coeficiente de rugosidade n de Manning mostrou grande influência sobre os níveis de água. Mesmo a variação apenas da rugosidade das margens alterou os níveis de água ao longo do modelo. O coeficiente de rugosidade resultante para a maior parte do domínio foi $n = 0,029$. Esse valor é bastante razoável para o escoamento fluvial em questão, demonstrando que o modelo computacional não requer coeficientes artificiais ou irreais para a simulação adequada do escoamento.

A turbulência foi modelada através do uso do número de Reynolds da malha, em que os coeficientes de viscosidade turbulenta são feitos variáveis de elemento para elemento, em função de seu tamanho e do módulo da velocidade. Esse modelo é bastante simples mas mostrou-se suficiente para simular corretamente o escoamento em questão. Em função dos bons resultados obtidos, não parece justificável a utilização de um modelo mais sofisticado, como o $\kappa - \varepsilon$, no caso estudado, pois envolveria um esforço matemático e computacional muito maior.

A influência da viscosidade turbulenta foi clara. Seu aumento faz os gradientes de velocidade diminuírem e as separações e correntes de retorno desaparecerem. A necessidade de medições de velocidades para a calibragem do modelo de turbulência ficou evidente neste estudo. Apenas medições de níveis seriam insuficientes para a escolha do número de Reynolds da malha, já que os níveis estão fortemente influenciados pela rugosidade do leito. O valor final adotado para o modelo de turbulência foi $Re^{malha} = 20$, fixado para todas as condições de vazão e níveis de água.

A introdução dos efeitos das correntes secundárias na curva do rio provou ser importante, fazendo os resultados do modelo computacional aproximarem-se da realidade.

10.1.3 Validação dos Resultados

O modelo computacional, depois de calibrado, foi capaz de simular qualitativa e quantitativamente bem os resultados obtidos nos oito ensaios realizados no modelo físico. Os formatos e os valores dos gráficos de velocidades e de níveis de água foram concordantes nos dois modelos, em termos gerais. Os coeficientes escolhidos na calibragem do modelo computacional têm caráter geral, ou seja, foram os mesmos em todas as simulações. Isso demonstra que o modelo RMA2 calibrado pode, a princípio, ser utilizado para simulações fora da faixa de condições hidráulicas usadas na calibragem.

Os níveis de água do modelo RMA2 resultaram, em média, ligeiramente acima dos níveis medidos no modelo físico. O coeficiente de rugosidade adotado, $n = 0,029$,

não pôde ser reduzido pela limitação imposta pelos ensaios 1a, 2a, 3a e 4a. Esses ensaios apresentaram regiões com escoamento próximo da condição crítica, situação para a qual o modelo RMA2 não é adequado. A diminuição do coeficiente de rugosidade n reduzia os níveis de água, aumentando os números de Froude locais nas regiões mais críticas e gerando instabilidades numéricas que faziam o modelo divergir. A impossibilidade de simular escoamentos supercríticos é uma limitação que precisa ser considerada para se julgar a aplicabilidade do modelo RMA2 a um determinado caso de escoamento.

Nos gráficos comparativos entre as velocidades nos dois modelos, problemas nas medições do modelo físico ficaram evidentes nos pontos de maior discordância com o modelo RMA2. Algumas medições nitidamente não podem representar a velocidade promediada na vertical, porque, se a representassem, iriam contra o princípio da continuidade da vazão. Aparentemente, para se ter resultados melhores, as medições de velocidades no modelo físico deveriam ter sido feitas de forma mais criteriosa, posicionando-se o medidor de velocidades na profundidade correspondente a 60% da profundidade ou medindo-se a velocidade em diferentes profundidades em cada ponto, para cálculo da média na direção vertical.

As fotografias com traçadores superficiais (confetes) permitiram comparar as linhas de fluxo no modelo físico com o campo de velocidades do modelo RMA2. A semelhança entre os dois resultou bastante satisfatória. As principais correntes de retorno, os canais de fluxo mais veloz e as regiões de separação a jusante das ilhas foram bem reproduzidas pelo modelo computacional.

Algumas correntes de retorno de pequenas dimensões, junto às margens, não surgiram nas simulações computacionais. Embora a adoção de um número de Reynolds da malha mais alto promovesse o aparecimento dessas correntes, preferiu-se adotar o valor de Reynolds da malha que fornecia o melhor ajuste dos gráficos de velocidades. Para simular corretamente essas pequenas recirculações, a abordagem mais correta seria aumentar a resolução da malha de elementos finitos.

A calibragem do modelo físico foi realizada com base apenas em medições de níveis de água no protótipo. A concordância entre as velocidades nos dois modelos é também uma prova de que a calibragem do modelo físico em função de níveis de água é eficaz.

10.2 RECOMENDAÇÕES

Este trabalho teve por objetivo contribuir para a compreensão e a difusão da modelagem hidrodinâmica computacional no CEHPAR, servindo como um ponto de partida para outros trabalhos dessa natureza.

A utilização simultânea de um modelo físico, seja para estudos hidrodinâmicos, seja para pesquisas de transporte de sedimentos ou de qualidade da água, é um recurso poderoso para se obter confiança nas ferramentas computacionais existentes ou em desenvolvimento.

É importante utilizar essas ferramentas com responsabilidade, ou seja, com conhecimento dos fenômenos físicos descritos pelas equações diferenciais e com medições consistentes em campo ou em modelo físico, que permitam a validação do modelo matemático. Em caso contrário, qualquer resultado pode ser considerado um bom resultado, mas que carece de credibilidade.

Há na *internet* programas de domínio público para simulações hidrodinâmicas, de transporte de sedimento e de qualidade da água. Até mesmo programas semelhantes ao RMA2 e com capacidade para simulação de escoamentos supercríticos estavam disponíveis ao final deste trabalho. O CEHPAR dispõe de programas comerciais de CFD de última geração para fins de pesquisa. Um trabalho interessante pode ser feito utilizando-se os dados deste trabalho para comparação com outro modelo. A aplicação de modelos como o MIKE21, o SisBAHIA, o RIVER2D (com capacidade para escoamento supercrítico) e o Delft3D (de diferenças finitas) são opções interessantes.

Um estudo de sensibilidade do grau de refinamento da malha, questão deixada em aberto neste trabalho, pode também ser explorada.

Medições no protótipo, em condições de escoamento semelhantes seriam, sem dúvida, uma contribuição enriquecedora.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements – An Introduction**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1981.
- BERNARD, R. S.; SCHNEIDER, M. L. **Depth-averaged numerical modeling for curved channels**. Washington: US Army Corps of Engineers – Waterways Experiment Station, 1992. Technical report HL-92-9.
- BRADSHAW, P.; CEBECI, T.; WHITELAW, J. H. **Engineering calculation methods for turbulent flow**. London: Academic Press, 1981.
- CEBECI, T.; SMITH A. M. O. **Analisis of turbulent boundary layers**. New York: Academic Press, 1974.
- CHAUDHRY, M. H. **Open-channel flow**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.
- CHOW, V. T. **Open-channel hydraulics**. New York: McGraw-Hill, 1959.
- DAILY, J. W.; HARLEMAN, D. R. F. **Fluid dynamics**. Reading: Addison-Wesley, 1966.
- FORTUNA, A. de O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- FOX, R. W.; McDONALD, **Introdução à mecânica dos fluidos**. Tradução: Ricardo N. N. Koury e Geraldo A. C. França. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2001. Tradução de: Introduction to fluid mechanics.
- FROEHLICH, D. C. **Two-dimensional depth-averaged flow and sediment transport model**. McLean, USA: US Department of Transportation – Research, Development and Technology Turner-Fairbank Highway Research Center, 2002. Manual do *software* FESWMS Flo2DH.
- GEE, D. M.; MacARTHUR, R. C. Development of generalized free surface models using finite element techniques. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN WATER RESOURCES, 2., 1978, London. **Proceedings...** London: Pentech Press, 1978. p. 2.61-2.79.
- US ARMY CORPS OF ENGINEERS – WATERWAYS EXPERIMENT STATION; RESOURCE MANAGEMENT ASSOCIATES **GFGEN – version 4.27**. Lafayette, 19-- . Manual do *software* GFGEN.
- HENDERSON, F. M. **Open channel flow**. London: Macmillan, 1966.
- HINZE, J. O. **Turbulence**. New York: McGraw-Hill, 1959.
- KING, I. P.; NORTON, W. R. Recent applications of RMA's finite element models for two-dimensional hydrodynamics and water quality. In: INTERNATIONAL CONFERENCE

ON FINITE ELEMENTS IN WATER RESOURCES, 2., 1978, London. **Proceedings...** London: Pentech Press, 1978. p. 2.81-2.99.

KING, I. P. **RMA-10 A finite element model for three-dimensional density stratified flow**. Davis: University of California – Department of Civil and Environmental Engineering, 1993. Manual do *software* RMA10.

KING, I. P. *et al.* **Users guide to RMA2 WES version 4.3** [S.l.]: B. P. Donnel, 1997. Manual do *software* RMA2.

LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. **Mathematical models of turbulence**. London: Academic Press, 1972.

LEE, J. K.; FROELICH D.C. **Review of literature on the finite element solution of the two-dimensional surface-water flow in the horizontal plane**. Denver: U.S. Geological Survey, 1986. Circular 1009.

NEZU, I.; NAKAGAWA, H. **Turbulence in open-channel flows**. Rotterdam: A. A. Balkema, 1993.

OLSEN, N. R. B. **Computational fluid dynamics in hydraulic and sedimentation engineering**. [Trondheim]: The Norwegian University of Science and Technology – Department of Hydraulic and Environmental Engineering, 2000. Notas de aula.

RODI, W. **Hydraulics computations with the $\kappa - \varepsilon$ turbulence model**. Applying Hydraulic Research. [S.l.], 19--.

ROSMAN, P. C. C. Modelos de circulação em corpos de água rasos. SILVA, R. C. V. **Métodos numéricos em recursos hídricos**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 1989. v. 1. p. 156-221.

ROSMAN, P. C. C. Subsídios para modelagem de sistemas estuarinos. SILVA, R. C. V. **Métodos numéricos em recursos hídricos**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 1997. v. 3. p. 231-343.

ROSMAN, P. C. C. **SisBAHIA – Sistema base de hidrodinâmica ambiental**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro – Departamento de Recursos Hídricos e Meio Ambiente, 2000.

ROUSE, H. **Fluid mechanics for hydraulic engineers**. New York: Dover Publications, 1961.

RUBIN, H.; ATKINSON, J. **Environmental fluid mechanics**. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001.

SCHLICHTING, H. **Boundary-layer theory**. New-York: McGraw-Hill, 1968.

STOSCHEK, O.; MATHEJA, A. **Sensitivity analysis of numerical solving techniques for modeling sediment transport under tidal conditions**. In: INTERNATI-

ONAL CONFERENCE ON HYDROINFORMATICS, 4., 2000, Iowa City. Disponível em: <www.fi.uni-hannover.de/~material/pdf_veroeffentlichungen/hydroi2000a.pdf> Acesso em: 21 mai. 2004.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. Washington, DC: Taylor & Francis, 1997.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. **A first course in turbulence**. [Cambridge, USA]: The MIT Press, 1972.

OBRAS CONSULTADAS

DAVIES, J. T. **Turbulence phenomena**. New York: Academic Press, 1972.

FRIEDLANDER, S.K.; TOPPER, L. (Ed.). **Turbulence – Classic Papers on statistical theory**. New York: Interscience Publishers, 1961.

MORGAN, K.; TAYLOR, C.; BREBBIA, C. A. **Computer methods in fluids**. London: Pentech Press, 1980.

O'CARROLL, M. J. *et. al.* Modelling and simulation in practice. In: CONFERENCE OF THE NORTH EAST POLYTECHNICS MATHEMATICAL MODELLING AND COMPUTER SIMULATION GROUP, 2., 1979, Teeside. **Proceedings...** North Yorkshire: Emjoc Press, 1980.

OLSEN, N. R. B. **CFD algorithms for hydraulic engineering**. [Trondheim]: The Norwegian University of Science and Technology – Department of Hydraulic and Environmental Engineering, 1999.

RODI, W. **Turbulence models and their application in hydraulics – A state of the art review**. Delft: International Association for Hydraulic Research – IAHR. 1984. 2 ed.

SILVA, R. C. V. (Ed.) **Métodos numéricos em recursos hídricos**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 1999. 4 v.

TAYLOR, C.; MORGAN, K. (Ed.). **Recent advances in numerical methods in fluids**. Swansea: Pineridge Press, 1980.

APÊNDICE 1 - ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS DA MALHA

APÊNDICE 2 - ARQUIVOS DE ENTRADA DAS SIMULAÇÕES 1b E 4a
CALIBRADAS

```

T1 Arquivo: 1b50.bc
T2 Geometria usada: 1b3m.gbin
T3 Data: Márcio F. Friedrich
CO Ihot-Ohot-Igeo-Obin--X--Ofull-Osum-Oeddy-Ovor
$! 0 0 60 64 0 0 1 1 1
SI 1
$M 4
CO ---- Seções de entrada e sada e continuity checklines
GCL 1 49 47 45 43 41 39 37 35
GCL 33 31 29 27 25 23 21 19 17
GCL 15 13 11 9 7 5 -1
GCL 2 3422 3420 3418 3416 3414 3412 3410 3408
GCL 8 3406 3404 3402 3400 3398 3396 3394 3392
GCL 3390 3388 3386 3384 3382 3380 3378 3376 3374
GCL 3372 3370 3368 3366 3364 3362 3360 3358 3356
GCL 3354 -1
GCL 3 20247 20245 20243 20241 20239 20237
GCL 20235 20233 20231 20229 20227 20225 20223 20221 20219
GCL 20217 20215 20213 20211 20209 20207 20205 -1
CO ---- Densidade da água em kg/m3
FD 1 1000
CO ---- Initial condition - (n.a. para início dos cálculos)
IC 55.50
CO ---- Turbulência - Peclet
PE 1 5.0 1 1 1 1 1
CO ---- Rugosidade por material (2=margens)
HNT 1 0.050
HNT 2 0.065
HNT 3 0.050
CO ---- Critério de convergência da solução
TI 200 1 0.02 0.02
CO ---- Valores listados na solução
TR 1 -1 1 0
CO ---- Nós listados no "summary results"
TRN 5 7 9 11 13 15 17 19
TRN 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
TRN 41 43 45 47 49
CO
TRN 1136 1138 1140 1142 1144 1146 1148 1150
TRN 1152 1154 1156 1158 1160 1162 1164 1166 1168 1170
TRN 1172 1174 1176 1178 1180 1182 1184 1186
CO
TRN 3092 3094 3096 3098 3100 3102 3104 3106
TRN 3108 3110 3112 3114 3116 3118 3120 3122 3124 3126
TRN 3128 3130 3132 3134 3136 3138 3140 3142 3144 3146
TRN 3148 3150 3152 3154 3156 3160
CO
TRN 5841 5843 5845 5847 5849 5851 5853 5855 5857
TRN 5859 5861 5863 5865 5867 5869 5871 5873 5875 5877
TRN 5879 5891 5893 5895 5897
TRN 5899 5901 5903 5905 5907 5909 5911 5913
CO
TRN 9220 9222 9224 9226 9228 9230 9232 9234 9236
TRN 9238 9240 9242 9244 9246 9248 9250 9252 9254 9256
TRN 9258 9260 9262 9264 9266 9268 9270 9272 9274 9276
TRN 9278 9280
CO
TRN 11729 11731 11733 11735 11737 11739 11741 11743 11745
TRN 11747 11749 11751 11753 11755 11757 11759 11761 11763 11765
TRN 11767 11769 11771 11773
CO
TRN 14317 14319 14321 14323 14325 14327 14329 14331 14333
TRN 14335 14337 14339 14341 14343 14345 14347 14349 14351 14353
TRN 14355 14357 14359 14361 14363
CO
TRN 16617 16619 16621 16623 16625 16627 16629 16631 16633
TRN 16635 16637 16639 16641 16643 16645 16647 16649 16651 16653
TRN 16655 16657 16659 16661 16663
CO
TRN 20205 20207 20209 20211 20213 20215 20217 20219 20221

```

```

TRN 20223 20225 20227 20229 20231 20233 20235 20237 20239 20241
TRN 20243 20245 20247
CO ----- Defindo "steady" ou "dynamic state"
TZ 0
CO ----- Azimute das vazões específicas na entrada
BAN 5 2.9682
BAN 71 2.9682
BAN 7 3.0027
BAN 75 3.0666
BAN 9 3.1313
BAN 78 2.9524
BAN 11 2.6885
BAN 81 2.4363
BAN 13 2.3476
BAN 87 2.2492
BAN 15 2.2017
BAN 93 2.2593
BAN 17 2.3292
BAN 99 2.3810
BAN 19 2.4137
BAN 105 2.4425
BAN 21 2.5176
BAN 111 2.5793
BAN 23 2.6339
BAN 117 2.7034
BAN 25 2.7644
BAN 123 2.7936
BAN 27 2.7936
BAN 128 2.7936
BAN 29 2.7936
BAN 131 2.7936
BAN 31 2.7952
BAN 134 2.8633
BAN 33 2.9266
BAN 137 2.9737
BAN 35 2.9927
BAN 140 3.0121
BAN 37 3.0098
BAN 143 2.9907
BAN 39 2.9712
BAN 146 3.0170
BAN 41 3.0807
BAN 149 3.1457
BAN 43 3.1735
BAN 152 3.2066
BAN 45 3.2166
BAN 155 3.1838
BAN 47 3.1527
BAN 158 3.1427
BAN 49 3.1427
CO ----- Vazões específicas na entrada
BQN 5 0.003
BQN 71 0.141
BQN 7 0.330
BQN 75 0.517
BQN 9 0.704
BQN 78 0.801
BQN 11 0.909
BQN 81 1.071
BQN 13 1.156
BQN 87 1.200
BQN 15 1.224
BQN 93 1.095
BQN 17 0.975
BQN 99 1.058
BQN 19 1.209
BQN 105 1.423
BQN 21 1.776
BQN 111 2.171
BQN 23 2.588

```

```

BQN 117 2.990
BQN 25 3.435
BQN 123 3.814
BQN 27 4.190
BQN 128 4.465
BQN 29 4.866
BQN 131 5.561
BQN 31 6.297
BQN 134 6.457
BQN 33 6.640
BQN 137 6.644
BQN 35 6.407
BQN 140 6.037
BQN 37 5.679
BQN 143 5.271
BQN 39 4.871
BQN 146 4.203
BQN 41 3.563
BQN 149 2.998
BQN 43 2.410
BQN 152 1.715
BQN 45 1.172
BQN 155 0.821
BQN 47 0.451
BQN 158 0
BQN 49 0
CO ---- Nível de água na seção de saída
BHL 3 55.27
CO -----
VO 1 0.001 0.001 5.0 0.5 2
TS -1 -1
TV 100 100 1 1 2
CO -----
REV ---
PE 1 6.0 1.0 1 1 1 1
REV ---
PE 1 8.0 1.0 1 1 1 1
REV ---
PE 1 10.0 1.0 1 1 1 1
REV ---
PE 1 12.0 1.0 1 1 1 1
REV ---
PE 1 14.0 1.0 1 1 1 1
VO 1 0.001 0.001 5.0 0.5 2
REV ---
PE 1 16.0 1.0 1 1 1 1
REV ---
PE 1 17.0 1.0 1 1 1 1
HNT 1 0.045
REV ---
PE 1 18.0 1.0 1 1 1 1
HNT 1 0.040
VO 1 0.001 0.001 5.0 0.5 2
REV ---
PE 1 19.0 1.1 1 1 1 1
HNT 1 0.034
REV ---
PE 1 20.0 1.1 1 1 1 1
HNT 1 0.029
VO 1 0.001 0.001 5.0 0.5 2
TS -1 -1
TV 100 100 1 1 2
END

```

```

T1 Arquivo 4a50.bc
T2 Geometria usada: 4b3m.gbin
T3 Data: 11/03/03 Márcio F. Friedrich
CO Ihot-0hot-Igeo-0bin--X--0full-0sum-0eddy-0vor
$! 0 0 60 64 0 0 1 1 1
SI 1
$M 4
CO ---- Mudanças na malha
CO GNN 4049 632.7 40203.6 57.0
CO GNN 4176 637.2 40189.3 57.0
CO GNN 4178 632.8 40194.6 57.0
CO GNN 4180 628.4 40199.9 57.0
GNN 4311 624.2 40196.2 57.0
GNN 4307 633.3 40185.5 57.0
GNN 4309 628.7 40190.8 57.0
CO GNN 4311 624.2 40196.2 57.0
CO GNN 4442 620.0 40192.4 57.0
CO GNN 15009 462.3 39634.8 59.4
CO ---- Seções de entrada e sada e continuity checklines
GCL 1 51 49 47 45 43 41 39 37 35
GCL 33 31 29 27 25 23 21 19 17
GCL 15 13 11 9 7 5 3 1 -1
GCL 2 3426 3424 3422 3420 3418 3416 3414 3412 3410
GCL 3408 3406 3404 3402 3400 3398 3396 3394 3392
GCL 3390 3388 3386 3384 3382 3380 3378 3376 3374
GCL 3372 3370 3368 3366 3364 3362 3360 3358 3356
GCL 3354 3352 3350 -1
GCL 3 20253 20251 20249 20247 20245 20243 20241 20239 20237
GCL 20235 20233 20231 20229 20227 20225 20223 20221 20219
GCL 20217 20215 20213 20211 20209 20207 20205 20203
GCL -1
CO ---- Densidade da água em kg/m3
FD 1 1000
CO ---- Initial condition - (n.a. para início dos cálculos)
IC 61.0
CO ---- Turbulência - Peclet
PE 1 5.0 1 1 1 1 1
CO ---- Rugosidade constante para cada material
HNT 1 0.035
HNT 2 0.065
HNT 3 0.050
CO ---- Critério de convergência da solução
TI 200 1 0.02 0.02
CO ---- Valores listados na solução
TR 1 -1 1 0
CO ---- Nós listados no "summary results"
TRN 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19
TRN 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
TRN 41 43 45 47 49 51
CO
TRN 1132 1134 1136 1138 1140 1142 1144 1146 1148 1150
TRN 1152 1154 1156 1158 1160 1162 1164 1166 1168 1170
TRN 1172 1174 1176 1178 1180 1182 1184 1186 1188 1190
TRN 1192
CO
TRN 3088 3090 3092 3094 3096 3098 3100 3102 3104 3106
TRN 3108 3110 3112 3114 3116 3118 3120 3122 3124 3126
TRN 3128 3130 3132 3134 3136 3138 3140 3142 3144 3146
TRN 3148 3150 3152 3154 3156 3158 3160 3162 3164
CO
TRN 5839 5841 5843 5845 5847 5849 5851 5853 5855 5857
TRN 5859 5861 5863 5865 5867 5869 5871 5873 5875 5877
TRN 5879 5881 5883 5885 5887 5889 5891 5893 5895 5897
TRN 5899 5901 5903 5905 5907 5909 5911 5913 5915
CO
TRN 9218 9220 9222 9224 9226 9228 9230 9232 9234 9236
TRN 9238 9240 9242 9244 9246 9248 9250 9252 9254 9256
TRN 9258 9260 9262 9264 9266 9268 9270 9272 9274 9276
TRN 9278 9280 9282 9284 9286 9288
CO

```

```

TRN 11727 11729 11731 11733 11735 11737 11739 11741 11743 11745
TRN 11747 11749 11751 11753 11755 11757 11759 11761 11763 11765
TRN 11767 11769 11771 11773 11775 11777 11779
CO
TRN 14315 14317 14319 14321 14323 14325 14327 14329 14331 14333
TRN 14335 14337 14339 14341 14343 14345 14347 14349 14351 14353
TRN 14355 14357 14359 14361 14363 14365
CO
TRN 16615 16617 16619 16621 16623 16625 16627 16629 16631 16633
TRN 16635 16637 16639 16641 16643 16645 16647 16649 16651 16653
TRN 16655 16657 16659 16661 16663 16665
CO
TRN 20203 20205 20207 20209 20211 20213 20215 20217 20219 20221
TRN 20223 20225 20227 20229 20231 20233 20235 20237 20239 20241
TRN 20243 20245 20247 20249 20251 20253
CO ---- Defindo "steady" ou "dynamic state"
TZ 0
CO ----- Azimute das vazões específicas na entrada
BAN 1 4.0165
BAN 2 4.2874
BAN 3 4.6923
BAN 4 5.0688
BAN 5 5.2189
BAN 6 5.3888
BAN 7 3.3103
BAN 8 2.8527
BAN 9 2.8006
BAN 10 2.8669
BAN 11 2.9174
BAN 12 2.9399
BAN 13 2.8876
BAN 14 2.8523
BAN 15 2.8372
BAN 16 2.8412
BAN 17 2.8443
BAN 18 2.8533
BAN 19 2.8638
BAN 20 2.8727
BAN 21 2.8797
BAN 22 2.8861
BAN 23 2.8914
BAN 24 2.8940
BAN 25 2.8964
BAN 26 2.9066
BAN 27 2.9258
BAN 28 2.9453
BAN 29 2.9672
BAN 30 2.9903
BAN 31 3.0137
BAN 32 3.0164
BAN 33 3.0191
BAN 34 3.0218
BAN 35 3.0248
BAN 36 3.0282
BAN 37 3.0393
BAN 38 3.0560
BAN 39 3.0728
BAN 40 3.0895
BAN 41 3.1048
BAN 42 3.1188
BAN 43 3.1343
BAN 44 3.1510
BAN 45 3.1657
BAN 46 3.1762
BAN 47 3.1879
BAN 48 3.1930
BAN 49 3.1945
BAN 50 3.1965
BAN 51 0.0000
CO ----- Vazões específicas na entrada

```

BQN	1	0.43
BQN	2	0.40
BQN	3	0.40
BQN	4	0.46
BQN	5	0.48
BQN	6	0.50
BQN	7	0.39
BQN	8	1.99
BQN	9	3.90
BQN	10	5.91
BQN	11	8.12
BQN	12	10.63
BQN	13	13.91
BQN	14	17.27
BQN	15	20.71
BQN	16	23.05
BQN	17	25.36
BQN	18	28.91
BQN	19	32.71
BQN	20	37.39
BQN	21	40.68
BQN	22	43.78
BQN	23	46.86
BQN	24	49.90
BQN	25	53.02
BQN	26	54.77
BQN	27	55.82
BQN	28	55.89
BQN	29	55.71
BQN	30	57.10
BQN	31	58.47
BQN	32	57.73
BQN	33	57.00
BQN	34	55.02
BQN	35	51.35
BQN	36	47.07
BQN	37	44.39
BQN	38	42.53
BQN	39	40.69
BQN	40	40.04
BQN	41	39.50
BQN	42	38.48
BQN	43	34.65
BQN	44	29.72
BQN	45	25.02
BQN	46	21.15
BQN	47	17.56
BQN	48	13.43
BQN	49	9.66
BQN	50	0.13
BQN	51	0.01
CO	----	Nível de água na seção de saída
BHL	3	59.92
VO 1	0.001	0.001 5.0 0.5 2
TS	-1	-1
TV	100	100 1 1 2
CO	-----	
REV	---	
PE 1	8.0	1.0 1 1 1 1
REV	---	
PE 1	10.0	1.0 1 1 1 1
REV	---	
PE 1	12.0	1.0 1 1 1 1
REV	---	
PE 1	14.0	1.0 1 1 1 1
HNT	1	0.035
VO 1	0.001	0.001 5.0 0.5 2
REV	---	
PE 1	16.0	1.0 1 1 1 1
REV	---	

```
PE 1 17.0 1.0 1 1 1 1
HNT 1 0.035
REV ---
PE 1 18.0 1.0 1 1 1 1
HNT 1 0.033
VO 1 0.001 0.001 5.0 0.5 2
REV ---
PE 1 19.0 1.1 1 1 1 1
HNT 1 0.031
REV ---
PE 1 20.0 1.1 1 1 1 1
HNT 1 0.029
VO 1 0.001 0.001 5.0 0.5 2
TS -1 -1
TV 100 100 1 1 2
END
```