

**MICHAEL MÄNNICH**

**DESENVOLVIMENTO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS E  
NUMÉRICAS DA EQUAÇÃO DE RICHARDS**

**Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.**

**Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kolodynskie Guetter**

**CURITIBA**

**2008**

# TERMO DE APROVAÇÃO

MICHAEL MÄNNICH

## DESENVOLVIMENTO DE SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE RICHARDS

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kolodynskie Guetter  
Departamento de Hidráulica e Saneamento, UFPR

Prof. Dr. Eduardo Dell'Avanzi  
Departamento de Construção Civil da Engenharia Civil, UFPR

Prof. Dr. Heinz Dieter Oscar August Fill  
Departamento de Hidráulica e Saneamento, UFPR

Prof. Dr. Eloy Kaviski  
Departamento de Hidráulica e Saneamento, UFPR

Curitiba, 10 de janeiro de 2008

Dedico esta dissertação à Priscila Karina Altvater que sempre esteve presente ao meu lado nesta jornada.

## AGRADECIMENTOS

É muito bom terminar estes dois anos e ter tanto a agradecer a tantos. É muito bom dizer obrigado a todos que, neste período, apesar dos surtos de euforia, incerteza, cansaço, incapacidade, alegria e tristeza, simplesmente se mantiveram presentes. Por isso meus sinceros agradecimentos...

... aos meus pais, Wolfgang e Grete, pelo amor, pela compreensão e pela paciência.

... à Priscila, por aparecer na minha vida durante essa jornada, se tornar a pessoa mais importante pra mim e com quem quero compartilhar o restante dela.

... ao Jonas, por estar sempre disposto a ajudar, dar bons conselhos e pelas animadas conversas de diversas naturezas. Obrigado por ter se tornado um grande colega durante as aulas, um companheiro na sala de estudos e um amigo na vida.

... ao meu orientador, Prof. Alexandre Kolodynskie Guetter, por ser um interlocutor paciente, ouvir com interesse todas as questões e dúvidas. Pelas longas conversas e conselhos não apenas referentes aos trabalhos e à dissertação. E tenha certeza que absorvi todo o conhecimento que me passou e tudo que ouvi de ti contribuiu para meu amadurecimento e formação de opinião.

... ao meu orientador de monografia, Prof. Eduardo Dell'Avanzi, que ainda na graduação me preparou bem e a ele devo meu bom desempenho nas disciplinas do mestrado. Foi sob sua orientação que me inspirei ainda mais em fazer mestrado e num futuro seguir a carreira acadêmica. Obrigado pelo rigor e constante cobrança durante a produção da pesquisa.

... aos professores Alexandre Kolodynskie Guetter, Eloy Kaviski, Gilberto Bobko e Heinz Dieter Oscar August Fill, por serem os melhores professores que já tive. Obrigado pelas excelentes aulas ministradas, e foi isto que me inspirou muito para a carreira que desejo seguir.

... ao professor Cristóvão Vicente Scapulatempo Fernandes, pela cobrança e estímulo, e por depositar confiança em mim. E ainda estou te devendo uma coca-cola.

... ao secretário de departamento, Luis, e à secretária da Pós-Graduação, Isaura, por cuidarem da parte burocrática chata.

... aos colegas e amigos Ângelo, Cláudio, Franciele, Raquel, Márcio, Marianne, Mariane e Judith, pela companhia.

... aos demais colegas do Mestrado.

... aos amigos Alexandre, Bruno, Daniel, Graciele, Rafael e Ricardo.

... à Capes, pela concessão da bolsa.

... à todos que, direta ou indiretamente contribuíram, agradeço e dedico o resultado deste trabalho.

“Nenhum problema pode ser resolvido pelo mesmo grau de consciência que o gerou.”

Albert Einstein

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	viii
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	x
<b>LISTA DE ABREVIATURAS</b> .....	xi
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	xii
<b>RESUMO</b> .....	xiii
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	4
2.1 ABORDAGEM HISTÓRICA .....	4
2.2 A EQUAÇÃO DE RICHARDS .....	5
2.3 PROPRIEDADES HIDRÁULICAS DOS SOLOS .....	8
2.4 AS SOLUÇÕES ANALÍTICAS .....	10
2.5 A EVOLUÇÃO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS .....	13
2.6 SOLUÇÃO NUMÉRICA .....	18
<b>3 SOLUÇÃO ANALÍTICA</b> .....	21
<b>4 SOLUÇÕES NUMÉRICAS</b> .....	30
4.1 APROXIMAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS .....	30
4.1.1 Os Nós Internos .....	33
4.1.2 O Nó no Contorno Inferior .....	34
4.1.3 O Nó no Contorno Superior .....	35
4.2 APROXIMAÇÃO POR VOLUMES FINITOS .....	36
4.2.1 Os Volumes Reais Internos .....	36
4.2.2 O Volume Fictício no Contorno Inferior .....	37
4.2.3 O Volume Fictício no Contorno Superior .....	39
4.3 ALGORITMO DE SOLUÇÃO .....	40
<b>5 RESULTADOS</b> .....	41
5.1 RESULTADOS ANALÍTICOS .....	41
5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	50
5.2.1 Tempo de Processamento .....	50
5.2.2 Balanço de Massa .....	51
5.2.3 Erros Numéricos .....	52
5.2.3.1 Evolução dos erros .....	54
5.2.3.2 Erros no tempo .....	59
5.2.3.3 Erros no espaço .....	60
5.2.3.4 Erros gerais .....	61
5.2.3.5 Erros de variáveis secundárias .....	62
<b>6 CONCLUSÃO</b> .....	64
6.1 AS SEGUINTEs CONCLUSÕES .....	64
6.2 INVESTIGAÇÕES FUTURAS .....	64
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	66
<b>APÊNDICES</b> .....	74

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	- VOLUME DE CONTROLE DO SOLO .....	6
FIGURA 2.2	- COMPARAÇÃO ENTE SWRCs .....	9
FIGURA 3.1	- SEÇÃO TRANSVERSAL DO VOLUME DE CONTROLE .....	24
FIGURA 3.2	- REPRESENTAÇÃO DAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO 3.30 ....	28
FIGURA 4.1	- ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS .....	32
FIGURA 4.2	- ESQUEMA DO CONTORNO INFERIOR EM DIFERENÇAS FINITAS .....	34
FIGURA 4.3	- ESQUEMA DO CONTORNO SUPERIOR EM DIFERENÇAS FINITAS .....	35
FIGURA 4.4	- ESQUEMA DO CONTORNO INFERIOR EM VOLUMES FINITOS .....	38
FIGURA 4.5	- ESQUEMA DO CONTORNO SUPERIOR EM VOLUMES FINITOS .....	39
FIGURA 5.1	- PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 1 .....	42
FIGURA 5.2	- PERFIL DE UMIDADE 1 .....	43
FIGURA 5.3	- PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 2 .....	44
FIGURA 5.4	- PERFIL DE UMIDADE 2 .....	45
FIGURA 5.5	- PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 3 .....	46
FIGURA 5.6	- INFILTRAÇÃO NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR DA FIGURA 5.1, 5.2 E 5.3 .....	46
FIGURA 5.7	- PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 4 .....	47
FIGURA 5.8	- INFILTRAÇÃO NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR DA FIGURA 5.5 .....	48
FIGURA 5.9	- PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 5 .....	49
FIGURA 5.10	- INFILTRAÇÃO NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR DA FIGURA 5.7 .....	49
FIGURA 5.11	- BALANÇO DE MASSA PARA O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS .....	52
FIGURA 5.12	- BALANÇO DE MASSA PARA O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS .....	52
FIGURA 5.13	- COMPARAÇÃO ANALÍTICO-NUMÉRICO .....	53
FIGURA 5.14	- EVOLUÇÃO DOS ERROS .....	55
FIGURA 5.15	- EVOLUÇÃO DOS ERROS TEMPORAIS PARA VOLUMES FINITOS .....	59
FIGURA 5.16	- EVOLUÇÃO DOS ERROS TEMPORAIS PARA DIFERENÇAS FINITAS .....	60
FIGURA 5.17	- EVOLUÇÃO DOS ERROS ESPACIAIS PARA VOLUMES FINITOS .....	61
FIGURA 5.18	- EVOLUÇÃO DOS ERROS ESPACIAIS PARA DIFERENÇAS FINITAS .....	61

FIGURA 5.19 - EVOLUÇÃO DOS ERROS GERAIS PARA DIFERENÇAS E VOLUMES FINITOS .....	62
FIGURA 5.20 - ERROS NO CALCULO DO FLUXO DE BASE .....	63

## LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1	- NUMERAÇÃO DOS CASOS SIMULADOS .....	50
TABELA 5.2	- TEMPOS DE PROCESSAMENTO PARA VOLUMES FINITOS .....	51
TABELA 5.3	- TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA DIFERENÇAS FINITAS .....	51

## LISTA DE ABREVIATURAS

- LPSs - Esquemas de Parametrização da Superfície do Solo
- SWRC - Curva de Retenção de Água no Solo
- TIL - Transformada Inversa de Laplace
- Res - Resíduo
- TDMA - Tri Diagonal Matrix Algorithm
- BM - Balanço de Massa

## LISTA DE SÍMBOLOS

$K_s$	-	Condutividade Hidráulica Saturada
$K$	-	Condutividade Hidráulica Não-Saturada
$\theta$	-	Umidade
$\theta_r$	-	Umidade Residual
$\theta_s$	-	Umidade Saturação
$\theta_u$	-	Umidade Máxima na Superfície
$\theta_\infty$	-	Umidade no Infinito do Domínio
$\psi$	-	Potencial capilar
$L$	-	Espessura da Camada de Solo
$z$	-	Altura
$h$	-	Carga Hidráulica
$q$	-	Fluxo de Água
$t$	-	Tempo
$\tau$	-	Tempo
$D$	-	Difusividade
$\alpha$	-	Parâmetro
$m$	-	Parâmetro
$n$	-	Parâmetro
$\beta$	-	Parâmetro
$\gamma$	-	Parâmetro
$\lambda$	-	Parâmetro
$a$	-	Parâmetro
$b$	-	Parâmetro
$v$	-	Parâmetro
$D_0$	-	Parâmetro
$k$	-	Parâmetro
$K_1$	-	Parâmetro
$K_2$	-	Parâmetro
$K_3$	-	Parâmetro
$\chi$	-	Sorvidade
$s$	-	Variável de Laplace
$i$	-	Número Imaginário
$\Delta z$	-	Diferencial de Altura
$\Delta t$	-	Diferencial de Tempo
$\delta$	-	Erro Numérico
$\varepsilon_T$	-	Erros no Tempo
$\varepsilon_E$	-	Erros no Espaço
$E$	-	Erros Gerais
$\Delta$	-	Erros de Variáveis Secundárias

## RESUMO

A equação de Richards é uma equação diferencial parcial não linear que governa o processo de infiltração e escoamento em solos não-saturados. Em virtude desta não linearidade da equação de Richards sua solução tanto analítica quanto numérica é difícil. Para obter soluções analíticas são necessárias simplificações e a introdução de funções que relacionam a condutividade hidráulica com o potencial capilar e o teor de umidade volumétrico com o potencial capilar para linearização da equação. Apesar de haverem soluções para esta equação, raras exploram o efeito de condições de contorno transientes. Em virtude da carência de soluções analíticas com condições de contorno transientes e, portanto, mais realistas, e da extensa aplicabilidade para solução de problemas em diversas áreas de engenharia, o presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de soluções analíticas para estes casos deficitários. A solução analítica desenvolvida é inédita e considera uma condição de contorno transiente bastante genérica e sua simplificação ao caso estacionário conduz ao resultado já obtido por SRIVASTAVA e YEH (1991). O trabalho explora também a solução da equação através das técnicas numéricas de diferenças finitas e volumes explícitos, discretizados na forma implícita. Os resultados numéricos são confrontados com a solução analítica apresentados na forma de erros numéricos. A análise destes erros sugere que a técnica de volumes finitos possui desempenho superior a de diferenças finitas.

## ABSTRACT

The Richard's equation is a non-linear partial differential equation that governs the process of infiltration and flow in non-saturated soils. Because of this non-linearity, analytical and numerical solutions are difficult to obtain. Analytical solutions can be obtained by linearization and by the introduction of functions that relates hydraulic conductivity and the moisture content with the potential capillary. There are some solutions to this equation, but a small group of them explore the effect of transient boundary conditions. Because of the lack of analytical solutions for transient boundary conditions (the more realistic case) and the extensive application in engineering problems, this work aims to develop analytical solutions for these cases. A new analytical solution is developed for a transient boundary condition and its simplification to a steady-state boundary condition leads to the result already obtained by SRIVASTAVA and YEH (1991). Solutions of the equation through two numerical techniques are explored: finite differences and finite volumes, both in the implicit form. The numerical results are confronted with the analytical solution, presented in the form of numerical errors. The analysis of these errors suggests that the technique of finite volume has a superior performance than finite differences.

## 1. INTRODUÇÃO

A água no solo se encontra geralmente em movimento. Deste modo, quando é adicionada uma determinada quantidade de água num solo, como por exemplo, através da irrigação ou chuva, ela penetra e redistribui-se no seu interior (LIBARDI, 1978). Estes fenômenos, de infiltração e movimento de água no solo, são importantes em aplicações práticas em áreas como hidrologia, hidrogeologia, engenharia agrônômica, engenharia de petróleo, engenharia ambiental, ciência dos solos, geofísica e gestão de recursos naturais (ROSS, 1990) (NARASIMHAN, 1998). Para solucionar esses problemas pode-se utilizar soluções analíticas ou numéricas da Equação de Richards (RICHARDS, 1931) que governa o escoamento da água em solos não saturados como alternativa aos modelos empíricos propostos na literatura (CHOW; MAIDMENT; MAYS, 1988).

A qualidade da informação da umidade do solo em esquemas de parametrização da superfície do solo (LSPs) de modelos acoplados da superfície-atmosfera é essencial para produzir simulações hidrometeorológicas realistas. Muitos estudiosos mostraram que a umidade do solo é fundamental na determinação de fluxos de energia e umidade da terra à atmosfera. A evaporação da água do solo, os fluxos do calor sensível à atmosfera, a precipitação, a infiltração, o escoamento superficial, e a drenagem para as água subterrâneas (água que sai da zona não-saturada e que entra na zona saturada) são também funções da umidade do solo (LEE; ABRIOLA,1999) (IRANNEJAD ; HENDERSON-SELLERS ; SHARMEEN, 2003).

A avaliação correta das propriedades hidráulicas do solo é de suma importância para avaliar a performance de sistemas de irrigação, drenagem e poços, além da modelagem do transporte de água e solutos no solo. Todavia a determinação da curva de retenção de umidade envolve equilibrar o solo sob certos valores de potencial capilar e medir o teor de umidade volumétrico correspondente durante infiltração ou drenagem. A condutividade hidráulica em função do potencial capilar pode ser obtida impondo condições de contorno superior e inferior numa coluna de solo e avaliando o fluxo de água no estado estacionário. Contudo, é mais fácil medir a

resposta de processos de infiltração (teor de umidade, infiltração...) e obter as propriedades do solo resolvendo o problema inverso do que medir diretamente a propriedade. Deste modo, inúmeros estudos se concentram em formular métodos para solucionar o problema inverso e obter as propriedades hidráulicas do solo a partir de um único experimento de escoamento no solo. O objetivo da análise inversa é obter parâmetros das funções hidráulicas do solo, que, quando usados em modelos de escoamento, descrevam as mesmas propriedades de escoamento do experimento, através de processos de otimização. Muitos trabalhos apresentam algoritmos que buscam os parâmetros que minimizam as diferenças entre o valor medido e o simulado (ABBASPOUR; SCHULIN; van GENUCHTEN, 2001) (RITTER et al., 2003) (JHORAR et al., 2004) (BITTERLICH et al., 2004) (MINASNY; FIELD, 2005).

As soluções analíticas da Equação de Richards são comumente usadas para avaliar e comparar o desempenho e a precisão de esquemas numéricos (ROSS; PARLANGE, 1994). As soluções analíticas da equação diferencial também oferecem informações importantes sobre a física do fenômeno e permitem identificar a relação e dependência do resultado com as variáveis. Em contrapartida, métodos numéricos, que podem ser ferramentas poderosas para resolver problemas complexos e não-lineares, podem não fornecer informações suficientes sobre a solução e sofrem de erros numéricos e problemas de convergência (MENZIANI; PUGNAGHI; VINCENZI, 2007).

As soluções analíticas da Equação de Richards na sua maioria derivam de linearizações da equação, baseadas em considerações a respeito da difusividade da água no solo e da dependência da condutividade hidráulica com o teor de umidade do solo (BASHA, 2002). As considerações mais comuns são a dependência exponencial da condutividade hidráulica com o potencial capilar e a difusividade da água no solo constante ou proporcional ao inverso do teor de umidade. As condições de contorno aplicadas para obter as soluções são pouco diversificadas, não avaliando condições mais realistas.

Dada a raridade de soluções analíticas da Equação de Richards nas quais se aplicam condições de contorno transientes e a grande amplitude de aplicações em

diversas áreas da ciência o objetivo deste trabalho é desenvolver novas soluções analíticas da Equação de Richards utilizando uma técnica de linearização comum nas últimas décadas de pesquisas e condições de contorno distintas daquelas aplicadas até o presente.

Este trabalho é apresentado em 6 capítulos. O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica contendo, a dedução da equação de Richards, as técnicas para obtenção de soluções analíticas, algumas soluções analíticas desenvolvidas até o presente e a avaliação de suas diferenças e familiaridades. O capítulo 3 apresenta a dedução analítica da solução da equação de Richards desenvolvida no presente trabalho. O capítulo 4 apresenta a metodologia adotada para obtenção de soluções numéricas da equação. O capítulo 5 resume os principais resultados analíticos e a comparação entre soluções numéricas e analíticas enfocando os erros. O sexto e último capítulo reúne as principais conclusões do trabalho.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 ABORDAGEM HISTÓRICA

O marco inicial e histórico nas pesquisas de escoamentos de fluidos em meios porosos ocorreu com a Lei de Darcy. O modelo conceitual desenvolvido por DARCY<sup>1</sup>, citado por NARASIMHAN (1998), em seus trabalhos empírico-investigativos, para escoamento de fluidos em solo saturados é matematicamente análogo à formulação de Fourier para transferência (transporte) de calor em meios sólidos e fluidos estacionários. Estudiosos como Fourier, Ohm, Poiseuille e Bernoulli, influenciaram o desenvolvimento experimental e matemático do trabalho de Darcy e o produto deste trabalho de Darcy é uma formulação matemática na qual o fluxo de água é proporcional ao gradiente do potencial (NARASIMHAN, 1998). Todavia, este resultado é válido apenas a meios saturados.

Pesquisadores como Dupuit, Forchheimer e Slichter dedicaram-se a solucionar os problemas não-transientes de movimento de água no solo. Slichter identificou a funcionalidade da condutividade hidráulica com relação à viscosidade na Lei de Darcy, até então tratada como um coeficiente empírico. Edgar Buckingham foi o primeiro pesquisador a estudar o problema transiente, ou seja, o movimento de água em meios não saturados. Teórica e experimentalmente ele definiu o potencial capilar e propôs uma equação similar a de Darcy, na qual a condutividade hidráulica é função do potencial capilar e não mais considerada constante (NARASIMHAN, 1998). O trabalho de BUCKINGHAM<sup>2</sup>, citado por PHILIP (1957), deu base teórica à lei empírica de Darcy e estendeu seu uso também a meios não-saturados. Em vista disso, a Lei de Darcy é comumente também chamada de Lei de Darcy-Buckingham (NARASIMHAN, 1998).

---

<sup>1</sup>DARCY, H., Détermination Des Lois D'Écoulement De L'Eau à Travers Le Sable. Appendiz, Note D in *Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, edited by V. Dalmont, p.590-594, Paris, 1856.

<sup>2</sup>BUCKINGHAM, E., Studies on the movement of soil moisture, Bull., v.38, p.61, U.S. Dep. Of Agric., Washington, D.C., 1907.

O desenvolvimento do tensiômetro contribuiu para uma maior evolução da pesquisa na área e é considerado como um instrumento que revolucionou a física dos solos. Em função do advento deste instrumento, medições de umidade do solo e relação com a pressão capilar foram possíveis (NARASIMHAN, 1998). Combinando o trabalho de Buckingham na equação do movimento de água em solos não-saturados com a avaliação das curvas de retenção de umidade, RICHARDS (1931) deduziu a equação diferencial parcial não-linear que governa o escoamento transiente de água em solos não-saturados. A equação de Richards passou duas décadas sem solução. No início dos anos 50 houve alguns esforços, no entanto só foi solucionada com grandes simplificações e utilizando métodos numéricos (NARASIMHAN, 1998).

## 2.2 A EQUAÇÃO DE RICHARDS

Matematicamente a Lei de Darcy (FEDDES et al., 1988) no caso de solos isotrópicos pode ser expressa por:

$$\vec{q} = -K\nabla h \quad (2.1)$$

onde,  $q$  [L/T] é o volume de água que atravessa uma área unitária perpendicular ao escoamento por unidade de tempo,  $K$  [L/T] é a condutividade hidráulica do solo, que caracteriza um solo quanto à transmissão de água, expressa nas mesmas unidades de  $q$  e  $h$  [L] é a carga hidráulica da água em dimensões de altura. No caso de solos não saturados e considerando a velocidade de fluxo desprezível, a carga  $h$  é a soma do potencial capilar  $\psi$  [L] (negativo para escoamento não-saturado) e a altura  $z$  [L] (positiva para cima):

$$h = \psi + z \quad (2.2)$$

Um volume de controle diferencial contendo solo não-saturado é representado na Figura 2.1. As dimensões das direções coordenadas são  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , o volume é o

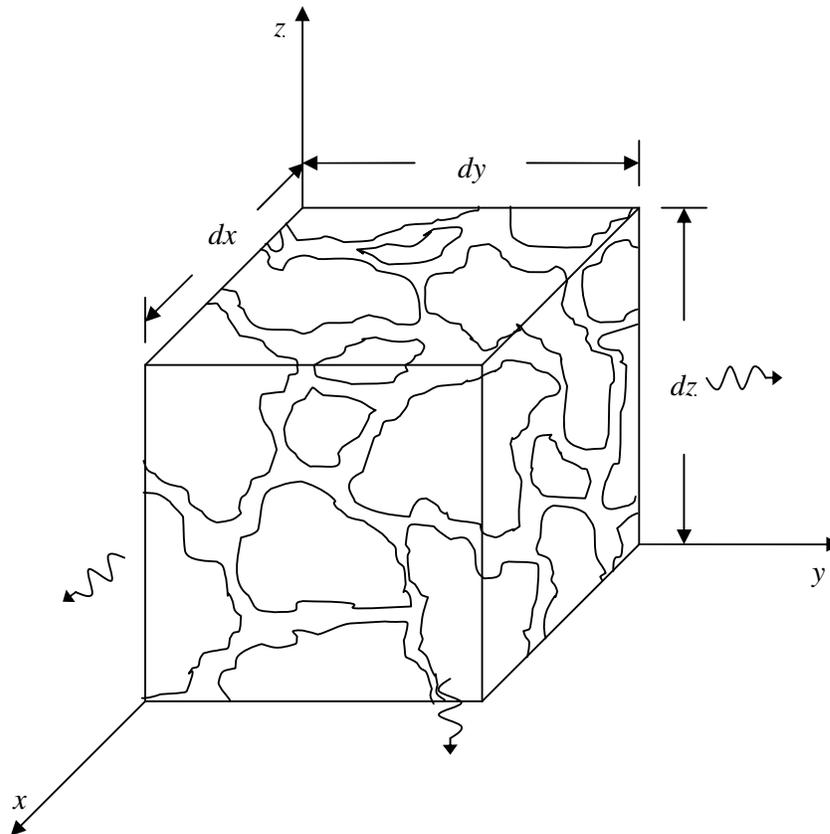
produto  $dx.dy.dz$  e o conteúdo de água no volume de controle é  $\theta.dx.dy.dz$ , onde  $\theta$  [ $L^3/L^3$ ] é a umidade volumétrica definida como a razão entre o volume de água e o volume total:

A equação da conservação da massa (FOX; MACDONALD, 2001), deduzida para um volume de controle representado pela Figura 2.1 em coordenadas cartesianas, para o escoamento em meio-poroso pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot \vec{q} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

na qual, o primeiro termo é a divergência do fluxo  $\vec{q}$  e  $\partial\theta/\partial t$  é a taxa na qual a umidade varia com o tempo.

FIGURA 2.1 – VOLUME DE CONTROLE DO SOLO



Substituindo a Equação 2.1 e 2.2 na Equação 2.3:

$$\nabla \cdot [-K(\psi)\nabla(\psi + z)] + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

A Equação 2.4 é chamada de Equação de Richards, pois foi proposta pela primeira vez por RICHARDS (1931). A equação é uma equação diferencial parabólica não-linear em virtude da variável K ser função do potencial capilar (BASHA, 1999).

Atualmente a Equação de Richards também é classificada como um caso particular da equação generalizada de difusão fracionária com ordem de derivada fracionária igual a 1 (YAKOV; TIMLIN; RAWLS, 2003) (KWOK; LENZI, 2004).

Considerando um solo isotrópico com propriedades homogêneas em toda sua extensão e que o escoamento é predominantemente vertical, as derivadas nas direções x e y podem ser desconsideradas, de modo que a Equação 2.4 passa a ser unidimensional e assume a forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial(\psi + z)}{\partial z} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.5)$$

E em outros termos, expandindo as derivadas:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial K}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.6)$$

onde, a difusividade D é dada por:

$$D = K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (2.7)$$

## 2.3 PROPRIEDADES HIDRÁULICAS DOS SOLOS

Estudos do movimento de água em solos saturados são importantes, todavia, em geral eles se encontram em estado não saturado. Um solo na condição não-saturada apresenta diferenças em relação ao estado saturado. Na condição não-saturada, devido a presença de ar, os poros não são completamente ocupados por água, reduzindo-se com isto a área efetiva de fluxo. Assim, a condutividade hidráulica é menor do que na condição saturada e dependente da umidade ( $\theta$ ) ou do potencial capilar ( $\psi$ ) do solo (PREVEDELLO, 1996).

A função-k do solo exprime a relação entre a condutividade hidráulica do solo e o potencial capilar. Esta relação pode ser função tanto do potencial capilar quanto da umidade, uma vez que ambas estão relacionadas pela curva de retenção de água do solo (SWRC). A SWRC é a relação entre o potencial capilar e a umidade do solo.

Uma função amplamente utilizada para representar a SWRC foi apresentada por VAN GENUCHTEN (1980):

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[ \frac{1}{1 + (\alpha\psi)^n} \right]^m \quad (2.8)$$

onde,  $\theta_r$  é a umidade residual,  $\theta_s$  é a umidade de saturação, e  $\alpha$ ,  $n$  e  $m$  são parâmetros empíricos.

A função-k do solo, apresentada por VAN GENUCHTEN (1980), é particularmente interessante por que, partindo da teoria desenvolvida por MUALEM (1976) pode-se derivar analiticamente a função-k do solo baseando-se na SWRC.

Aplicando-se o modelo de VAN GENUCHTEN (1980) de SWRC a teoria de MUALEM (1976), têm-se para a condutividade hidráulica:

$$K(\psi) = K_s \left[ \frac{1 - (\alpha\psi)^{n-1} \left[ 1 + (\alpha\psi)^n \right]^{-m}}{\left[ 1 + (\alpha\psi)^n \right]^{m/2}} \right]^2 \quad (2.9)$$

onde,  $K_S$  é a condutividade hidráulica saturada e  $m = 1 - \frac{1}{n}$ . A relação entre  $m$  e  $n$  faz ocorrer uma função de  $K$  para todo o espectro de  $\psi$ .

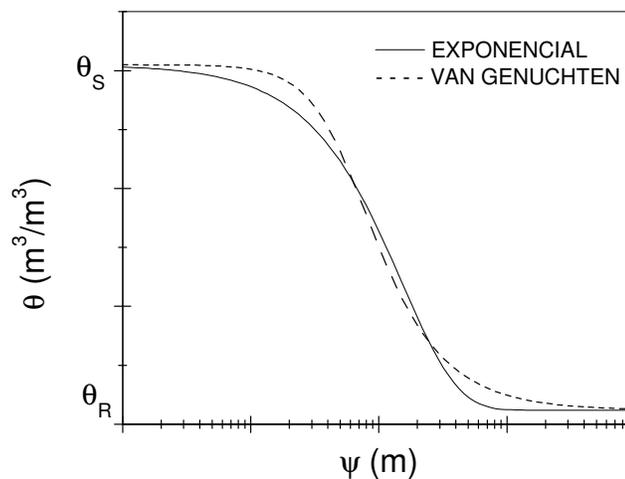
O modelo de VAN GENUCHTEN (1980), em função de sua precisão no ajuste da SWRC e na estimativa da função- $k$  do solo é amplamente utilizado. No entanto, para este trabalho, em função da necessidade de funções mais simples, são utilizadas as relações (sendo a segunda proposta por GARDNER (1958)):

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha\psi} \quad (2.10)$$

$$K = K_S e^{\alpha\psi} \quad (2.11)$$

A Figura 2.2 apresenta uma comparação entre o modelos de SWRC exponencial (Equação 2.10) e de VAN GENUCHTEN (1980), com a variável  $\psi$  em escala logarítmica. Nota-se que a curva exponencial representa razoavelmente bem o comportamento do modelo de VAN GENUCHTEN que em geral se ajusta bem aos solos naturais.

FIGURA 2.2 – COMPARAÇÃO ENTRE SWRCs



## 2.4 AS SOLUÇÕES ANALÍTICAS

A análise da infiltração transiente é geralmente avaliada através de soluções numéricas principalmente pelo fato da dificuldade de obtenção de soluções analíticas da equação de Richards. Embora os métodos numéricos sejam poderosas ferramentas para resolver problemas complexos não-lineares, soluções analíticas, utilizando aproximações e simplificações razoáveis, fornecem informações qualitativas, permitem identificar relações entre as variáveis, realizar aproximações e simplificações, e podem ser ajustadas aos casos reais mediante uso de coeficientes apropriados. Também podem ser utilizadas para avaliar a precisão de esquemas numéricos (BASHA, 1999).

Para obter soluções para a Equação 2.5 são necessárias duas condições de contorno e uma condição inicial (BASHA, 1999). A condição inicial consiste em especificar o potencial capilar em todo o domínio do problema em  $t = 0$ :

$$\psi(z,0) = h_i(z) \quad (2.12)$$

As condições de contorno fisicamente plausíveis na superfície do solo podem ser de dois tipos - (i) potencial capilar prescrito:

$$\psi(0,t) = h_0(t) \quad (2.13)$$

e (ii) fluxo vertical prescrito, cuja intensidade deve ser inferior à condutividade hidráulica saturada do solo:

$$K(\psi) \left. \frac{\partial(\psi + z)}{\partial z} \right|_{z=0} = q(t) \quad (2.14)$$

O primeiro tipo é usado, por exemplo, para modelar métodos de irrigação por encharcamento da superfície, na qual ocorre umidade de saturação

(BRAESTER,1973). O segundo tipo representa infiltração da chuva ou irrigação por aspersão, nas quais a infiltração se dá por uma taxa especificada (BRAESTER,1973) (BASHA,1999).

A condição de contorno no limite inferior da coluna de solo,  $L$ , é sempre do potencial capilar prescrito:

$$\psi(L, t) = h_L(t) \quad (2.15)$$

Todavia, podem ser considerados dois domínios distintos para o problema: semi-infinito e limitado. No domínio limitado,  $L$  assume um determinado valor. Uma sucção nula, por exemplo, caracteriza a presença do lençol freático no nível  $L$ , na qual o teor de umidade é saturado. Outro valor para o potencial capilar pode representar a camada inferior de uma cobertura de aterro sanitário, que é influenciada pela drenagem dos líquidos. No domínio semi-infinito,  $L \rightarrow \infty$ , o qual é aplicado em casos nos quais a condição na camada inferior do solo não influencia muito o processo de infiltração e dinâmica de água no solo próxima a camada superior.

Soluções analíticas da Equação 2.5 podem ser obtidas apenas para algumas funções especiais da condutividade hidráulica. A função mais utilizada é a relação exponencial entre a condutividade e o potencial capilar (função-k) proposta por GARDNER (1958):

$$K(\psi) = K_s e^{\alpha\psi} \quad (2.16)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro do solo que representa a importância dos efeitos gravitacionais em relação ao efeito da capilaridade. Assume valores pequenos em solos de textura fina, nos quais a capilaridade é dominante, e valores grandes em solos de textura mais grossa, nos quais o efeito gravitacional domina o escoamento. O parâmetro pode ser interpretado como o valor inverso do potencial capilar de entrada de ar no solo.

A linearização é possível através de uma nova variável obtida pela transformação de Kirchhoff (AMES, 1965):

$$u = \int_{-\infty}^{\psi} K(\xi) d\xi \quad (2.17)$$

que para o caso da Equação 2.16,  $u = K(\psi)/\alpha$ .

A linearização para a equação transiente só é possível se a condutividade hidráulica for linearmente relacionada com o teor de umidade ( $\theta = a + bK$ ), o que é geralmente escrito na seguinte forma:

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha\psi} \quad (2.18)$$

A função que relaciona  $\theta$  e  $\psi$  é chamada de curva de retenção de umidade do solo (SWRC).

A aplicação das Equações 2.16 a 2.18 para linearizar a equação de Richards será denominado TÉCNICA A. Nesta a difusividade da água se torna constante e igual a  $D = K_s/\alpha(\theta_s - \theta_r)$ .

Uma vez linearizada a equação ela pode ser resolvida por várias técnicas de resolução de equações diferenciais parciais como: transformada de Laplace, funções de Green e separação de variáveis, aplicando ou não outras transformações das funções.

Outra técnica (TÉCNICA B) utilizada para linearizar a equação de Richards é utilizar uma função para a difusividade da água proposta por FUJITA (1952):

$$D(\theta) = \frac{D_0}{(1 - v\theta)^2} \quad (2.19)$$

e para a condutividade hidráulica uma função da forma (BROADBRIDGE e WHITE; 1988):

$$K(\theta) = \beta + \gamma(b - \theta) + \frac{\lambda}{2(b - \theta)} \quad (2.20)$$

A aplicação das Equações 2.19 e 2.20 à Equação 2.6, e após a aplicação das transformações de Kirchhoff, Storm e Hopf-Cole (BROADBRIDGE; WHITE, 1988) tornam a equação linear e solúvel.

## 2.5 A EVOLUÇÃO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS

BRAESTER (1973), WARRICK (1975), LOMEN e WARRICK (1978) BATU (1982), BATU (1983) e WARRICK e LOMEN (1983) resolveram a Equação de Richards na forma da Equação 2.6, todavia considerando a coordenada  $z$  com o sentido positivo para baixo o que altera o sinal do segundo termo do lado direito da expressão. A solução é obtida aplicando a TÉCNICA A.

BRAESTER (1973) obteve soluções para dois casos por analogia a problemas de difusão de calor (CARSLAW; JAEGER, 1959, p.388). O primeiro é a infiltração sob fluxo constante na superfície num solo inicialmente seco num domínio semi-infinito. O segundo é a solução de uma coluna de solo com um nível freático constante sob as mesmas condições inicial e de fluxo na superfície. No entanto, comparando com resultados numéricos, a solução analítica não representa o perfil de umidade do solo. Entretanto a acurácia da solução próxima a superfície nos tempos iniciais é satisfatória. BRAESTER (1973) considera valores para  $D$  tais que satisfazem  $\theta = \theta_u$  em  $z = 0$  e  $t \rightarrow \infty$ . Onde  $\theta_u$  é o teor de umidade volumétrico máximo na superfície do solo. A difusividade para o domínio semi-infinito e finito são, respectivamente, dados por:

$$D = \frac{K(\theta_u)}{\alpha(\theta_u - \theta_r)} \quad (2.21)$$

$$D = \frac{K(\theta_u)(1 - e^{-\alpha L})}{\alpha(\theta_u - \theta_r) - e^{-\alpha L}(\theta_s - \theta_r)} \quad (2.22)$$

WARRICK (1975) obteve uma solução na forma integral, sob a condição de uma função de fluxo genérica na superfície, e um teor de umidade constante no infinito do domínio ( $\theta_\infty$ ), e a condição inicial uma função geral que representa o teor de umidade em cada ponto do espaço. Foi aplicada uma transformação de variáveis da forma da Equação 2.19 para simplificar a equação original.

$$\theta^*(z, t) = \left( \frac{\theta}{\theta_\infty} - 1 \right) e^{-\frac{kz}{2D} - \frac{k^2 t}{4D}} \quad (2.23)$$

WARRICK (1975) mostrou ainda que a solução para funções de infiltração na forma de pulsos unitários constantes é a sobreposição das soluções para cada pulso.

LOMEN e WARRICK (1978) resolveram a Equação 2.5 sob as mesmas condições de contorno utilizadas por WARRICK (1975), mas com a adição de uma função de retirada de água pelas plantas no lado direito da Equação 2.5. Como condição, esta função deve ser apenas função da profundidade.

BATU (1982) e BATU (1983) solucionaram a equação de Richards bidimensional sob a condição de um solo inicialmente seco e condições de contorno com o solo seco no infinito e fluxos nas direções vertical e horizontal nulos no infinito. Entende-se por infinito no modelo bidimensional  $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$ . A condição de contorno superior é uma função apenas da variável do espaço horizontal,  $x$ , mas podem ser definidas diferentes funções em cada intervalo do espaço. A solução é obtida aplicando a transformada de Laplace e na seqüência utilizando o método de separação de variáveis para resolver a equação agora só em termos das coordenadas espaciais. BATU (1982) apresentou uma solução mais geral para a função de infiltração e BATU (1983) particularizou a solução para funções de infiltração periódicas. Estas soluções são de grande interesse no projeto de sistemas de irrigação e outras aplicações na engenharia.

WARRICK e LOMEN (1983) obtiveram uma solução bi-dimensional na forma integral sob as mesmas considerações e condições de contorno utilizadas por LOMEN e WARRICK (1978).

BROADBRIDGE e WHITE (1988) resolveram a equação através da TÉCNICA B, e determinaram os parâmetros das Equações 2.19 e 2.20 em função de propriedades do solo e das condições de contorno e inicial. A solução foi obtida sob a condição de uma taxa de infiltração constante aplicada na superfície do solo e teor de umidade inicial constante num perfil de solo infinito, no qual o teor de umidade no infinito é igual ao inicial.

SANDER et al. (1988) resolveram a Equação de Richards sob as mesmas condições utilizadas para a primeira solução de BRAESTER (1973), todavia, propondo respectivamente para a condutividade a seguinte relação:

$$K(\theta) = \frac{K_1 + K_2\theta + K_3\theta^2}{(1 - v\theta)} \quad (2.24)$$

onde  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  e  $v$  são constantes e arbitradas conforme propriedades do solo e condições de contorno.

BROADBRIDGE e ROGERS (1990) de maneira similar ao trabalho de BROADBRIDGE e WHITE (1988) resolveram a equação de Richards para uma coluna de solo semi-infinita sob condição inicial de um solo saturado e fluxo nulo na superfície, com o intuito de avaliar a drenagem e redistribuição de água no solo.

WARRICK, LOMEN e ISLAS (1990) adaptaram a solução de BROADBRIDGE e WHITE (1988) para condições iniciais definidas constantes em intervalos da coordenada vertical.

WARRICK, ISLAS e LOMEN (1991) estenderam a solução de BROADBRIDGE e WHITE (1988) para funções de infiltração na forma:

$$q = \sum_{i=1}^N R_i, \quad t_i < \tau < t_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

onde  $\tau$  é o tempo,  $R_i$  são valores constantes para cada intervalo de tempo  $(t_i, t_{i+1})$ .

SRIVASTAVA e YEH (1991) obtiveram soluções através da TÉCNICA A e aplicando a transformada de Laplace. A condição inicial é igual a solução do problema estacionário submetido a um fluxo prescrito na superfície e um potencial capilar constante aplicada na base da coluna. As condições de contorno são: fluxo constante na superfície e potencial capilar constante igual ao aplicado para a solução estacionária. Foram obtidas soluções para um solo homogêneo e para um solo em duas camadas. As condições de contorno adicionais para solução em duas camadas são que o potencial capilar e o fluxo devem ser iguais na interface das camadas de solo.

WARRICK e PARKIN (1995) particularizaram a solução de WARRICK, LOMEN e ISLAS (1990) para o caso que a difusividade se torna constante e a condutividade hidráulica proporcional ao quadrado do teor de umidade. As condições de contorno são fluxo nulo na superfície e teor de umidade saturado no infinito e como condição inicial sob todo o domínio.

SALVUCCI (1996) obteve uma solução analítica em série de potência análoga à obtida por PHILIP (1957), sob condição de umidade inicial constante e umidade constante na superfície para tempos maiores que zero. A diferença é que sob certas condições a solução em série de  $t^{n/2}$  obtida por PHILIP (1957) diverge. SALVUCCI (1996) eliminou este problema realizando a transformação de variáveis  $\tau = t/(t+\chi)$ , onde  $\chi$  é função da sorvidade e da condutividade do solo.

BASHA (1999) e BASHA (2000) encontrou uma solução analítica de infiltração transiente uni, bi e tri-dimensional com um termo de extração de água pelas plantas dada por uma função de decaimento exponencial com a profundidade ( $ae^{-bz}$ ). A técnica aplicada foi a TÉCNICA A e a solução foi obtida através do método das funções de Green após a aplicação da transformação de Kirchhoff e da transformação:

$$u = w \exp \left[ \frac{z\alpha}{2} - \frac{t\alpha}{4b} \right] \quad (2.26)$$

BASHA (1999) obteve soluções sob domínio semi-infinito sob condições de fluxo prescrito na superfície e também para sucção prescrita na superfície ambos em função

do tempo e sob uma condição inicial definida. BASHA (2000) avaliou o efeito da presença de um potencial capilar aplicada no bordo inferior da camada avaliada e sob as mesmas condições de contorno e inicial.

CHEN et al. (2001) a partir da TÉCNICA A e aplicando a transformação dada pela Equação 2.23 obtiveram uma solução na forma integral sob a condição de teor de umidade residual no inicio e no infinito do perfil e fluxo na superfície como funções na forma:

$$q = at^n \quad (2.27)$$

BASHA (2002) utilizou funções diferentes das apresentadas nas técnicas A e B para a SWRC e a função-k representadas respectivamente por:

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \frac{1}{1 - \alpha\psi} \quad (2.28)$$

$$K = \frac{K_s}{(1 - \alpha\psi)^2} \quad (2.29)$$

Sob estas condições a difusividade se torna constante e igual a  $D=K_s/\alpha(\theta_s-\theta_r)$  e aplicando a transformada de Hopf-Cole<sup>1</sup> (HOPF, citado por BASHA (2002)):

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = -\frac{1}{\alpha v} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.30)$$

a Equação 2.6 se transforma na equação linear clássica de difusão. BASHA (2002) apresenta a solução geral na forma integral para domínios finito e infinito e uma série de soluções sob condições de fluxo constante prescrito e potencial capilar prescrito na

---

<sup>1</sup> HOPF, E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = u_{xx}$ . **Community of Pure Applied Mathematics**. v.3, p.201-230, 1950

superfície sob condições iniciais: uniforme, não uniforme, perfil hidrostático e solução do estado estacionário, seguindo metodologia semelhante à de seus trabalhos anteriores (BASHA, 1999, 2000).

MENZIANI, PUGNAGHI e VINCENZI (2007) solucionaram a equação de Richards através da TÉCNICA A para um domínio semi-infinito sob condição de fluxo constante em intervalos discretos de tempo e teor de umidade prescrito na superfície, e sob condição de umidade inicial representado em intervalos discretos no espaço.

As soluções analíticas desenvolvidas até o presente são de modo geral bastante diferentes, pois advêm de diferentes métodos de solução e sob diferentes hipóteses simplificadoras e técnicas de linearização da Equação de Richards. No entanto, é curioso destacar que todas as soluções fechadas obtidas apresentam termos os quais requerem recursos computacionais para sua determinação como no caso de somatórios infinitos, somatório cujos argumentos são soluções de equações transcendentes, da função erro ou de integrais que exigem integração numérica. Portanto, apesar de soluções analíticas, ainda exige-se o uso de alguma ferramenta numérica. Todavia, isto não desmerece as soluções analíticas que permitem a avaliação mais clara da dependência da variação temporal do teor de umidade do solo com os parâmetros do solo e do escoamento.

## 2.6 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A Equação de Richards unidimensional pode ser escrita de três maneiras distintas conforme a variável dependente adotada (CELIA; BOULOUTAS; ZARBA, 1990) (BRUNONE et al., 2003). A equação na forma mista, na base- $\psi$  e na base- $\theta$  são respectivamente dadas por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} = 0 \quad (2.31)$$

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} = 0 \quad (2.33)$$

onde  $C(\psi) = d\theta/d\psi$  e  $D(\theta) = K(\theta)/(d\theta/d\psi)$ . Em todas as formas a equação é não-linear devido as relações entre  $\theta$  e  $\psi$  e entre  $K$  e  $\psi$  (ou  $K$  e  $\theta$ ). Exceto para algumas relações especiais soluções analíticas são possíveis, para os demais são necessárias aproximações numéricas. As técnicas mais comumente utilizadas são o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos. Em ambos os métodos a discretização gera uma série de equações algébricas não lineares que exigem procedimentos iterativos para serem resolvidos (CELIA; BOULOUTAS; ZARBA, 1990).

MILLY (1988) mostrou que resolver a Equação 2.32 (base- $\psi$ ) gera maiores erros na conservação de massa devido a avaliação do termo  $C(\psi)$ . RATHFELDER e ABRIOLA (1994) afirmam que bons resultados no balanço de massa podem ser obtidos através de uma discretização apropriada do termo  $C(\psi)$ . Segundo HILLS et al. (1989) o maior benefício de resolver a equação de Richards na base- $\theta$  é que as funções hidráulicas do solo geralmente apresentam menor não linearidade em relação à equação na base- $\psi$ . Todavia na forma mista e na base- $\psi$  a aplicação não possui problemas em solos em camadas, nos quais  $\psi$  é contínua na interface enquanto  $\theta$  não é (BRUNONE et al., 2003), e apesar de ser não conservativo (ZAIDEL; RUSSO, 1992) a forma usualmente mais utilizada é a base- $\psi$  (HILLS et al., 1989). HAVERKAMP e VAUCLIN (1981) avaliaram as soluções na base- $\psi$ , base- $\theta$  e ainda a equação linearizada pela transformação de Kirchhoff e concluíram que a solução que apresenta os menores erros numéricos é linearizada, uma vez que não possui problema de avaliar a condutividade hidráulica na interface entre os nós.

HAVERKAMP e VAUCLIN (1979) avaliaram a solução por diferenças finitas utilizando diversas funções para avaliar a condutividade hidráulica na interface entre os nós concluindo que a função com melhor desempenho é a média geométrica.

Os métodos numéricos sofrem com problemas de erros numéricos e conservação de massa. A solução da equação de Richards na forma mista não produz erros de conservação de massa, todavia boa conservação de massa não garante bons resultados numéricos. Em vista disso é mais comum resolver a equação na base- $\psi$  (CELIA; BOULOUTAS; ZARBA, 1990).

### 3. SOLUÇÃO ANALÍTICA

A equação de Richards que governa o escoamento vertical uni-dimensional, transiente em solos não saturados pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial z_*} \left[ K_* (\psi) \frac{\partial(\psi + z_*)}{\partial z_*} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t_*} \quad (3.1)$$

onde,  $z_*$  [L] é a coordenada vertical, positiva no sentido de baixo para cima,  $K_*$  [L/T] é a condutividade hidráulica não saturada que é função do potencial capilar  $\psi$  [L] (negativo para escoamento não saturado),  $\theta$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é a umidade, e  $t_*$  [T] representa o tempo.

Neste trabalho a dependência da condutividade hidráulica e da umidade com o potencial capilar são dados pelas seguintes relações constitutivas (GARDNER, 1958):

$$K_* = K_S e^{\alpha \psi} \quad (3.2)$$

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} \quad (3.3)$$

onde  $K_S$  [L/T] é a condutividade hidráulica saturada,  $\theta_r$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é o teor de umidade residual,  $\theta_s$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é o teor umidade de saturação, e  $\alpha$  [1/L] é o parâmetro que avalia a entrada de ar que representa a taxa de redução da condutividade hidráulica ou da umidade para  $\psi$  cada vez menor.

O fenômeno da histerese (BRAS, 1990) é negligenciado, isto é,  $\alpha$  é assumido o mesmo para ciclos de drenagem e umidificação.

Substituindo as relações constitutivas na Equação 3.1, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial z_*} \left[ K_* (\psi) \left( 1 + \frac{\partial \psi}{\partial z_*} \right) \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t_*} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_*} \left\{ K_* (\psi) \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial z_*} \left( \frac{1}{\alpha} \ln \frac{K_*}{K_s} \right) \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial t_*} [\theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi}] \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_*} \left\{ K_* (\psi) \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial K_*} \left( \ln \frac{K_*}{K_s} \right) \frac{\partial K_*}{\partial z_*} \right] \right\} = (\theta_s - \theta_r) \frac{\partial}{\partial t_*} \left( \frac{K_*}{K_s} \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 K_*}{\partial z_*^2} + \alpha \frac{\partial K_*}{\partial z_*} = \frac{\alpha (\theta_s - \theta_r)}{K_s} \frac{\partial K_*}{\partial t_*} \quad (3.7)$$

Por conveniência, são definidos os seguintes variáveis adimensionais:

$$z = \alpha z_* \quad (3.8)$$

$$K = \frac{K_*}{K_s} \quad (3.9)$$

$$t = \frac{\alpha K_s t_*}{(\theta_s - \theta_r)} \quad (3.10)$$

E a Equação 3.7 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial K}{\partial t} \quad (3.11)$$

Aplicando a transformação de Laplace (BUTKOV, 1988) na Equação 3.11, representando a transformada de K como  $\bar{K}$ ,  $K_0(z)$  como a condição inicial e s a variável no domínio de Laplace, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial z^2} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial z} - s\bar{K} + K_0(z) = 0 \quad (3.12)$$

Resolvendo a equação diferencial representada pela Equação 3.12, obtém-se primeiramente a solução particular:

$$\bar{K}_p = \frac{K_0(z)}{s} \quad (3.13)$$

E a solução homogênea da Equação 3.12 é:

$$\bar{K}_h = C_1 \exp\left\{z\left[-\frac{1}{2} + (s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\right]\right\} + C_2 \exp\left\{z\left[-\frac{1}{2} - (s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\right]\right\} \quad (3.14)$$

A solução geral é a soma das soluções homogênea e particular (BOYCE; DIPRIMA, 1998) dadas pela soma das Equações 3.13 e 3.14:

$$\bar{K} = \frac{K_0(z)}{s} + C_1 \exp\left\{z\left[-\frac{1}{2} + (s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\right]\right\} + C_2 \exp\left\{z\left[-\frac{1}{2} - (s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\right]\right\} \quad (3.15)$$

Para determinar as constantes  $C_1$  e  $C_2$  da Equação 3.15 são necessárias uma condição inicial e duas condições de contorno, as quais também devem ser transformadas por Laplace. A Figura 3.1 apresenta a secção transversal do volume de controle e indica as condições de contorno.

Considerando infiltração vertical unidimensional através de um solo homogêneo,  $L_*$  é a profundidade da coluna de solo avaliada, assim  $z_* = 0$  é o bordo inferior e  $z_* = L_*$  é o bordo superior (superfície). As condições de contorno e inicial são:

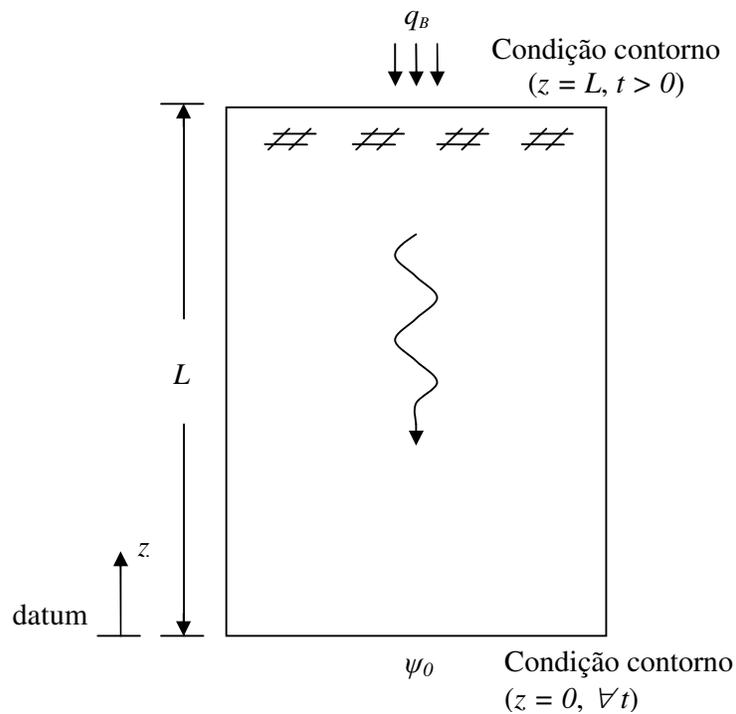
- i. pressão de água  $\psi_0$  aplicada no bordo inferior (Equação 3.17) (veja Apêndice 1);

- ii. fluxo  $q_B^*$ , dado pela Equação 3.16, aplicado no bordo superior do solo para tempos maiores que 0 (Equação 3.18) (veja Apêndice 2);

$$q(t) = q_B^* + (q_C^* - q_B^*)(e^{-at^*} - e^{-bt^*}) \quad (3.16)$$

- iii. distribuição de pressão inicial no solo definido pela solução da Equação 3.1 no estado estacionário sob a condição de fluxo de água constante  $q_A^*$  na superfície do solo e pressão de água  $\psi_0$  aplicada no bordo inferior (Equação 3.19) (veja Apêndice 3).

FIGURA 3.1 – SEÇÃO TRANSVERSAL DO VOLUME DE CONTROLE



As condições de contorno, já adimensionalizadas, são matematicamente expressas por:

$$K(0, t) = e^{\alpha\psi_0} \quad (3.17)$$

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial z} + K \right]_{z=L} = q_B + (q_C - q_B)(e^{-at} - e^{-bt}) \quad (3.18)$$

$$K(z, 0) = q_A - (q_A - e^{\alpha\psi_0})e^{-z} = K_0(z) \quad (3.19)$$

As condições de contorno definidas pelas Equações 3.17 e 3.18 devem também ser transformadas por Laplace e tomam a forma:

$$\bar{K} = \frac{e^{\alpha\psi_0}}{s} \quad (3.20)$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{K}}{\partial z} + \bar{K} \right]_{z=L} = \frac{q_B}{s} + (q_C - q_B) \frac{b-a}{(s+a)(s+b)} \quad (3.21)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Equação 3.20 na Equação 3.15 obtêm-se  $C_2 = -C_1$ . E aplicando a condição de contorno dada pela Equação 3.20 na Equação 3.15, e dado o resultado  $C_2 = -C_1$ , obtêm-se:

$$C_1 = -C_2 = \frac{[(q_B - q_A)(s+a)(s+b) + (q_C - q_B)(b-a)s]e^{\frac{1}{2}}}{2s(s+a)(s+b) \left\{ \frac{1}{2} \sinh \left[ L(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \right] + (s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \cosh \left[ L(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \right] \right\}} \quad (3.22)$$

Pode-se então reescrever a Equação 3.15, a partir da Equação 3.22, como:

$$\bar{K} = \frac{K_0(z)}{s} + e^{(L-z)/2} F(s) \quad (3.23)$$

onde

$$F(s) = \frac{[(q_B - q_A)(s+a)(s+b) + (q_C - q_B)(b-a)s] \sinh\left[z(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\right]}{s(s+a)(s+b) \left\{ \frac{1}{2} \sinh\left[L(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\right] + (s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \cosh\left[L(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\right] \right\}} \quad (3.24)$$

A transformada inversa de Laplace (TIL) da Equação 3.23, aplicando propriedades da transformada inversa de Laplace (DAY, 1960), é:

$$K(z, t) = K_0(z) + e^{(L-z)/2} \text{TIL}[F(s)] \quad (3.25)$$

Para obter a TIL[F(s)] aplica-se o teorema dos resíduos (DAY, 1960), o qual enuncia que  $\text{TIL}[F(s)] = \sum \text{Res } F(s) \cdot e^{st}$ , isto é, o somatório dos resíduos de F(s) multiplicado por  $e^{st}$ . Os resíduos de F(s) são obtidos através dos pólos e singularidades da função, os quais são reconhecidos por gerarem indeterminações na função (anulação do denominador) ou na sua expansão em séries de Laurent (SPIEGEL, 1973). O primeiro pólo ocorre em  $s = 0$ , de modo que o resíduo correspondente,  $R_1$ , é:

$$R_1 = (q_B - q_A) \left( e^{z/2} - e^{-z/2} \right) e^{-1/2} \quad (3.26)$$

O segundo pólo ocorre em  $s = -a$ , e o resíduo  $R_2$  é dado por:

$$R_2 = \begin{cases} \frac{(q_C - q_B) \sinh(zu) e^{-at}}{\frac{1}{2} \sinh(Lu) + u \cosh(Lu)} & \text{se } a < \frac{1}{4}, \quad u = (\frac{1}{4} - a)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{2(q_C - q_B) z e^{-1/4t}}{L + 2} & \text{se } a = \frac{1}{4} \\ \frac{(q_C - q_B) \sin(zv) e^{-at}}{\frac{1}{2} \sin(Lv) + v \cos(Lv)} & \text{se } a > \frac{1}{4}, \quad v = \left\| \frac{1}{4} - a \right\|^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.27)$$

O terceiro pólo ocorre em  $s = -b$ , e o resíduo  $R_3$ , de modo análogo ao cálculo de  $R_2$ , é:

$$R_3 = \begin{cases} -\frac{(q_C - q_B) \sinh(z\mu) e^{-bt}}{\frac{1}{2} \sinh(L\mu) + \mu \cosh(L\mu)} & \text{se } b < \frac{1}{4}, \quad \mu = (\frac{1}{4} - b)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{2(q_C - q_B) z e^{-\frac{1}{4}t}}{L + 2} & \text{se } b = \frac{1}{4} \\ -\frac{(q_C - q_B) \sin(zv) e^{-bt}}{\frac{1}{2} \sin(Lv) + v \cos(Lv)} & \text{se } b > \frac{1}{4}, \quad v = \|\frac{1}{4} - b\|^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.28)$$

O quarto pólo ocorre quando:

$$\frac{1}{2} \sinh \left[ L(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \right] + (s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \cosh \left[ L(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (3.29)$$

Fazendo  $(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = i\lambda$ , igual a um número imaginário puro (veja Apêndice 4 como referência), tem-se da Equação 3.29:

$$\tan [L\lambda_n] + 2\lambda_n = 0 \quad (3.30)$$

e o subscrito  $n$  vem do fato que existem vários valores de  $\lambda$  que satisfazem a Equação 3.30 (Figura 3.2) e portanto são pólos da Equação 3.24. A Figura 3.2 mostra que os valores de  $\lambda_n$  ocorrem na interseção das funções  $\tan(\lambda_n L)$  e  $2\lambda_n$ .

E o resíduo no quarto pólo é:

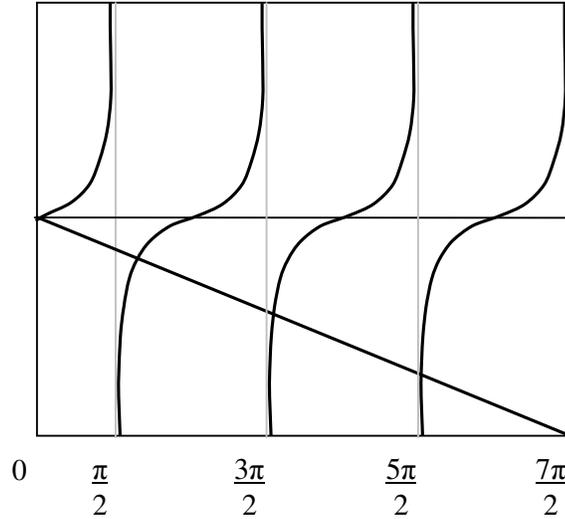
$$R_4 = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (q_A - q_B) + \frac{(q_C - q_B)(b - a)(4\lambda_n^2 + 1)}{(a - \lambda_n^2 - \frac{1}{4})(b - \lambda_n^2 - \frac{1}{4})} \right] \frac{\sin(z\lambda_n) \sin(L\lambda_n) e^{-(\lambda_n^2 + \frac{1}{4})t}}{(1 + \frac{1}{2} + 2L\lambda_n^2)} \quad (3.31)$$

onde, os valores de  $\lambda_n$  são obtidos pelas raízes positivas da Equação 3.30. Apenas as raízes positivas são consideradas, em função da simetria desta equação característica.

A solução do problema é então dada por:

$$K(z, t) = q_B - (q_B - e^{-\alpha v_0}) e^{-z} + e^{L-z/2} [R_2 + R_3 + R_4] \quad (3.32)$$

FIGURA 3.2 – REPRESENTAÇÃO DAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO 3.30



Os valores de  $\psi$  e  $\theta$  podem ser obtidos respectivamente por  $\psi = \ln K$  e  $\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)K$ . Outra informação analítica que pode ser obtida da Equação 3.32 é o fluxo em qualquer tempo  $t$  profundidade  $z$ , dado por:

$$q_t = K_s \left[ \frac{\partial K}{\partial z} + K \right]_z = K_s \left[ q_B + e^{(L-z)/2} (Q_A + Q_B + Q_S) \right] \quad (3.33)$$

onde

$$Q_A = \begin{cases} \frac{(q_C - q_B) \left[ \frac{1}{2} \sinh(zu) + u \cosh(zu) \right] e^{-at}}{\frac{1}{2} \sinh(Lu) + u \cosh(Lu)} & \text{se } a < 1/4, \quad u = (1/4 - a)^{1/2} \\ \frac{2(q_C - q_B) \left( 1 + \frac{z}{2} \right) e^{-1/4 t}}{L + 2} & \text{se } a = 1/4 \\ \frac{(q_C - q_B) \left[ \frac{1}{2} \sin(zv) + v \cos(zv) \right] e^{-at}}{\frac{1}{2} \sin(Lv) + v \cos(Lv)} & \text{se } a > 1/4, \quad v = \left| 1/4 - a \right|^{1/2} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$Q_B = \begin{cases} \frac{(q_C - q_B) \left[ \frac{1}{2} \sinh(z\mu) + \mu \cosh(z\mu) \right] e^{-bt}}{\frac{1}{2} \sinh(L\mu) + \mu \cosh(L\mu)} & \text{se } b < \frac{1}{4}, \quad \mu = \left( \frac{1}{4} - b \right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{2(q_C - q_B) \left( 1 + \frac{z}{2} \right) e^{-\frac{1}{4}t}}{L + 2} & \text{se } b = \frac{1}{4} \\ \frac{(q_C - q_B) \left[ \frac{1}{2} \sin(z\nu) + \nu \cos(z\nu) \right] e^{-bt}}{\frac{1}{2} \sin(L\nu) + \nu \cos(L\nu)} & \text{se } b > \frac{1}{4}, \quad \nu = \left\| \frac{1}{4} - b \right\|^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.35)$$

$$Q_S = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (q_B - q_A) - \frac{(q_C - q_B)(b-a)(4\lambda_n^2 + 1)}{(a - \lambda_n^2 - \frac{1}{4})(b - \lambda_n^2 - \frac{1}{4})} \right] \times \frac{\sin(\lambda_n L) \cos(\lambda_n z) \left[ \tan(\lambda_n z) + \lambda_n \right] e^{-(\lambda_n^2 - 1/4)t}}{1 + L/2 + 2\lambda_n^2 L} \quad (3.36)$$

## 4. SOLUÇÕES NUMÉRICAS

A Equação de Richards pode ser resolvida numericamente através dos esquemas numéricos como o de diferenças finitas e volumes finitos implícito de Crank-Nicholson.

No método das diferenças finitas a discretização do domínio é obtida dividindo-o em células elementares. As derivadas espacial e temporal são representadas por expressões algébricas utilizando para isso expansão em séries de Taylor em torno de um ponto. Uma vez que a malha compreende vários pontos, o resultado é um sistema de equações algébricas que é resolvido através da técnica TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm).

No esquema de volumes finitos o resultado é essencialmente o mesmo, excetuando-se a forma na qual a discretização é procedida. Ao contrário do esquema de diferenças finitas, no volumes finitos a equação diferencial na forma conservativa é integrada sobre volumes elementares no espaço e no tempo. A integração é discreta, obtendo-se assim relações entre os volumes da malha, caracterizando um sistema de equações algébricas que é resolvido pelo método TDMA.

Erros no balanço de massa estão associados às aproximação, no entanto o erro pode ser minimizado, diminuindo o tamanho da malha do espaço e/ou do tempo. As equações de diferença finitas podem formar uma matriz que pode ser solucionada por métodos convencionais de iteração (CELIA; BOULOUTAS; ZARBA, 1990) (FAYER, 2000).

Apesar da literatura apresentar mais soluções através dos métodos de diferenças finitas e elementos finitos, neste trabalho será avaliada a solução através de diferenças finitas e volumes finitos.

### 4.1 APROXIMAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS

A Equação 3.1 é reescrita como:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.1)$$

onde  $q$  e  $C$  são, respectivamente:

$$q = K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + K(\psi) \quad (4.2)$$

$$C(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \quad (4.3)$$

No método de diferenças finitas implícito de Crank-Nicholson a derivada no tempo é avaliada no ponto intermediário do intervalo de tempo, de acordo com a Figura 4.1, a Equação 4.1 pode ser aproximada numericamente como (CELIA; BOULOUTAS; ZARBA, 1990) (FAYER, 2000):

$$C_i^{j+1/2} \frac{\psi_i^{j+1} - \psi_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta z} [q_{i+1/2}^{j+1/2} - q_{i-1/2}^{j+1/2}] \quad (4.4)$$

onde

$$C_i^{j+1/2} = \frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{2} \quad (4.5)$$

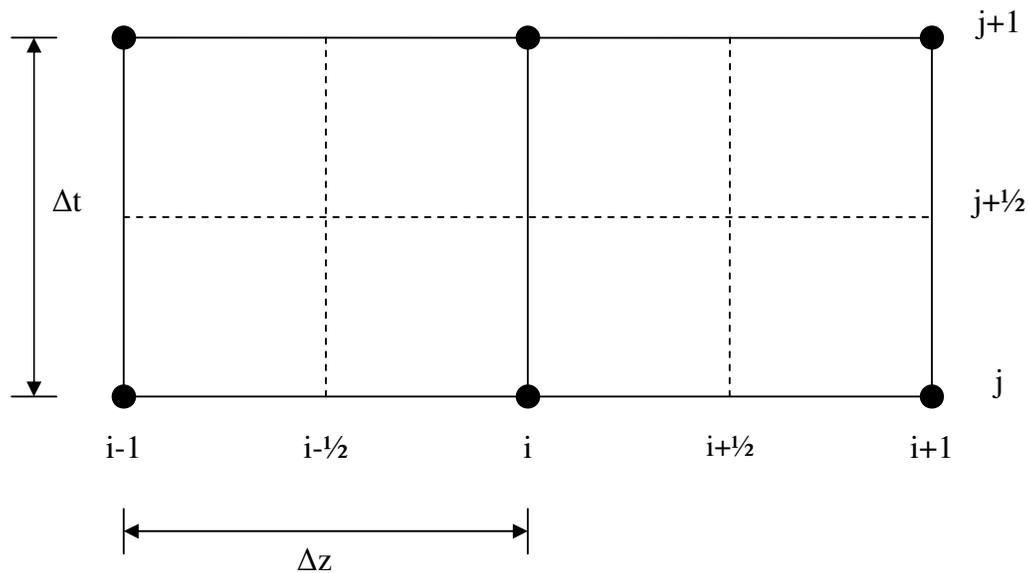
$$q_{i\pm 1/2}^{j+1/2} = \frac{q_{i\pm 1/2}^{j+1} + q_{i\pm 1/2}^j}{2} \quad (4.6)$$

O índice subscrito  $i$  representa o nó na profundidade  $z_i$ . O índice sobrescrito  $j$  denota o tempo,  $t_j$ . Os fluxos nos pontos intermediários dos nós são aproximados por:

$$q_{i+1/2}^j = K_{i+1/2}^j \left( \frac{\Psi_{i+1}^j - \Psi_i^j}{\Delta z} \right) + K_{i+1/2}^j \quad (4.7)$$

$$q_{i-1/2}^j = K_{i-1/2}^j \left( \frac{\Psi_i^j - \Psi_{i-1}^j}{\Delta z} \right) + K_{i-1/2}^j \quad (4.8)$$

FIGURA 4.1 – ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS



Nas Equações 4.7 e 4.8 a condutividade hidráulica no ponto intermediário dos nós pode ser calculada pela média ponderada, média harmônica ou média geométrica. A equação da média ponderada é:

$$K_{i+1/2}^j = \omega_u K_i^j + \omega_d K_{i+1}^j \quad (4.9)$$

onde,  $\omega_u$  e  $\omega_d$  representam os pesos para a condutividade a montante e a jusante do escoamento, sob a condição que  $\omega_u + \omega_d = 1$ . As equações para as médias harmônica e geométrica são respectivamente:

$$K_{i+1/2}^j = 2 \left( \frac{1}{K_i^j} + \frac{1}{K_{i+1}^j} \right)^{-1} \quad (4.10)$$

$$K_{i+1/2}^j = \sqrt{K_i^j K_{i+1}^j} \quad (4.11)$$

Os valores de  $K$  são calculados a partir de uma equação para a função- $k$  do solo com seus respectivos parâmetros e é função do potencial capilar nos nós correspondentes. A função adotada neste trabalho é  $K = K_s e^{\alpha\psi}$ .

#### 4.1.1 Os Nós Internos

A Equação 4.4 é rearranjada para ser resolvida para o potencial capilar no fim do intervalo de tempo, escrita na forma:

$$P_i \psi_i^{j+1} = W_i \psi_{i-1}^{j+1} + E_i \psi_{i+1}^{j+1} + B_i \quad (4.12)$$

Para os nós nas fronteiras a forma dos coeficientes na Equação 4.12 depende das condições de contorno. Para os nós interiores ( $i = 2, \dots, n-1$ ), no entanto, os coeficientes são:

$$W_i = \frac{K_{i-1/2}^{j+1}}{\Delta z^2} \quad (4.13)$$

$$E_i = \frac{K_{i+1/2}^{j+1}}{\Delta z^2} \quad (4.14)$$

$$P_i = \frac{C_i^{j+1/2}}{\Delta t} + W_i + E_i \quad (4.15)$$

$$B_i = \frac{C_i^{j+1/2} \Psi_i^j}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta z} \left[ K_{i+1/2}^j \left( \frac{\Psi_{i+1}^j - \Psi_i^j}{\Delta z} + 1 \right) - K_{i-1/2}^j \left( \frac{\Psi_i^j - \Psi_{i-1}^j}{\Delta z} + 1 \right) + K_{i+1/2}^{j+1} - K_{i-1/2}^{j+1} \right] \quad (4.16)$$

#### 4.1.2 O Nó no Contorno Inferior

A condição de contorno na fronteira inferior é o potencial capilar prescrito constante. A condição na malha de diferenças finitas é representada na Figura 4.2.

Algebricamente a aplicação da condição de contorno fornece:

$$\Psi_1^j = \Psi_0 \quad (4.17)$$

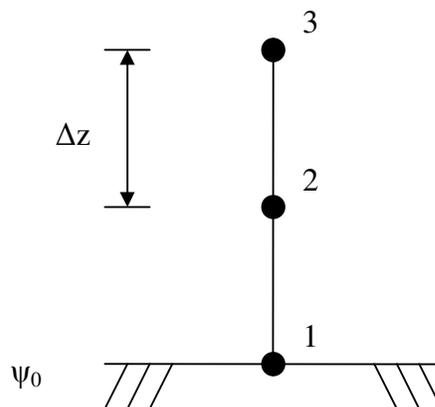
Reescrevendo a condição da Equação 4.17 na forma da Equação 4.12, os coeficientes são:

$$W_1 = E_1 = 0 \quad (4.18)$$

$$P_1 = 1 \quad (4.19)$$

$$B_1 = \Psi_0 \quad (4.20)$$

FIGURA 4.2 – ESQUEMA DO CONTORNO INFERIOR EM DIFERENÇAS FINITAS



### 4.1.3 O Nó no Contorno Superior

A condição de contorno na fronteira superior é de fluxo prescrito. A condição na malha de diferenças finitas é representada na Figura 4.3.

Algebricamente a aplicação da condição de contorno fornece:

$$q^j = K_{N-1/2}^j \left[ \frac{\Psi_N^j - \Psi_{N-1}^j}{\Delta z} + 1 \right] \quad (4.21)$$

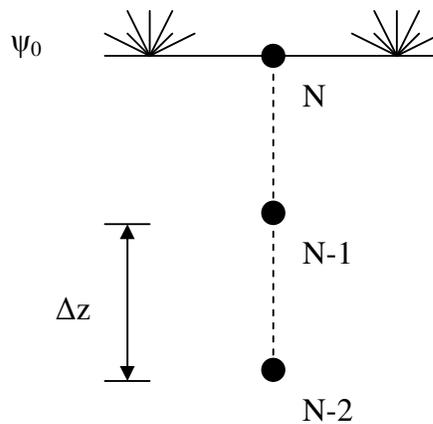
Reescrevendo a condição da Equação 4.21 na forma da Equação 4.12, os coeficientes são:

$$E_N = 0 \quad (4.22)$$

$$W_N = P_N = 1 \quad (4.23)$$

$$B_N = \left( \frac{q^j - K_{N-1/2}^j}{K_{N-1/2}^j} \right) \Delta z \quad (4.24)$$

FIGURA 4.3 – ESQUEMA DO CONTORNO SUPERIOR EM DIFERENÇAS FINITAS



## 4.2 APROXIMAÇÃO POR VOLUMES FINITOS

### 4.2.1 Os Volumes Reais Internos

Das Equações 3.1 e 4.1 realizando a integração sobre o volume de controle p (MALISKA, 2005):

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_{z_w}^{z_c} \left[ C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]_p dz dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{z_w}^{z_c} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} \right]_p dz dt \quad (4.25)$$

têm-se que:

$$C_p [\psi_p^t - \psi_p^{t-\Delta t}] \Delta z = \left[ \left( K \frac{\partial \psi}{\partial z} + K \right)_e - \left( K \frac{\partial \psi}{\partial z} + K \right)_w \right] \Delta t \quad (4.26)$$

onde

$$C_p = \frac{C_p^t + C_p^{t-\Delta t}}{2} \quad (4.27)$$

Assumindo funções de interpolação lineares para as derivadas no espaço e aplicando a “formulação  $\theta$ ” (MALISKA, 2005) com  $\theta = 1/2$  (neste caso  $\theta$  é apenas um parâmetro da interpolação e não a variável utilizada neste trabalho):

$$C_p [\psi_p^t - \psi_p^{t-\Delta t}] \Delta z = \left\{ \left[ \frac{K_c (\psi_E^* - \psi_P^*)}{\Delta z} + K_c \right] - \left[ \frac{K_w (\psi_P^* - \psi_w^*)}{\Delta z} + K_w \right] \right\} \Delta t \quad (4.28)$$

onde

$$\Psi_p^* = \frac{\Psi_p^t + \Psi_p^{t-\Delta t}}{2} \quad (4.29)$$

Alterando a notação,  $\Psi_p^{t-\Delta t} = \Psi_p^0$  e  $\Psi_p^t = \Psi_p$ , e reescrevendo a Equação 4.28 na forma:

$$a_p \Psi_p = a_w \Psi_w + a_E \Psi_E + b_p \quad (4.30)$$

têm-se que:

$$a_w = \frac{K_w}{\Delta z^2} \quad (4.31)$$

$$a_E = \frac{K_e}{\Delta z^2} \quad (4.32)$$

$$a_p = \frac{C_p}{\Delta t} + a_w + a_E \quad (4.33)$$

$$b_p = \left[ \frac{C_p}{\Delta t} - \frac{(K_e + K_w)}{2\Delta z^2} \right] \Psi_p^0 + \frac{K_w}{2\Delta z^2} \Psi_w^0 + \frac{K_e}{2\Delta z^2} \Psi_E^0 + \frac{(K_e - K_w)}{\Delta z} \quad (4.34)$$

As Equações 4.31 a 4.34 valem apenas para os volumes de controle internos ( $p = 2, \dots, N-1$ ).

#### 4.2.2 O Volume Fictício no Contorno Inferior

A condição de contorno na fronteira inferior é o potencial capilar prescrito constante,  $\psi_0$ . A condição na malha de volumes finitos é representada na Figura 4.4.

Da condição de contorno, podemos considerar que o potencial capilar varia linearmente entre os volumes  $p = 1$  (fictício) e  $p = 2$  (real). Deste modo, a condição de contorno é a média aritmética entre os volumes adjacentes:

$$\psi_0 = \frac{\psi_P + \psi_E}{2} \quad (4.35)$$

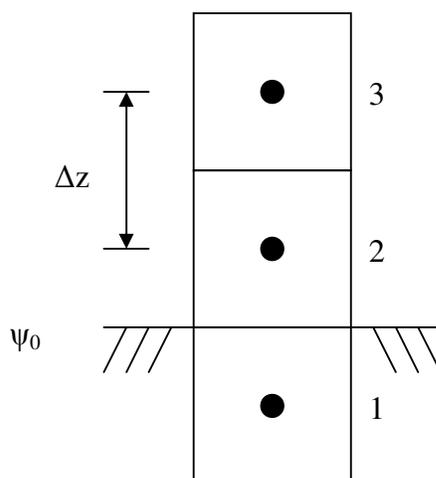
Reescrevendo a condição da Equação 4.35 na forma da Equação 4.12, os coeficientes para  $p = 1$  são:

$$a_w = 0 \quad (4.36)$$

$$a_p = -a_E = 1 \quad (4.37)$$

$$b_p = 2\psi_0 \quad (4.38)$$

FIGURA 4.4 – ESQUEMA DO CONTORNO INFERIOR EM VOLUMES FINITOS



### 4.2.3 O Volume Fictício no Contorno Superior

A condição de contorno na fronteira superior é de fluxo prescrito. A condição na malha de volumes finitos é representada na Figura 4.5.

Algebricamente a aplicação da condição de contorno fornece:

$$q = K_w \left[ \frac{\Psi_p - \Psi_w}{\Delta z} + 1 \right] \quad (4.39)$$

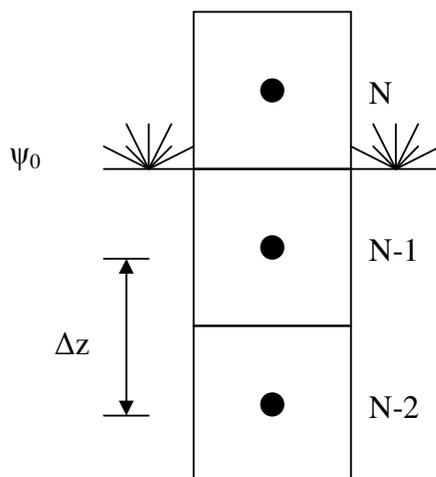
Reescrevendo a condição da Equação 4.39 na forma da Equação 4.12, os coeficientes para  $p = N$  são:

$$a_E = 0 \quad (4.40)$$

$$a_p = a_w = 1 \quad (4.41)$$

$$b_p = \left( \frac{q - K_w}{K_w} \right) \Delta z \quad (4.42)$$

FIGURA 4.5 – ESQUEMA DO CONTORNO SUPERIOR EM VOLUMES FINITOS



### 4.3 ALGORITMO DE SOLUÇÃO

O problema em ambos os esquemas é resolvido através do seguinte algoritmo:

- 1 – Leitura dos parâmetros  $K_S$ ,  $\alpha$ ,  $\psi_0$ ,  $q_A$ ,  $q_B$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$
- 2 – Dar uma aproximação inicial para  $\psi_i^1$ ,  $i = 1, N$
- 3 – Obter  $\psi_i^1$ ,  $i = 1, N$ , que é a condição inicial, solucionando as equações do estado estacionário (facilmente obtidas fazendo  $\Delta t \rightarrow \infty$ )
- 4 – Atribuir como aproximação inicial para o cálculo em cada tempo  $\psi_i^{n+1} = \psi_i^n$ ,
- 5 – Resolver o sistema de equações não-lineares até  $\psi_i^{n+1}$  convergir
- 6 – Voltar a etapa 4

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1 RESULTADOS ANALÍTICOS

As soluções analíticas que descrevem o comportamento de  $\psi(z,t)$ ,  $\theta(z,t)$  e  $q_t(z,t)$  que dependem dos parâmetros hidráulicos do solo ( $\alpha$ ,  $K_S$ ,  $\theta_S$  e  $\theta_r$ ) e dos parâmetros da função de infiltração ( $q_A^*$ ,  $q_B^*$ ,  $q_C^*$ ,  $a$  e  $b$ ). O perfil de potencial capilar,  $\psi(z,t)$ , e a curva de descarga,  $q_t(z,t)$ , são avaliadas para diferentes funções de infiltração,  $q(t)$ . Os perfis são gráficos apresentando a variação temporal de  $\psi(t)$  versus  $z$ , ou seja, são a sobreposição de várias curvas  $\psi(z)$  para tempos escolhidos. Para facilitar comparações, em todos os exemplos:  $\psi_0 = 0$ ,  $q_A^* = 3,0 \times 10^{-7}$  m/s,  $L^* = 1$  m,  $\theta_S = 0,5$  m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>,  $\theta_r = 0,1$  m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup> e  $q_t$  é avaliado em  $z^* = 0$ . Os valores de  $K_S$  e  $\alpha$  são assumidos iguais a  $3,0 \times 10^{-6}$  m/s e  $10$  m<sup>-1</sup>, respectivamente, com exceção do primeiro exemplo no qual os valores são alterados.

#### EXEMPLO 1

Neste primeiro exemplo toma-se  $q_B^* = 0$ ,  $a^* = 0$  e  $b^* \rightarrow \infty$ , de modo que a função de infiltração na superfície se torna constante e igual a  $q_C^*$  e que é assumido igual a  $2,5 \times 10^{-6}$  m/s.

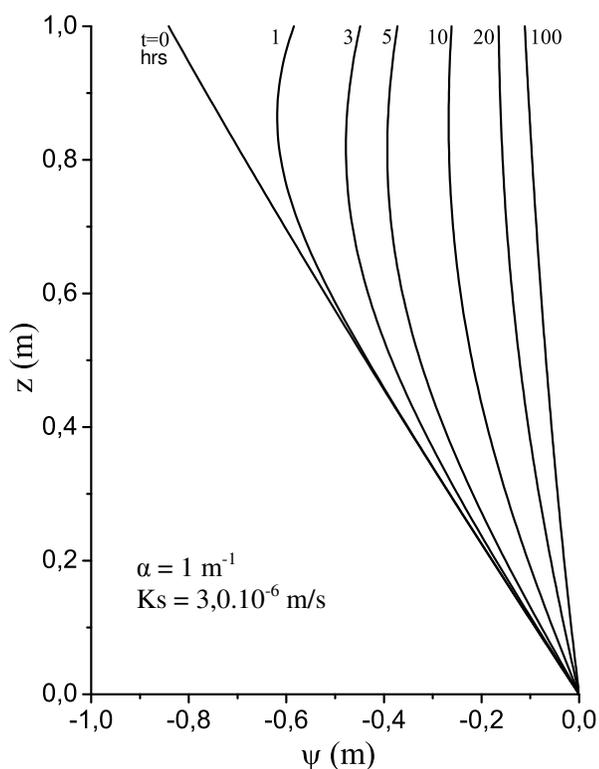
Nas Figuras 5.1 e 5.3 o perfil de potencial capilar para dois valores de  $\alpha$  são comparados,  $1$  m<sup>-1</sup> e  $10$  m<sup>-1</sup>, respectivamente para as Figuras 5.1 e 5.3, enquanto  $K_S = 3,0 \times 10^{-6}$  m/s é mantido o mesmo para ambas. A mesma avaliação é feita para as Figuras 5.2 e 5.4 que apresentam os perfis de umidade, cujos parâmetros correspondem aos mesmos das Figuras 5.1 e 5.3, respectivamente.

Os perfis das Figuras 5.1 e 5.3 (e também das Figuras 5.2 e 5.4) são totalmente diferentes. Nos primeiros, cujo valor de  $\alpha$  é menor, o umedecimento na camada de solo é mais rápido e a frente de molhamento é mais dispersa do que nos outros, cujo valor de  $\alpha$  é maior. Para o menor valor de  $\alpha$ , o estado estacionário é atingido mais

rapidamente do que para o valor maior. Isto é evidente na observação da evolução temporal do potencial capilar ou umidade.

Observa-se que na comparação entre os perfis de potencial capilar e umidade (Figuras 5.1 e 5.3 e Figuras 5.2 e 5.4) ocorrem muitas semelhanças. Os perfis são semelhantes para os mesmos parâmetros. Isto se deve à relação exponencial entre  $\psi$  e  $\theta$ . Em função desta semelhança, torna-se redundante a apresentação de ambos os perfis, e portanto, de agora em diante serão apresentados apenas os perfis de potencial capilar.

FIGURA 5.1 – PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 1

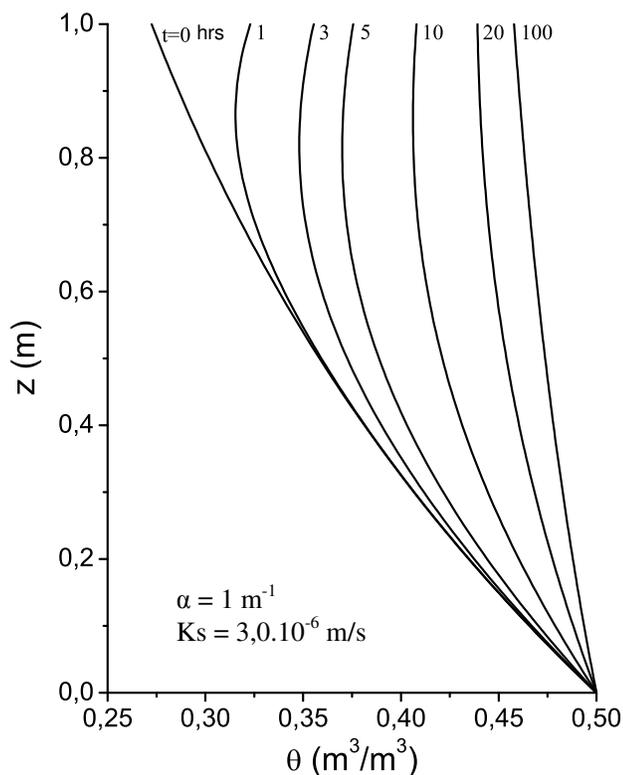


Na Figura 5.5, que apresenta o perfil de potencial capilar, com os parâmetros  $\alpha = 10 \text{ m}^{-1}$  e  $K_s = 6,0 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ , o umedecimento é mais rápido do que no caso com  $K_s$  menor (Figura 5.3), atingindo o estado estacionário mais rapidamente também.

Pode-se concluir então que quanto maior  $K_s$  e menor  $\alpha$  mais rápida é a propagação da onda de umedecimento e mais rapidamente se atinge o estado estacionário, para uma mesma taxa de infiltração.

A Figura 5.6 apresenta as curvas de infiltração na camada superior do solo e descarga na camada inferior do solo para os três casos até agora apresentados nas Figuras 5.1 a 5.5. Para a função de infiltração constante, a curva de descarga tem um crescimento com aspecto logístico, o qual apresenta um crescimento inicialmente exponencial e após um ponto de inflexão uma redução gradativa do crescimento até estabilizar-se num máximo igual à infiltração na superfície. Quando atinge este estágio se alcança o estado estacionário, e o perfil de umidade e potencial capilar é invariável no tempo.

FIGURA 5.2 – PERFIL DE UMIDADE 1



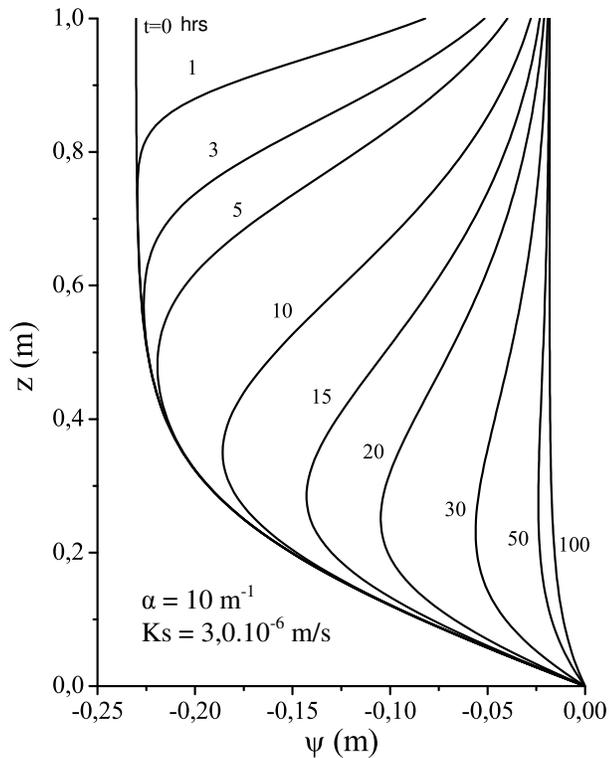
Deste modo pode-se comparar o comportamento do solo como equivalente a um reservatório linear, retardando a descarga da água.

Tanto os perfis do potencial capilar e da umidade quanto a curva de descarga fornecem informações sobre o estado estacionário do sistema. Quando o perfil de umidade ou potencial capilar se torna invariável no tempo, o estado estacionário foi atingido. Observações na curva de descarga sugerem que quando a descarga torna-se constante o estado estacionário foi alcançado. As soluções para o estado estacionário podem ser obtidas fazendo-se  $t_* \rightarrow \infty$  nas Equações 3.32 e 3.33:

$$K(z) = q_c - (q_c - e^{-\alpha\psi_0})e^{-z} \quad (5.1)$$

$$q_t = K_s q_c \quad (5.2)$$

FIGURA 5.3 – PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 2



É interessante observar que para esta função de infiltração a solução analítica se iguala à solução obtida por SRIVASTAVA e YEH (1991) para solos homogêneos. Assim, as Equações 3.32 e 3.33 simplificam-se a:

$$K(z, t) = q_c - (q_c - e^{-\alpha v_0}) e^{-z} - 4(q_A - q_c) e^{(L-z)/2} e^{-1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(z\lambda_n) \text{sen}(L\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 t}}{(1 + 1/2 + 2L\lambda_n^2)} \quad (5.3)$$

$$q_t(0, t) = K_s q_c - 4K_s (q_A - q_c) e^{1/2} e^{-1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \text{sen}(L\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 t}}{(1 + 1/2 + 2L\lambda_n^2)} \quad (5.4)$$

FIGURA 5.4 – PERFIL DE UMIDADE 2

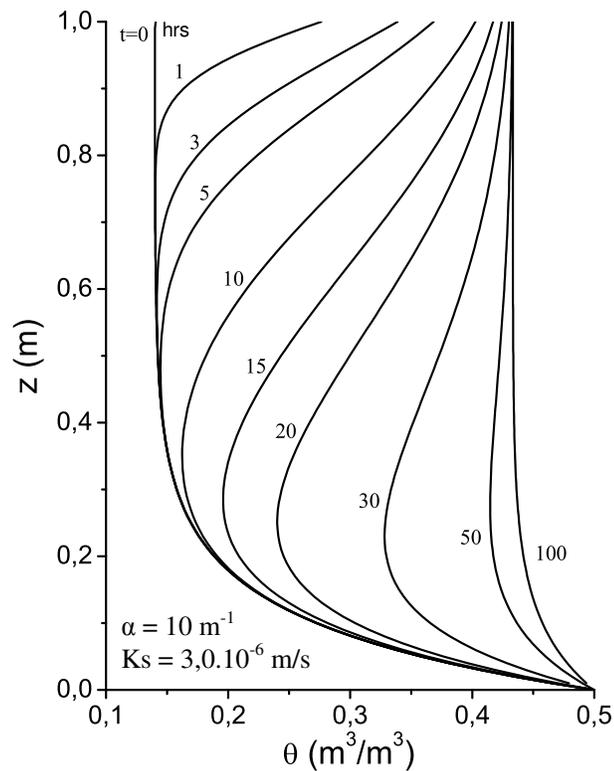


FIGURA 5.5 – PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 3

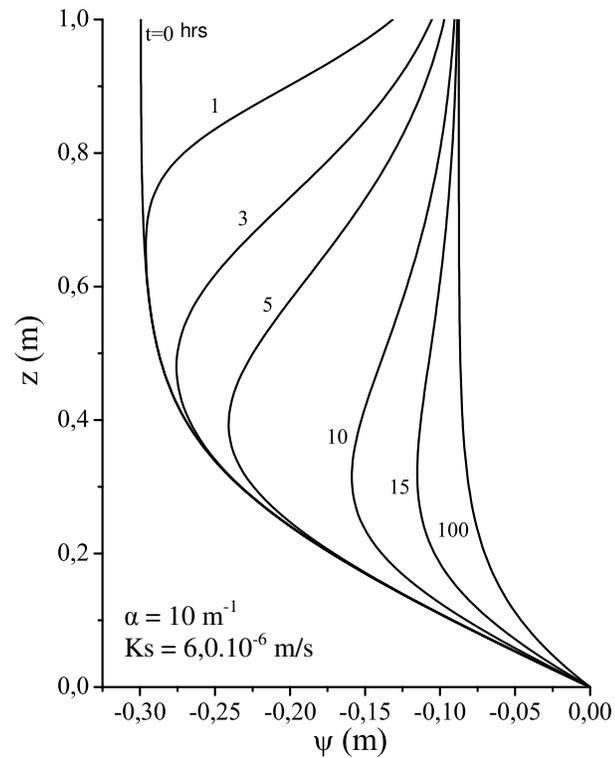
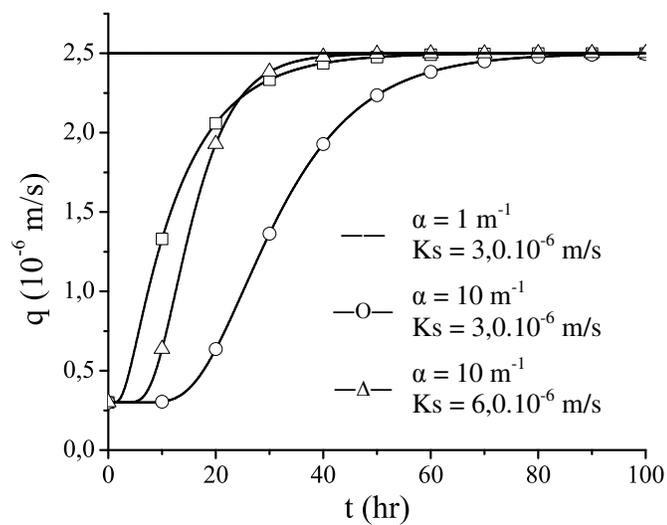


FIGURA 5.6 – INFILTRAÇÃO NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR DA FIGURA 5.1, 5.2 E 5.3



NOTA - INFILTRAÇÃO (—) NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR DA FIGURA 5.1 (—), 5.2 (—O—) E 5.3 (—Δ—)

## EXEMPLO 2

Neste exemplo tomamos  $q_B^* = 3,0 \times 10^{-7}$  m/s,  $q_C^* = 2,5 \times 10^{-6}$  m/s,  $a_* = 1,0 \times 10^{-5}$  hr<sup>-1</sup> e  $b_* \rightarrow \infty$ , de modo que a função de infiltração torna-se uma constante somada a outra constante multiplicada por um fator de decaimento exponencial com o tempo, que é idêntica a função empírica de infiltração proposta por Horton (BRAS, 1990):

$$q(t) = q_B + (q_C - q_B)e^{-at} \quad (5.5)$$

Analisando as Figuras 5.5 e 5.6 em conjunto, pode-se perceber que no início a frente de molhamento se propaga e a taxa de infiltração vai reduzindo. Após aproximadamente 10 horas o comportamento é de drenagem até atingir o perfil do estado estacionário, que neste caso é igual a condição inicial.

FIGURA 5.7 – PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 4

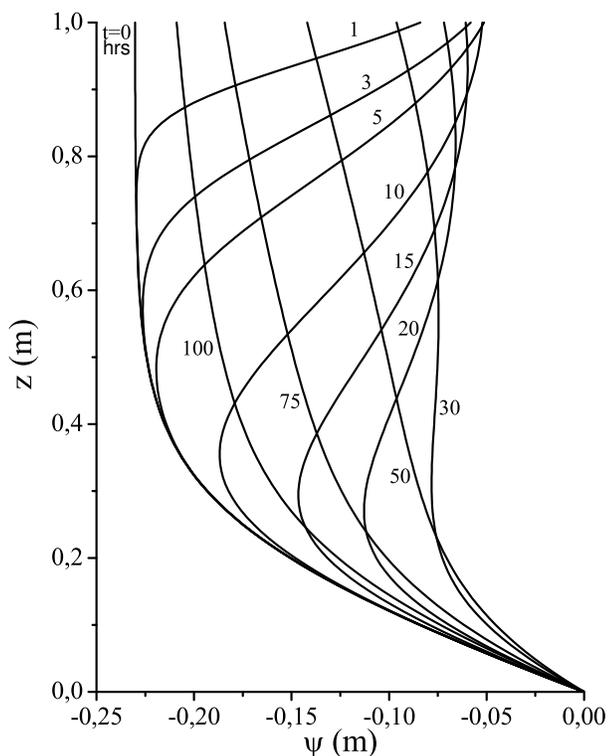
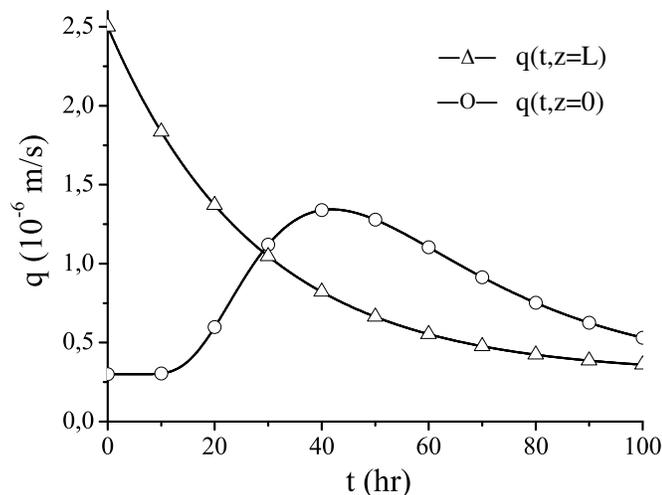


FIGURA 5.8 – INFILTRAÇÃO NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR DA FIGURA 5.5



NOTA - INFILTRAÇÃO (— $\Delta$ —) NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR EXEMPLO 2 (—O—)

### EXEMPLO 3

Neste exemplo tomamos  $q_B^* = 3,0 \times 10^{-7}$  m/s,  $q_C^* = 2,5 \times 10^{-6}$  m/s,  $a_* = 1,0 \times 10^{-5}$  hr $^{-1}$  e  $b_* = 1,0 \times 10^{-4}$  hr $^{-1}$ , de modo que a função de infiltração é igual a função geral dada pela Equação 3.16. Esta função é uma fusão entre a equação de Horton e a combinação de dois termos de decaimento exponencial que fornecem um rápido crescimento até um máximo seguido de um perfil de decaimento exponencial.

O comportamento da frente de molhamento e da descarga são similares ao Exemplo 2, que se deve ao fato da função de infiltração ser similar. Esta função de infiltração é mais realista uma vez que representa melhor o evento de chuva

FIGURA 5.9 – PERFIL DE POTENCIAL CAPILAR 5

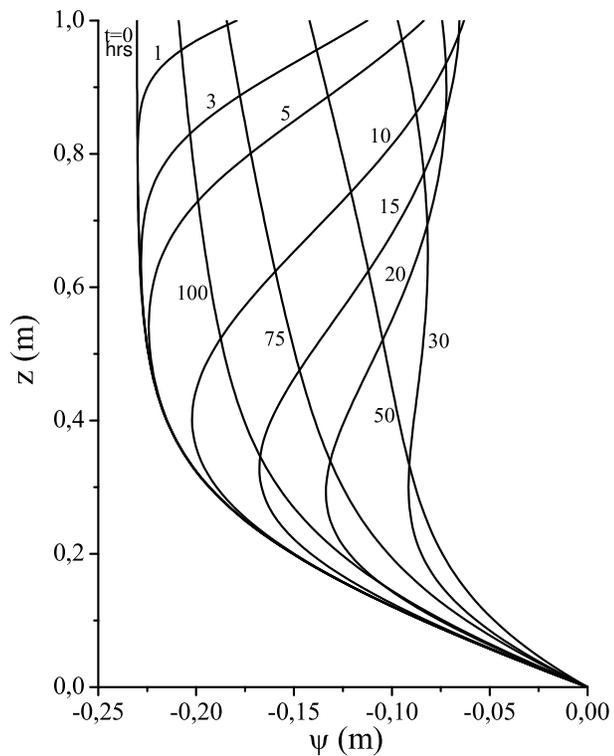
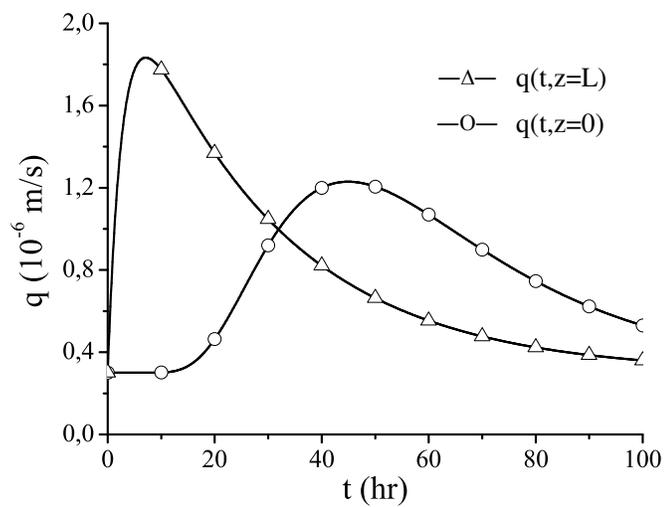


FIGURA 5.10 – INFILTRAÇÃO NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR DA FIGURA 5.7



NOTA - INFILTRAÇÃO (—Δ—) NA SUPERFÍCIE E DESCARGA NO BORDO INFERIOR DO EXEMPLO 3 (—O—)

## 5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Todos os experimentos numéricos foram realizados num microcomputador com as seguintes configurações: 256 RAM de memória e processador Pentium 4 de 2,8 GHz e com sistema operacional Windows Xp Professional versão 2002.

Para avaliar o desempenho computacional dos métodos de diferenças finitas e volumes finitos, foram simulados 9 casos para cada método, variando o refinamento da malha de acordo com a Tabela 5.1. Os parâmetros utilizados foram:  $\psi_0 = 0$ ,  $q_A^* = 3,0 \times 10^{-7}$  m/s,  $L_* = 1$  m,  $\theta_s = 0,5$  m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>,  $\theta_r = 0,1$  m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>,  $K_S = 3,0 \times 10^{-6}$  m/s e  $\alpha = 10$  m<sup>-1</sup>). E a curva de infiltração igual do exemplo 1:  $q_B^* = 0$ ,  $a^* = 0$  e  $b^* \rightarrow \infty$ ,  $q_C^* = 2,5 \times 10^{-6}$  m/s.

TABELA 5.1 – NUMERAÇÃO DOS CASOS SIMULADOS

		dz (m)		
		0,1	0,01	0,001
dt (hr)	1	1	2	3
	0,1	4	5	6
	0,01	7	8	9

Para estes experimentos numéricos a condutividade hidráulica no ponto intermediário dos nós ou volumes foi calculada através da média geométrica (Equação 4.11), pois de acordo com os resultados de HAVERKAMP e VAUCLIN (1979) foi o método com melhor desempenho entre outros oito avaliados. Os resultados numéricos foram confrontados com a solução analítica desenvolvida, considerada exata, a partir da qual obtiveram-se os erros numéricos.

### 5.2.1 Tempo de Processamento

O refinamento da malha geralmente acarreta em melhoria no resultado numérico, mas demanda mais memória computacional e tempo de processamento. As Tabelas 5.2 e 5.3 apresentam os tempos de processamento, em segundos, para cada

caso simulado para os métodos de volumes finitos e diferenças finitas, respectivamente.

TABELA 5.2 – TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA VOLUMES FINITOS

		dz (m)		
		0,1	0,01	0,001
dt (hr)	t (s)			
	1	0,359	21,750	213,391
	0,1	2,156	196,140	2196,766
0,01	17,000	792,735	22194,266	

TABELA 5.3 – TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA DIFERENÇAS FINITAS

		dz (m)		
		0,1	0,01	0,001
dt (hr)	t (s)			
	1	0,406	21,922	218,125
	0,1	15,047	217,937	2198,234
0,01	138,594	2190,297	21672,765	

### 5.2.2 Balanço de Massa

O balanço de massa (BM) destes métodos numéricos é definido como a razão entre o volume de água acumulada e o fluxo líquido entre as faces do domínio. Esta definição é matematicamente representada como:

$$\text{BM} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^0) \Delta z}{\sum_{j=1}^{n+1} \left\{ K_{N-1/2}^j \left[ \frac{\Psi_N^j - \Psi_{N-1}^j}{\Delta z} + 1 \right] - K_{1/2}^j \left[ \frac{\Psi_1^j - \Psi_0^j}{\Delta z} + 1 \right] \right\} \Delta t} \quad (5.6)$$

As Figuras 5.11 e 5.12 apresentam o balanço de massa para os métodos de volumes finitos e diferenças finitas, respectivamente. O BM para o método das diferenças finitas é claramente independente do refinamento no espaço. E quão mais refinada a malha no tempo melhor o BM. Já no caso do método das diferenças finitas

cada caso apresenta um comportamento diferente, mas quão melhor o refinamento, melhor o BM.

FIGURA 5.11 – BALANÇO DE MASSA PARA O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

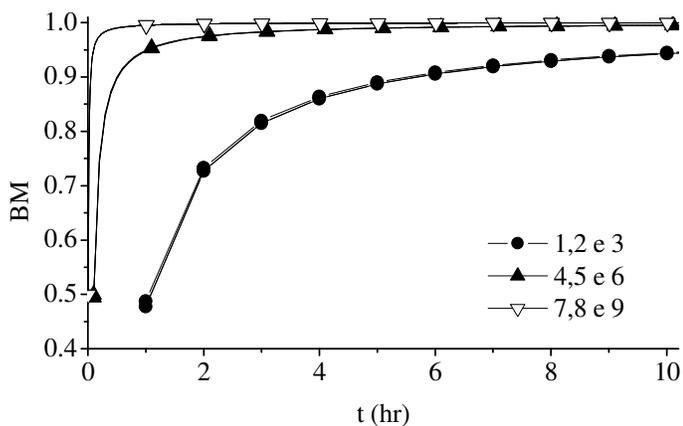
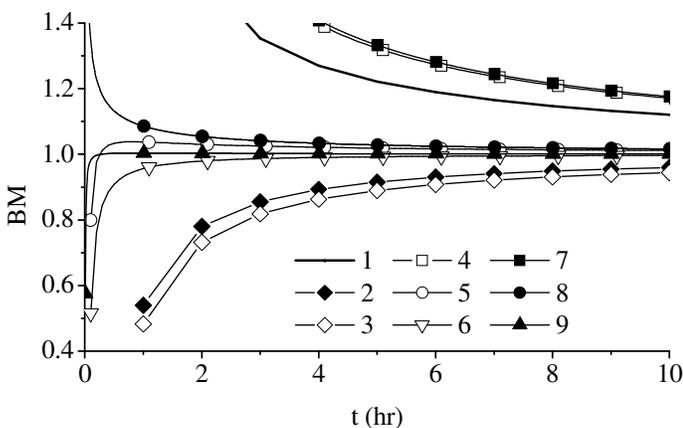


FIGURA 5.12 – BALANÇO DE MASSA PARA O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS



### 5.2.3 Erros Numéricos

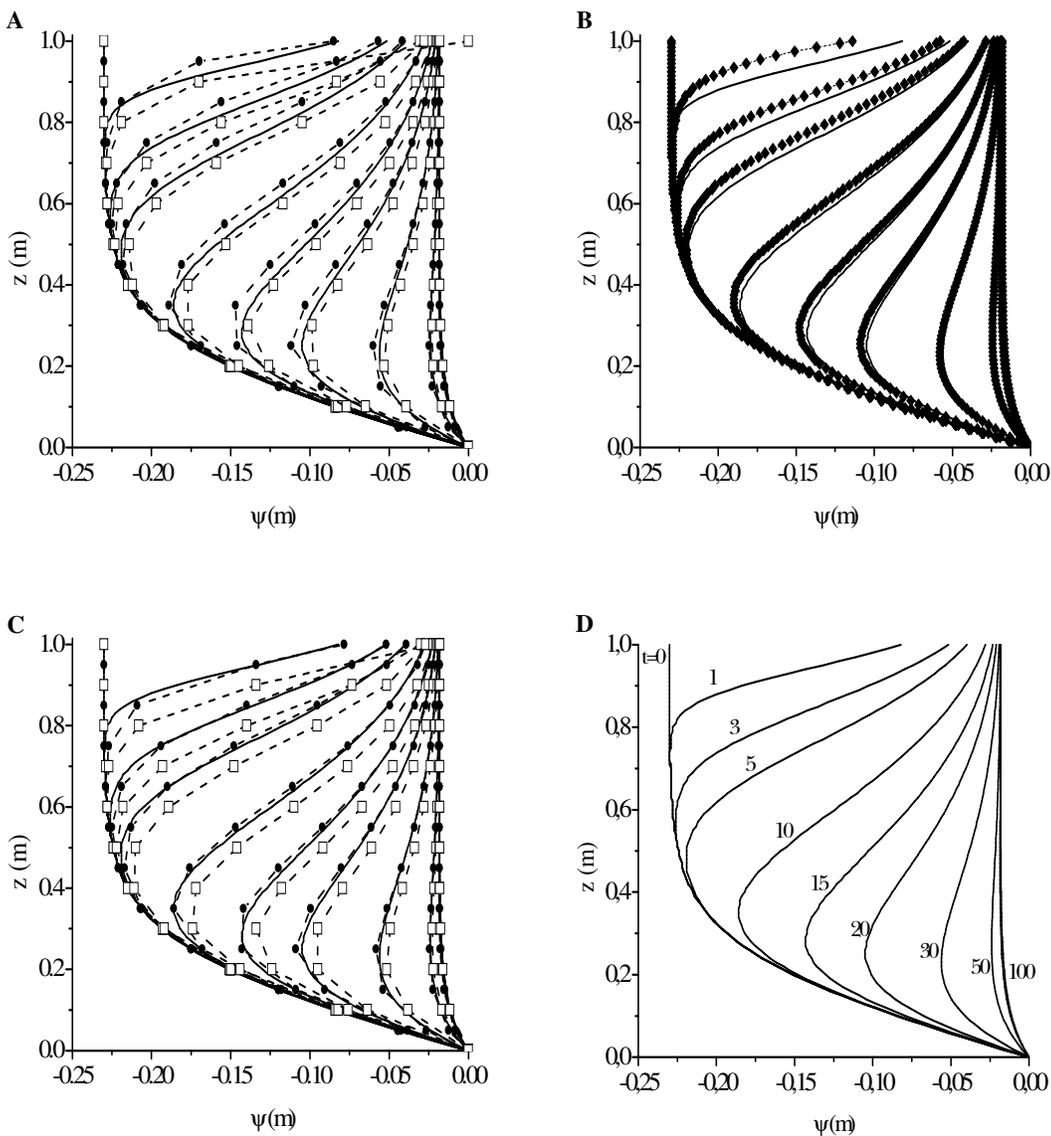
Os erros numéricos são oriundos do método de aproximação numérica, do refinamento da malha e de procedimentos iterativos no processo de cálculo. O erro numérico é definido como:

$$\delta_i^j = \phi_i^j - \psi_i^j \quad (5.7)$$

onde  $\phi$  representa o valor da solução analítica no ponto correspondente do tempo e espaço.

A Figura 5.13 apresenta a comparação dos resultados analíticos e numéricos para alguns dos casos. Os demais não são mostrados porque os pontos sobrepõem a curva analítica. Todavia, ainda possuem erros associados, mas em menor escala.

FIGURA 5.13 – COMPARAÇÃO ANALÍTICO-NUMÉRICO



NOTA: A – caso 1. B casos 2,3 e 5. C casos 4 e 7. D casos 6,8, e 9. (—) Solução Analítica; (---) Diferenças Finitas; (—●—) Volumes Finitos; (—◆—) Diferenças Finitas e Volumes Finitos.

É interessante observar que para os casos 1, 4 e 7 (Figura 5.13 A e C) o esquema de volumes finitos fornece valores ligeiramente à esquerda da curva analítica enquanto que as diferenças finitas à direita. Ou seja, o esquema de volumes finitos fornece valores ligeiramente menores para  $\psi$ , enquanto o esquema de diferenças finitas fornece valores maiores. Já para os casos 2, 3 e 5 ambos métodos apresentam valores à esquerda da curva analítica. Os demais casos, 6, 8 e 9, visualmente se sobrepõe à curva analítica.

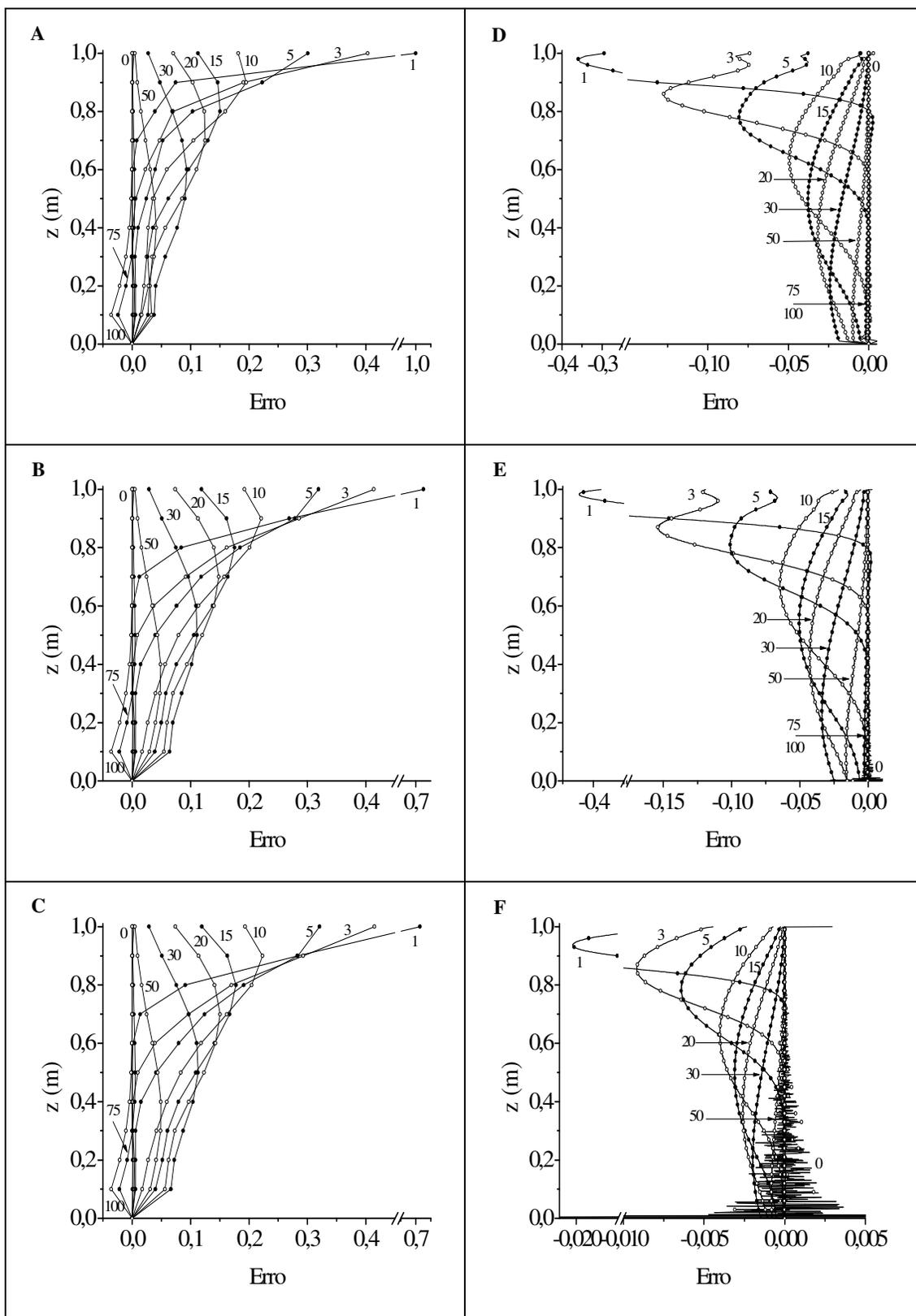
Visualmente, os erros das diferenças finitas são mais acentuados do que os dos volumes finitos, principalmente próximo à condição de contorno superior.

### 5.2.3.1 Evolução dos erros

A Figura 5.14 apresenta os gráficos do erro normalizado (Equação 5.7 normalizada com relação a  $\phi_i^j$ ) de todas as 9 simulações para ambos os métodos em cada ponto da coordenada  $z$ , para alguns tempos. A tendência, de um modo geral, do comportamento do erro com o tempo e o espaço é similar ao processo de difusão-advecção de uma substância conservativa com um pulso de carga inicial (CHAPRA, 1997).

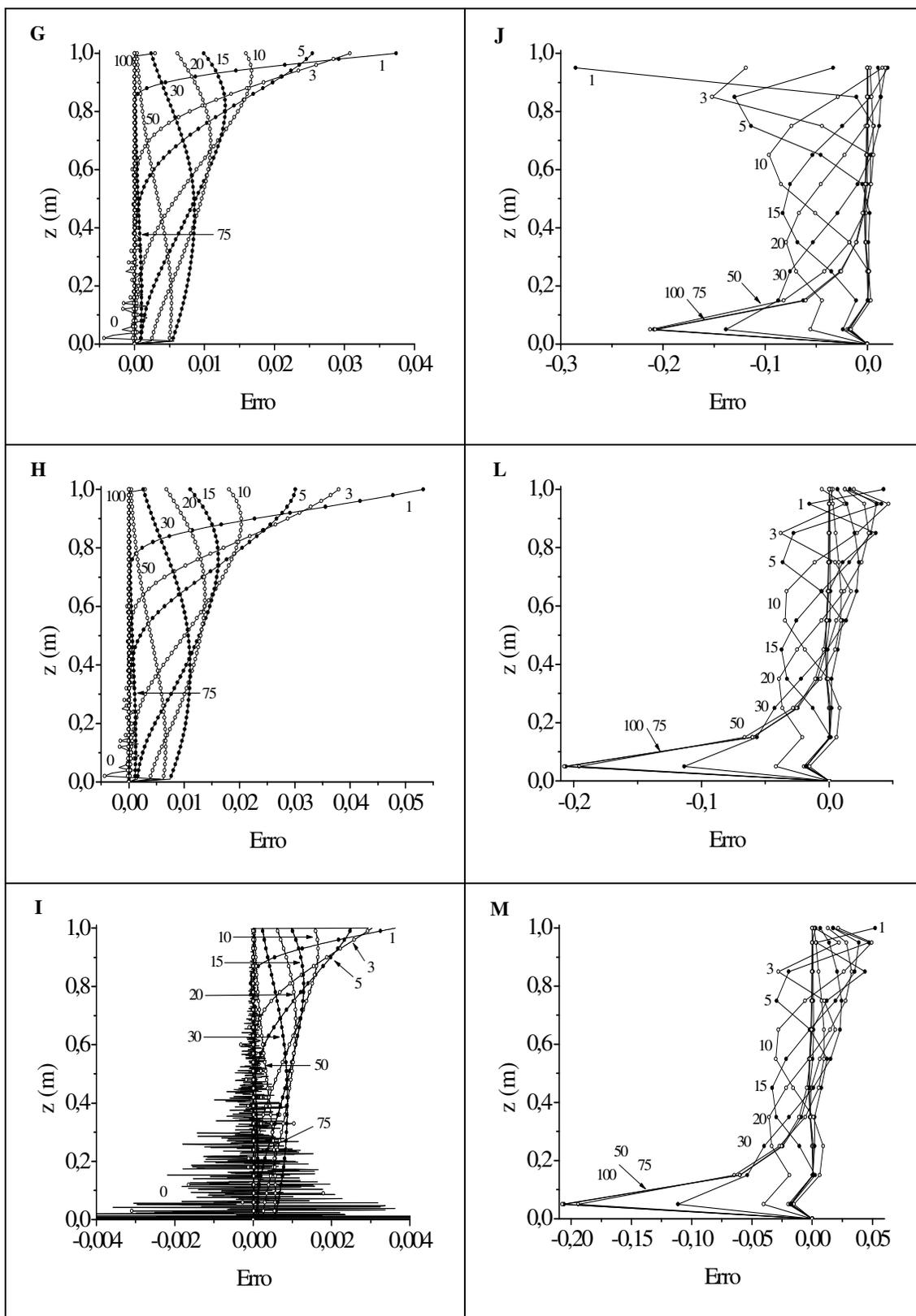
Para todos os casos na simulação por diferenças finitas o erro em  $z^* = 0$  é nulo, uma vez que no próprio ponto é aplicada a condição de contorno. Nas Figuras 5.14 A, B e C, que representam respectivamente os casos 1, 4 e 7 do método de diferenças finitas, as semelhanças são grandes tanto na forma quanto na ordem de grandeza dos erros. Para estes casos o  $\Delta z$  é mantido o mesmo e apenas o  $\Delta t$  varia. Percebe-se então a fraca influência do  $\Delta t$  na redução do erro. De maneira similar as Figuras 5.14 D, E e F, que representam respectivamente os casos 2, 3 e 6 do método de diferenças finitas, apresentam semelhanças no formato das curvas de erro, contudo, com o refinamento de  $\Delta t$  e  $\Delta z$  o erro diminui. Observa-se nestes casos que para o instante inicial, o qual é a solução numérica do estado estacionário, o erro oscila entre valores positivos e negativos, assumindo valores menores no contorno superior e crescendo quanto mais se aproxima ao contorno inferior.

FIGURA 5.14 – EVOLUÇÃO DOS ERROS



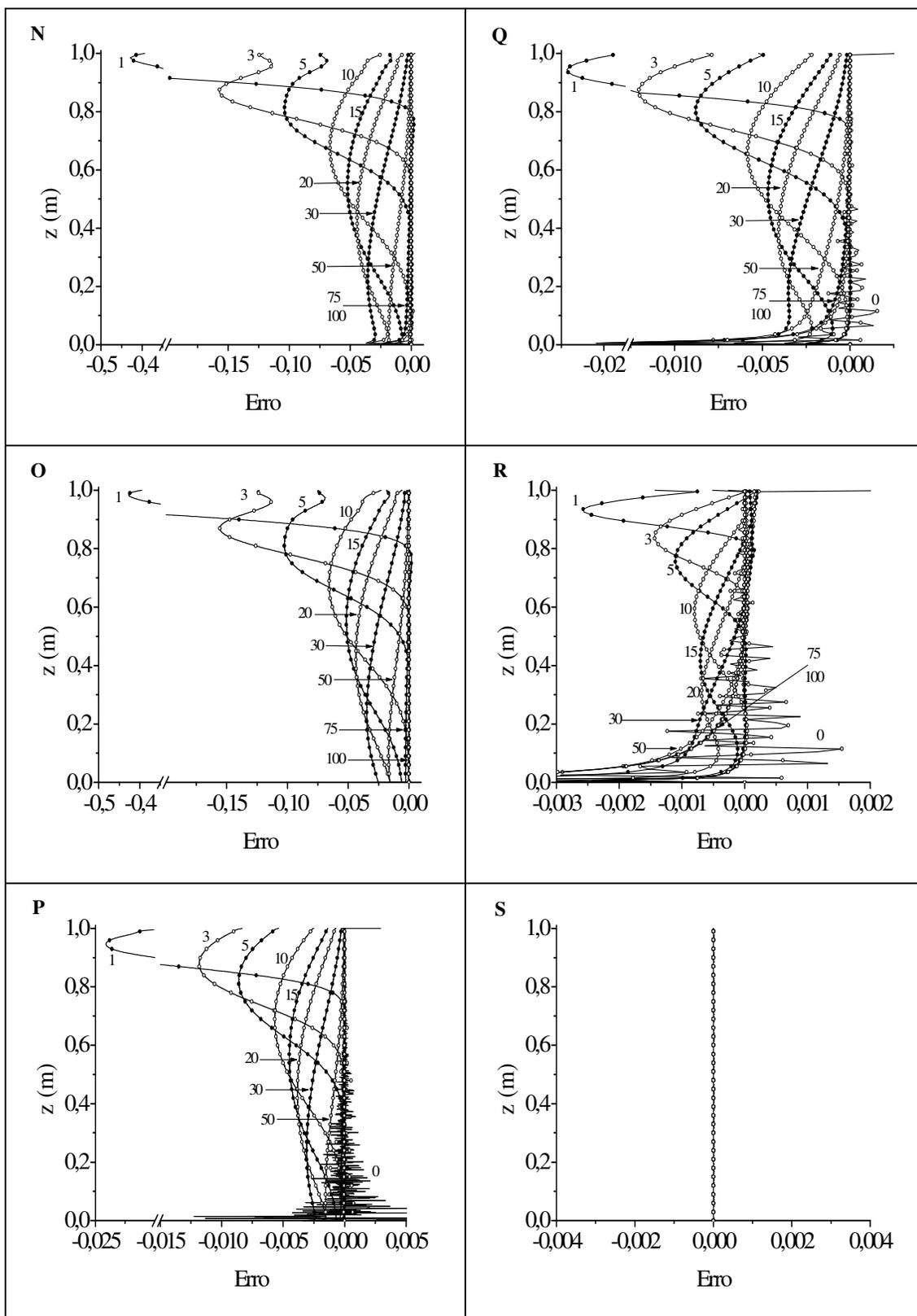
NOTA: resultados de diferenças finitas A – caso 1; B – 4; C – 7; D – 2; E – 3; F – 6

FIGURA 5.14 – EVOLUÇÃO DOS ERROS



NOTA: resultados de diferenças finitas G – caso 5; H – 8; I – 9; e volumes finitos J – 1; L – 4; M – 7

FIGURA 5.14 – EVOLUÇÃO DOS ERROS



NOTA: resultados de volumes finitos N – caso 2; O – 3; P – 6; Q – 5; R – 8; S – 9

As Figuras 5.14 G, H e I, que representam respectivamente os casos 5, 8 e 9 do método de diferenças finitas, também apresentam grandes semelhanças na forma das curvas de erro, mas o erro diminui com o refinamento de  $\Delta z$  e  $\Delta t$ . Nota-se a grande oscilação da curva de erro no instante inicial, muito mais visível no caso 9 apresentado na Figura 5.14 I. Nesta, o erros nos demais tempos são da mesma ordem de grandeza do instante inicial e pode-se observar claramente a oscilação também marcante nos demais casos.

As Figuras 5.14 J, L e M, que representam respectivamente os casos 1, 4 e 7 do método de volumes finitos, possuem semelhanças entre si no comportamento das curvas de erro, com redução do erro conforme a diminuição de  $\Delta t$ , visto que  $\Delta z$  é mantido o mesmo. O perfil também possui a aparência do comportamento advectivo-difusivo, todavia as curvas atravessam o eixo da abscissa, assumindo valores positivos e negativos. Observa-se que os erros crescem com o tempo próximo ao contorno inferior. Isto se explica pela maneira como é aplicada a condição de contorno no bordo inferior da coluna. A aproximação neste contorno possui erros de 1ª ordem, enquanto no restante do domínio de cálculo os erros são de 2ª ordem.

As Figuras 5.14 N, O e P, que representam respectivamente os casos 2, 3 e 6 do método de volumes finitos, possuem além de semelhanças entre si no comportamento das curvas de erro, semelhanças também em relação aos mesmos casos para o método de diferenças finitas com erros da mesma ordem de grandeza. No perfil da condição inicial também é evidente a grande oscilação dos erros entre valores positivos e negativos com crescimento do módulo do erro próximo ao contorno inferior.

As Figuras 5.14 Q, R e S, que representam respectivamente os casos 5, 8 e 9 do método de volumes finitos, apresentam o mesmo comportamento comum a todos os outros casos. Todavia, nas Figuras 5.14 Q e R as curvas de erro apresentam um crescimento do erro quando se aproximam de  $z_* = 0$ . O mesmo comportamento advectivo-difusivo é observado, mas o crescimento do erro próximo ao contorno inferior pode ser interpretado como uma conservação da massa dentro do canal, não permitindo a saída da substância, portanto, gera o acúmulo na saída. Na Figuras 5.14

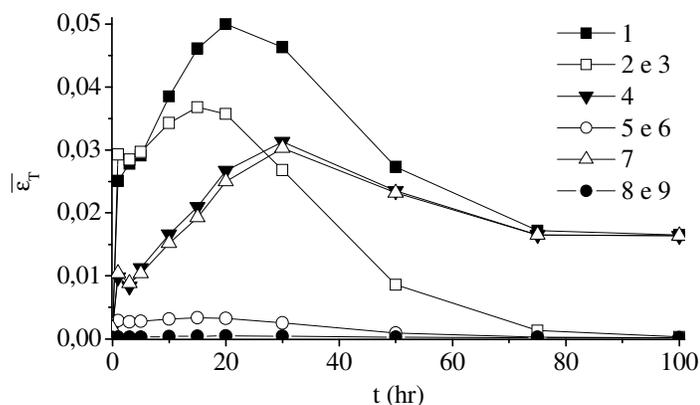
S, que representa o caso com maior refinamento da malha no método de volumes finitos, o erro é nulo.

### 5.2.3.2 Erros no tempo

As Figuras 5.15 e 5.16 apresentam a evolução temporal da média dos erros no espaço para os métodos de volumes finitos e diferenças finitas, respectivamente. O erro no tempo é definido como:

$$\bar{\varepsilon}_T^j = \frac{\sum_{i=1}^N |\delta_i^j|}{\sum_{i=1}^N |\phi_i^j|} \quad (5.8)$$

FIGURA 5.15 – EVOLUÇÃO DOS ERROS TEMPORAIS PARA VOLUMES FINITOS

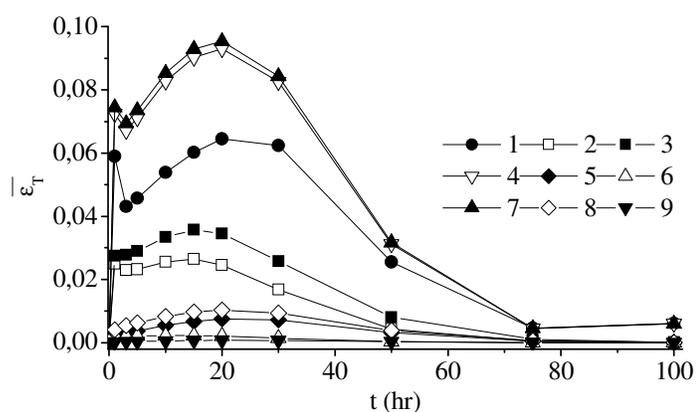


O erro para o método dos volumes finitos apresenta-se crescente no início do cálculo e com o avanço do tempo ele diminui assintoticamente. Para os casos 1,4 e 7 o erro apresenta-se grande. Para os casos 2 e 3 o erro é alto no início e diminui consideravelmente com o tempo. Enquanto que para os demais o erro é pequeno desde o início.

Para o método das diferenças finitas o comportamento é idêntico, contudo com valores numéricos maiores. Os casos 7,4 e 1 apresentam os maiores erros. É curioso

observar que o maior refinamento no tempo, fixado um mesmo  $\Delta z$ , não garante diminuição dos erros, pelo contrário, em certos casos aumenta. A ordem decrescente da magnitude dos erros dos casos é 7-4-1-3-2-8-5-6-9. Então para  $\Delta z = 0,1$  o melhor refinamento no espaço é  $\Delta t = 1$  hr, para  $\Delta z = 0,01$  m,  $\Delta t = 0,1$  hr e para  $\Delta z = 0,001$ ,  $\Delta t = 0,01$  hr.

FIGURA 5.16 – EVOLUÇÃO DOS ERROS TEMPORAIS PARA DIFERENÇAS FINITAS



### 5.2.3.3 Erros no espaço

As Figuras 5.17 e 5.18 apresentam a evolução espacial da média dos erros no tempo para os métodos volumes finitos e diferenças finitas, respectivamente. O erro no espaço é definido como:

$$\bar{\epsilon}_{E_i} = \frac{\sum_{j=1}^n \delta_i^j}{\sum_{j=1}^n \phi_i^j} \quad (5.9)$$

O erro para o método dos volumes finitos apresenta-se maior nos extremos do domínio de cálculo, próximo às condições de contorno. No interior do domínio o erro é aproximadamente constante e menor e maior próximo ao contorno superior, no qual a condição é de fluxo prescrito.

Para as diferenças finitas o erro é pequeno próximo ao contorno inferior e crescente até a contorno superior, atingindo valores maiores que no método dos volumes finitos.

FIGURA 5.17 – EVOLUÇÃO DOS ERROS ESPACIAIS PARA VOLUMES FINITOS

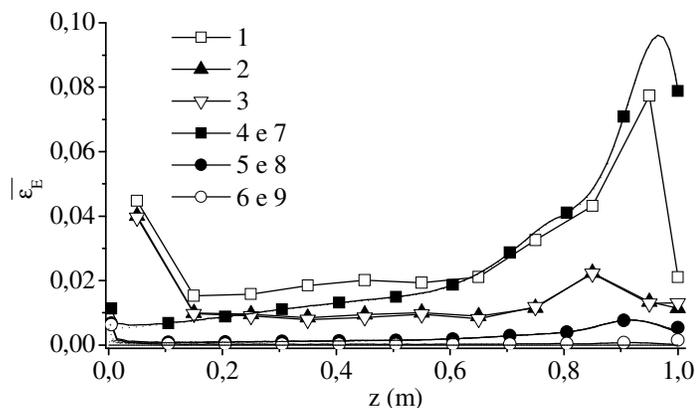
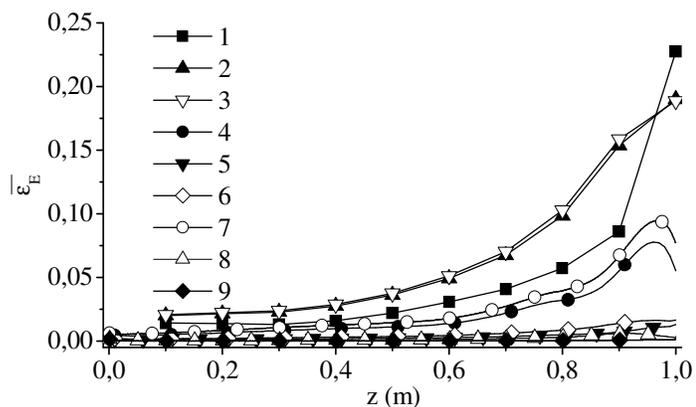


FIGURA 5.18 – EVOLUÇÃO DOS ERROS ESPACIAIS PARA DIFERENÇAS FINITAS

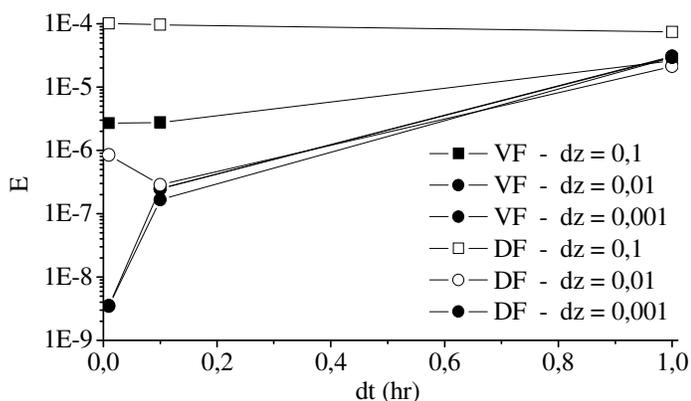


#### 5.2.3.4 Erros gerais

A Figura 5.19 apresenta o erro quadrático médio de toda simulação, dado pela expressão:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \delta_i^j}{N.n} \quad (5.10)$$

FIGURA 5.19 – EVOLUÇÃO DOS ERROS GERAIS PARA DIFERENÇAS E VOLUMES FINITOS



O método dos volumes finitos apresenta um erro decrescente com o refinamento da malha tanto no tempo quanto no espaço. E para o caso 9 o erro é zero.

No caso do método das diferenças finitas o erro para  $dz = 0,1$  m aumenta com o refinamento no tempo. Para  $dz = 0,01$  m o erro diminui e volta a aumentar com o refinamento da malha no tempo. E para  $dz = 0,001$  m o comportamento é sempre decrescente.

#### 5.2.3.5 Erros de variáveis secundárias

Muitas vezes na engenharia os interesses na solução de equações diferenciais são variáveis secundárias, calculadas com a solução numérica. Conhecida o potencial capilar em cada ponto no espaço e no tempo, pode-se calcular o fluxo numa determinada elevação.

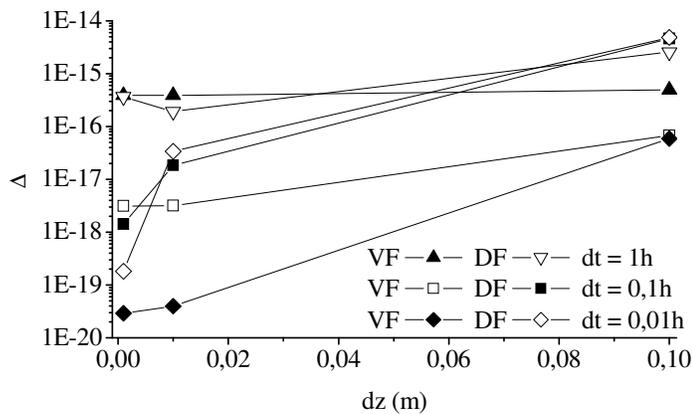
A Figura 5.20 apresenta a variação do erro quadrático médio entra a solução analítica e o cálculo do fluxo em  $z = 0$  para ambos os métodos avaliados. O erro quadrático médio é calculado por:

$$\Delta_i^j = \frac{\sum_{j=1}^n (q_i^j - q_{ti}^j)^2}{n} \quad (5.11)$$

onde,  $q_{ti}$  é a solução analítica e  $q$  é o fluxo calculado numericamente. E  $q$  é calculado através de:

$$q_i^j = K_{i-1/2}^j \left[ \frac{\Psi_i^j - \Psi_{i-1}^j}{\Delta z} + 1 \right] \quad (5.12)$$

FIGURA 5.20 – ERROS NO CALCULO DO FLUXO DE BASE



O erro do fluxo para o método de volumes finitos apresenta um comportamento constante com o refinamento da malha no espaço e no tempo. Mas quanto maior o refinamento, menor a melhoria na precisão. Já o método das diferenças finitas em geral apresenta diminuição do erro com o refinamento da malha, com exceção de alguns casos. E em geral para uma mesma malha o método dos volumes finitos é mais preciso.

## 6. CONCLUSÕES

### 6.1 AS SEGUINTE CONCLUSÕES

A equação de Richards devido a sua elevada não linearidade passou muitos anos após sua divulgação sem soluções analíticas. Após a década de 50 algumas foram desenvolvidas, com um crescente número de casos nas últimas 2 décadas. Entretanto, a exploração de condições de contorno transientes é fraca. Isto posto, a solução analítica desenvolvida neste trabalho contribui devido sua novidade e também por empregar uma função de infiltração mais geral, possibilitando interpretações distintas do comportamento do solo frente a uma taxa de infiltração variável com o tempo. A aplicabilidade da solução analítica desenvolvida é restrita, uma vez que na natureza não encontram-se situações idealizadas como solos com propriedades homogêneas nem que se ajustem tão bem às relações constitutivas propostas por GARDNER (1956). Em contrapartida, a contribuição dá-se no maior entendimento dos processos físicos envolvidos no movimento de água no solo e a compreensão do efeito dos parâmetros hidráulicos do solo sob o fenômeno de dinâmica de água no solo. Deste modo, uma solução analítica, mais facilmente implementada do que soluções numéricas, pode contribuir do ponto de vista didático, permitindo propostas de tarefas que forneçam aos estudantes maior compreensão e sensibilidade quanto às grandezas numéricas das variáveis envolvidas no problema.

As soluções analíticas, além disso, podem também ser utilizadas para avaliar o desempenho de esquemas numéricos. Os esquemas de volumes e diferenças finitas foram analisados e observou-se algumas curiosidades com relação ao comportamento do erro como função do tempo e espaço. Como uma análise geral conclui-se que o desempenho do método dos volumes finitos foi superior ao das diferenças finitas.

### 6.2 INVESTIGAÇÕES FUTURAS

Muitas propostas podem ser sugeridas:

- A continuidade do desenvolvimento de soluções analíticas abordando outros efeitos transientes nas condições de contorno, alterando os perfis iniciais do solo;
- A aplicação da solução analítica em algum caso prático que necessite de pouca precisão no valor da umidade (ou potencial capilar) em determinados tempos e no espaço, mas enfocando fluxos e armazenamentos no solo. De preferência sistemas que possam ser avaliados em uma dimensão e seu resultado estendido a uma determinada área, como por exemplo, em esquemas de parametrização da superfície do solo para finalidade de aplicação de condição de contorno em modelos mais robustos de previsão climática. A solução analítica pode trazer grandes vantagens do ponto de vista da otimização do uso de tempo computacional;
- Calibração dos parâmetros de solos através da solução do problema inverso, no qual dispõe-se de resultados de experimentos de infiltração e buscam-se os parâmetros do solo que melhor representem o fenômeno observado;
- Avaliações experimentais que validem a solução analítica obtida para casos especiais de solos homogêneos e condições controladas. A sugestão está em realizar ensaios em colunas com solos que se ajustem bem às relações constitutivas utilizadas aplicando as condições de contorno do problema. A tarefa que demandaria de mais esforço seria aplicar uma taxa de fluxo na superfície de modo que possa ser representada pela função de infiltração proposta. Para sanar este problema, recomenda-se o uso de bombas de precisão para dosagem do fluxo.

## REFERÊNCIAS

ABBASPOUR, K. C.; SCHULIN, R.; van GENUCHTEN, M. Th. Estimating unsaturated soil hydraulic parameters using ant colony optimization. *Advances in Water Resources*, v.24, p.827-841, 2001.

AMES, W. F. **Nonlinear partial differential equation in Engineering**. London: Ed. Academic Press, 1965.

BASHA, H. A. Multidimensional linearized nonsteady infiltration with prescribed boundary conditions at the soil surface. *Water Resources Research*, v. 35(1), p.75-83, 1999.

BASHA, H. A. Multidimensional linearized nonsteady infiltration toward a shallow water table. **Water Resources Research**, v. 36(9), p.2567-2573, 2000.

BASHA, H. A. Burger's equation: A general nonlinear solution of infiltration and redistribution. **Water Resources Research**, v.38(11), p.29.1-29.9, 2002.

BATU, V. Time-dependent, linearized two-dimensional infiltration and evaporation from nonuniform and nonperiodic strip sources. **Water Resources Research**, v.18(6), p.1725-1733, 1982.

BATU, V. Time-dependent, linearized two-dimensional infiltration and evaporation from nonuniform and periodic strip sources. **Water Resources Research**, v.19(6), p.1523-1529, 1983.

BITTERLICH, S.; DURNER, W.; IDEN, S. C.; KNABNER, P. Inverse estimation of the unsaturated soil hydraulic properties from column outflow experiments using free-form parameterizations. **Vadose Zone Journal**, v.3, p.971-981, 2004.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Ed. Guanabara Dois, 1998.

BRAESTER, C. Moisture variation at the soil surface and the advance of the wetting front during infiltration at constant flux. **Water Resources Research**, v.9(3), p.687-694, 1973.

BRAS, R. L. **Hydrology: An introduction to hydrologic science**. Ed. Addison-Wesley, 1990.

BROADBRIDGE, P.; WHITE, I. Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model 1. Analytic Solution. **Water Resources Research**, v.24(1), p.145-154, 1988.

BROADBRIDGE, P.; ROGERS, C. Exact solutions for vertical drainage and redistribution in soils. **Journal of Engineering Mathematics**, v.24, p.25-43, 1990.

BRUNONE, B.; FERRANTE, M.; ROMANO, N.; SANTINI, A. Numerical simulations of one-dimensional infiltration into layered soils with the Richards equation using different estimates of the interlayer conductivity. **Vadose Zone Journal**, v.2, p.193-200, 2003.

BUTKOV, E. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1988.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. **Conduction of heat in solids**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 1959.

CELIA, M. A.; BOULOUTAS, E. F.; ZARBA, R. L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. **Water Resources Research**, v. 26(7), p.1483-1496, 1990.

CHAPRA, C. S. **Surface Water-Quality Modeling**. Colorado, USA: MCGraw-Hill, 1997.

CHEN, J. M.; TAN, Y. C.; CHEN, C. H., PARLANGE, J. Y. Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes. **Water Resources Research**, v. 37(4), p.1091-1093, 2001.

CHOW, V. T.; MAIDMENT, D. R.; MAYS, L. W. **Applied Hydrology**. New York: McGraw-Hill, 1988.

DAY, W. D. **Introduction to Laplace Transforms for Radio and Electronic Engineers**. New York: Interscience Publishers Inc., 1960.

FAYER, M. J. **UNSAT-H Version 3 Unsaturated Soil Water and Heat Flow Model: Theory, User Manual and Examples**. Pacific Northwest National Laboratory, 2000.

FEDDES, R. A.; KABAT, P.; BAKEL, P. J. T.; BRONSWIJK, J. J. B.; HALBERTSMA, J. Modelling soil water dynamics in the unsaturated zone – state of the art. **Journal of Hydrology**, v.100, p.69-111, 1988.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

FUJITA, H. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II. **Textile Research Journal**, v.22, p.757-760, 1952.

GARDNER, W. R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. **Soil Science**, v.85, p.228-332, 1958.

HAVERKAMP, R.; VAUCLIN, M. A note on estimating finite difference interblock hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems. **Water Resources Research**, v.15(1), p.181-187, 1979.

HAVERKAMP, R.; VAUCLIN, M. A comparative study of three forms of Richard equation used for predicting one-dimensional infiltration in unsaturated soil. **Soil Science Society of America Journal**, v.45, p.13-20, 1981.

HILLS, R. G.; PORRO, I.; HUDSON, D. B.; WIERENG, P. J. Modeling one-dimensional infiltration into very dry soils. 1. Model development and evaluation. **Water Resources Research**, v.25, p.1259-1269, 1989.

IRANNEJAD, P.; HENDERSON-SELLERS, A.; SHARMEEN, S. Importance of land-surface parameterization for latent heat simulation in global atmospheric models. **Geophysical Research Letters**, v. 30(17), p. HLS 3-1, 2003.

JHORAR, R.K.; van DAM, J.C.; BASTIAANSEN, W.G.M.; FEDDES R.A. Calibration of effective soil hydraulic parameters of heterogeneous soil profiles. **Journal of Hydrology**, v.285, p.233–247, 2004.

KWOK, S. F.; LENZI, E. K. Scaling dependence on time and distance in nonlinear fractional diffusion equations and possible applications to the water transport in soils. 2004. Disponível em <[http://arxiv.org/PS\\_cache/cond-mat/pdf/0404/0404352v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/cond-mat/pdf/0404/0404352v1.pdf)> Acesso em: 07 dez. 2007.

LEE, D. H.; ABRIOLA, L. M. Use of the Richards equation in land surface parameterizations. **Journal of Geophysical Research**, v.104, p.27,519 – 27,526, 1999.

LIBARDI, P.L. **Condutividade hidráulica do solo em condições de campo**. Piracicaba, 1978. 113f. Tese (Doutorado em Solos e Nutrição de Plantas) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo.

LOMEN, D. O.; WARRICK, A. W. Time-dependent solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation with water extraction. **Journal of Hydrology**, v.39, p.59-67, 1978.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

MENZIANI, M.; PUGNAGHI, S. VINCENZI, S. Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions. **Journal of Hydrology**, v.332, p.214-225, 2007.

MILLY, P. C. D. Advances in modeling of water in the unsaturated zone. **Transport in porous media**, v.3, p.491-514, 1988.

MINASNY, B.; FIELD, D. J. Estimating soil hydraulic properties and their uncertainty: the use of stochastic simulation in the inverse modelling of the evaporation method. **Geoderma**, v.126, p.277-290, 2005.

MUALEM, Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. **Water Resources Research**., v.12, p.513-522, 1976.

NARASIMHAN, T. N. Hydraulic characterization of aquifers, reservoir rocks and soils: A history of ideas. **Water Resources Research**, v.34(1), p.33-46, 1998.

PHILIP, J. R. The Theory of Infiltration 1. The infiltration equation and its solution. **Soil Science**, v.84, p.345-357. 1957.

PREVEDELLO, C. L. **Física do solo com problemas resolvidos**. SAEAFS Ed.: Curitiba, 1996.

RATHFELDER, K.; ABRIOLA, L. M. Mass conservative numerical solutions of the head-based Richards equation. **Water Resources Research**, v.30(9), p.2579-2586, 1994.

RICHARDS, L. A. Capillary conduction of liquids in porous mediums. **Physics**, v.1, p.318-333, 1931.

RITTER, A.; HUPET, F.; MUNOZ-CARPENA, R.; LAMBOT, S.; VANCLOOSTER, M. Using inverse methods for estimating soil hydraulic properties from field data as an alternative to direct methods. **Agricultural Water Management**, v.59, p. 77-96, 2003.

ROSS, P. J. Efficient numerical methods for infiltration using Richards equation. **Water Resources Research**, v.26(2), p.279-290, 1990.

ROSS, P. J.; PARLANGE, J. Y. Comparing exact and numerical solutions of Richards equation for one-dimensional infiltration and drainage. **Soil Science**, v.157(6), p.341-344, 1994.

SALVUCCI, G. D. Series solution for Richards equation under concentration boundary conditions and uniform initial conditions. **Water Resources Research**, v.32(8), p.2401-2407, 1996.

SANDER, G. C.; PARLANGE, J. Y.; KÜHNEL, V.; HOGARTH, W. L.; LOCKINGTON, D.; O'KANE, J. P. K. Exact nonlinear solution for constant flux infiltration. **Journal of Hydrology**, v.97, p.341-346, 1988.

SPIEGEL, M. R. **Variáveis complexas: resumo da teoria, 379 problemas resolvidos, 973 problemas propostos, com uma introdução às transformações conformes e suas aplicações.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SRIVASTAVA, R.; YEH, T. C. J. Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils. **Water Resources Research**, v.27(5), p.753-762, 1991.

WARRICK, A. W. Analytical solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation for arbitrary input. **Soil Science**, v.120(2), p.79-84, 1975.

WARRICK, A. W.; ISLAS, A.; LOMEN, D. O. An analytical solution to Richards equation for time-varying infiltration. **Water Resources Research**, v.27(5), p.763-766, 1991.

WARRICK, A. W.; LOMEN, D. O. Linearized moisture flow with extraction over two-dimensional zones. **Soil Science Society of America Journal**, v.47, p.869-872, 1983.

WARRICK, A. W.; LOMEN, D. O.; ISLAS, A. An analytical solution to Richards for a draining soil profile. **Water Resources Research**, v.26(2), p.253-258, 1990.

WARRICK, A. W.; PARKIN, G. W. Analytical solution for de one-dimensional drainage: Burgers' and simplified forms. **Water Resources Research**, v.31(11), p.2891-2894, 1995.

YAKOV, P.; TIMLIN, D.; RAWLS, W. Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils. **Journal of Hydrology**, v.272, p.3-13, 2003.

ZAIDEL, J.; RUSSO, D. Estimation of finite difference interblock conductivities for simulation of infiltration into initially dry soils. **Water Resources Research**, v.28(9), p.2285-2295, 1992.

APÊNDICE 1 – CONDIÇÃO DE CONTORNO NO BORDO INFERIOR

A condição de contorno no bordo inferior é o potencial capilar constante prescrita, que pode ser escrita como:

$$\psi(0, t_*) = \psi_0 \quad (\text{A1.1})$$

Adimensionalizando a Equação A1.1 através das Equações 3.2, 3.9 e 3.10 ( $K_* = K_S e^{\alpha\psi}$ ;  $K = K_*/K_S$ ;  $t = \alpha K_S t_*/(\theta_S - \theta_r)$ ) temos que:

$$K(0, t) = e^{\alpha\psi_0} \quad (\text{A1.2})$$

Que é a condição de contorno para o problema transiente e estacionário.

## APÊNDICE 2 – CONDIÇÃO DE CONTORNO NA SUPERFÍCIE

Pela Lei de Darcy (Equação 2.1) e pela Equação 3.16:

$$\left[ K_* \frac{\partial \psi}{\partial z_*} + K_* \right]_{z_*=L_*} = q_B^* + (q_C^* - q_B^*) (e^{-at_*} - e^{-bt_*}) \quad (\text{A2.1})$$

Através das Equações 3.2, 3.8, 3.9 e 3.10 têm-se:

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial z} + K \right]_{z=L} = q_B + (q_C - q_B) (e^{-at} - e^{-bt}) \quad (\text{A2.2})$$

onde

$$q_B = \frac{q_B^*}{K_S} \quad (\text{A2.3})$$

$$q_C = \frac{q_C^*}{K_S} \quad (\text{A2.4})$$

A Equação A2.2 é a condição de contorno a ser aplicada no problema transiente. De modo similar para a condição de contorno do problema estacionário:

$$\left[ K_* \frac{\partial \psi}{\partial z_*} + K_* \right]_{z_*=L_*} = q_A^* \quad (\text{A2.5})$$

Através das Equações 3.2, 3.8, 3.9 e 3.10 têm-se:

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial z} + K \right]_{z=L} = q_A \quad (\text{A2.6})$$

onde

$$q_{\Lambda} = \frac{q_{\Lambda}^*}{K_s} \quad (\text{A2.7})$$

### APÊNDICE 3 – CONDIÇÃO INICIAL

Da Equação 3.11 para o caso estacionário temos:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial z} = 0 \quad (\text{A3.1})$$

Resolvendo a equação diferencial representada pela Equação A3.1 obtém-se:

$$K = C_1 e^{-z} + C_2 \quad (\text{A3.2})$$

Para determinar as constantes  $C_1$  e  $C_2$  da Equação A3.2 são necessárias duas condições de contorno.

Considerando infiltração vertical unidimensional através de um solo homogêneo,  $L_*$  é a profundidade da coluna de solo avaliada, assim  $z_* = 0$  é o bordo inferior e  $z_* = L_*$  é o bordo superior (superfície). As condições de contorno são:

- i. pressão de água  $\psi_0$  aplicada no bordo inferior (Equação A3.4) (veja Apêndice 1);
- ii. fluxo  $q_A^*$  constante, dado pela Equação A3.3, aplicado no bordo superior do solo (Equação A3.5) (veja Apêndice 2);

$$q = q_A^* \quad (\text{A3.3})$$

As condições de contorno, já adimensionalizadas, são matematicamente expressas por:

$$K(0, t) = e^{\alpha \psi_0} \quad (\text{A3.4})$$

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial z} + K \right]_{z=L} = q_A \quad (\text{A3.5})$$

Aplicando as condições de contorno  $C_1 = -q_A + e^{\alpha\psi_0}$  e  $C_2 = q_A$ . E a solução estacionária é:

$$K = q_A - (q_A - e^{\alpha\psi_0})e^{-z} \quad (\text{A3.6})$$

A Equação A3.6 é a solução analítica para infiltração não transiente em um solo homogêneo e é a condição inicial para a solução transiente do processo de infiltração de água em um solo homogêneo.

## APÊNDICE 4 – DISCUSSÃO

O quarto pólo ocorre quando:

$$\frac{1}{2} \sinh \left[ L(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \right] + (s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \cosh \left[ L(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (\text{A4.1})$$

Há duas possibilidades de anular a Equação A4.1:

- i. se  $s < -\frac{1}{4}$  então  $(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$  é um número imaginário puro;
- ii. se  $s > -\frac{1}{4}$  então  $(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$  é um número real;

Analisando cada caso:

#### 1ª Possibilidade:

Fazendo  $(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = i\lambda$ , um número imaginário puro, onde  $\lambda$  é um número real, na Equação A4.1 têm-se que

$$\tan[L\lambda] + 2\lambda = 0 \quad (\text{A4.2})$$

A Equação A4.2 é uma solução possível.

#### 2ª Possibilidade:

Fazendo  $(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \lambda$ , um número real, onde  $\lambda$  é um número real, na Equação A4.1, o único valor de  $\lambda$  que satisfaz a Equação A4.1 é  $\lambda = 0$  ( $s = -\frac{1}{4}$ ). De modo que pode-se escrever  $(s + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = i\lambda$  com  $\lambda = 0$  recaindo na primeira possibilidade.

APÊNDICE 5 – PROGRAMA SAER  
(SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE RICHARDS)

```

PROGRAM SAER
USE DFPORT
IMPLICIT NONE
CHARACTER(20):: arq1,arq2,arq3,texto
CHARACTER(300):: lin
REAL*8 :: erro,z,L,Ks,qA,qB,alpha,psi0,thetaR,thetaS,dz,S,Si,t,dTq,fmin,fmed
REAL*8 :: beta,K0,x1,xo,SEC,pi,delta,K,f,df,a,b,u,qBc,Zq,Tq,qt,q,Xmin,Xmed,Xmax
REAL*8,ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: td,x
REAL*8,ALLOCATABLE,DIMENSION(,:,:) :: psi,theta
INTEGER :: i,j,n,Nt,Nmax,Nz,VER,Nitmax,tipo,plot,NTq,Opt,m

! Abertura e leitura do arquivo de entrada contendo valores de parâmetros do
! problema e parâmetros de cálculo para o programa
VER = SYSTEM("Notepad input.dat")
OPEN(10,FILE='input.dat')
READ(10,*) Ks
READ(10,*) alpha
READ(10,*) thetaR
READ(10,*) thetaS
READ(10,*) qA
DO i = 1,6
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) tipo
READ(10,*) qB
READ(10,*) qBc
READ(10,*) a
READ(10,*) b
READ(10,*) psi0
READ(10,*) L
READ(10,*) dz
READ(10,*) Zq
READ(10,*) Tq
READ(10,*) NTq
READ(10,*) Nmax
READ(10,*) Nitmax
READ(10,*) erro
READ(10,*) arq1
READ(10,*) arq2
READ(10,*) arq3
DO i = 1,5
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) plot
DO i = 1,3
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) Opt
READ(10,*) Nt
READ(10,*)
! entrar com os tempos de avaliação requeridos (horas)
ALLOCATE(td(Nt)) ! tempo dimensional
DO i = 1,Nt
  READ(10,*) td(i)
END DO
CLOSE(10)

! Adimensionalização do parâmetros de entrada
qA = qA/Ks

```

```

qB = qB/Ks
qBc = qBc/Ks
pi = 4.d0*DATAN(1.d0) ! pi = 3.14159265358979323846
Nz = 1+L/dz
L = alpha*L
Zq = alpha*Zq
beta = alpha*Ks/(thetaS-thetaR)
K0 = DEXP(alpha*psi0)
a = a/beta
b = b/beta
ALLOCATE(psi(Nz+1,Nt+1),theta(Nz+1,Nt+1),x(Nmax))

! Resolve a equação TAN(lambida*L) + 2*L = 0 através do método de Newton-Raphson
! x(n) são as raízes lambida da equação

DO n = 1,Nmax
  Xmin=(n-0.5d0)*pi/L+1.d-12
  Xmax=n*pi/L
  DO m = 1,50
    fmin = DTAN(Xmin*L)+2.0d0*Xmin
    Xmed = 0.5d0*(Xmin+Xmax)
    fmed = DTAN(Xmed*L)+2.0d0*Xmed
    if (fmin*fmed<0.d0) then
      Xmax = Xmed
    else
      Xmin = Xmed
    end if
    write(7,*)m,Xmed
  end do

  xo = (Xmin+Xmax)*0.5d0
  f=1000
  i=0
  DO WHILE (i.LE.Nitmax)!((dabs(f)).GE.(erro).and.(i.LE.Nitmax))
    i=i+1
    SEC = 1.d0/DCOS(xo*L)
    f = DTAN(xo*L)+2.0d0*xo
    df = 2.0d0+L*SEC*SEC
    x1 = xo-(f/df)
    xo = x1

  END DO
  x(n)=xo
WRITE(20,*) X(N)
END DO

IF (tipo==1) THEN

DO j = 1,Nt
  t = beta*td(j)*3600.d0 ! tempo adimensional
  DO i = 1,Nz
    z = alpha*dz*(i-1) ! espaço adimensional
    Si = 0.d0
    ! Somatório em lambida(n)
    DO n=1,Nmax
      S = Si+DSIN(x(n)*z)*DSIN(x(n)*L)*DEXP(-t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))
      Si = S
    END DO
    K = qB-(qB-K0)*DEXP(-z)-4.d0*(qB-qA)*DEXP((L-z)*0.5d0)*DEXP(-t*0.25d0)*S
  
```

```

psi(i,j) = (1.d0/alpha)*DLOG(K)
theta(i,j) = thetaR+(thetaS-thetaR)*K

END DO
END DO

END IF

IF (tipo==2) THEN

DO j = 1,Nt
  t = beta*td(j)*3600.d0 ! tempo adimensional
  DO i = 1,Nz
    z = alpha*dz*(i-1) ! espaço adimensional
    Si = 0.d0
      !100 Somatório em lambida(n)
      DO n=1,Nmax
        S = Si+(-qB*(4.d0*x(n)*x(n)+1.d0)-qA*(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0))*&
          DSIN(x(n)*z)*DSIN(x(n)*L)*DEXP(-t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))/ &
          (4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)
        Si = S
      END DO
    IF (a.LT.(0.25d0)) THEN
      u = (0.25d0-a)**(0.5d0)
      K = K0*DEXP(-z)+ DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+qB*DSINH(z*u)*DEXP(-a*t)/&
        (0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
    END IF
    IF (a.EQ.0.25d0) THEN
      K = K0*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+2.d0*qB*z*DEXP(-a*t)/(L+2.d0))
    END IF
    IF (a.GT.0.25d0) THEN
      u = (DABS(0.25d0-a))**(0.5d0)
      K = K0*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+qB*DSIN(z*u)*DEXP(-a*t)/&
        (0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
    END IF
    psi(i,j) = (1.d0/alpha)*DLOG(K)
    theta(i,j) = thetaR+(thetaS-thetaR)*K
  END DO
END DO

END IF

IF (tipo==3) THEN

DO j = 1,Nt
  t = beta*td(j)*3600.d0 ! tempo adimensional
  DO i = 1,Nz
    z = alpha*dz*(i-1) ! espaço adimensional
    Si = 0.d0
      ! Somatório em lambida(n)
      DO n=1,Nmax
        S = Si+(-1.d0*(qB-qBc)*(4.d0*x(n)*x(n)+1.d0)+(qBc-qA)*(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0))*&
          DSIN(x(n)*z)*DSIN(x(n)*L)*DEXP(-t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))/ &
          (4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)
        Si = S
      END DO
    IF (a.LT.(0.25d0)) THEN
      u = (0.25d0-a)**(0.5d0)

```

```

      K = qBc-(qBc-K0)*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+(qB-
qBc)*DSINH(z*u)*DEXP(-a*t)/&
      (0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
      END IF
      IF (a.EQ.0.25d0) THEN
      K = qBc-(qBc-K0)*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+2.d0*(qB-qBc)*z*DEXP(-
a*t)/(L+2.d0))
      END IF
      IF (a.GT.0.25d0) THEN
      u = (DABS(0.25d0-a))**(0.5d0)
      K = qBc-(qBc-K0)*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+(qB-
qBc)*DSIN(z*u)*DEXP(-a*t)/&
      (0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
      END IF

      psi(i,j) = (1.d0/alpha)*DLOG(K)
      theta(i,j) = thetaR+(thetaS-thetaR)*K
      END DO
      END DO

      END IF

      IF (tipo==4) THEN

      DO j = 1,Nt
      t = beta*td(j)*3600.d0 ! tempo adimensional
      DO i = 1,Nz
      z = alpha*dz*(i-1) ! espaço adimensional
      Si = 0.d0
      ! Somatório em lambda(n)
      DO n=1,Nmax
      S = Si+(-4.d0*qB*(b-a)*(4.d0*x(n)*x(n)+1.d0)-qA*(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)*(4.d0*b-
4.d0*x(n)*x(n)-1.d0))*&
      DSIN(x(n)*z)*DSIN(x(n)*L)*DEXP(-t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))/ &
      (4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)/(4.d0*b-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)
      Si = S
      END DO
      IF (a.LT.(0.25d0)) THEN
      u = (0.25d0-a)**(0.5d0)
      K = K0*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+qB*DSINH(z*u)*DEXP(-a*t)/&
      (0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
      END IF
      IF (a.EQ.0.25d0) THEN
      K = K0*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+2.d0*qB*z*DEXP(-a*t)/(L+2.d0))
      END IF
      IF (a.GT.0.25d0) THEN
      u = (DABS(0.25d0-a))**(0.5d0)
      K = K0*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+qB*DSIN(z*u)*DEXP(-a*t)/&
      (0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
      END IF

      IF (b.LT.(0.25d0)) THEN
      u = (0.25d0-b)**(0.5d0)
      K = K-DEXP((L-z)*0.5d0)*(qB*DSINH(z*u)*DEXP(-b*t)/&
      (0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
      END IF
      IF (b.EQ.0.25d0) THEN
      K = K-DEXP((L-z)*0.5d0)*(2.d0*qB*z*DEXP(-b*t)/(L+2.d0))
      END IF

```

```

IF (b.GT.0.25d0) THEN
  u = (DABS(0.25d0-b))**(0.5d0)
  K = K-DEXP((L-z)*0.5d0)*(qB*DSIN(z*u)*DEXP(-b*t)/&
(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
  END IF
  psi(i,j) = (1.d0/alpha)*DLOG(K)
  theta(i,j) = thetaR+(thetaS-thetaR)*K
  END DO
END DO

END IF

IF (tipo==5) THEN

DO j = 1,Nt
  t = beta*td(j)*3600.d0 ! tempo adimensional
  DO i = 1,Nz
    z = alpha*dz*(i-1) ! espaço adimensional
    Si = 0.d0
    ! Somatório em lambda(n)
    DO n=1,Nmax
      S = Si+(-4.d0*(qB-qBc)*(b-a)*(4.d0*x(n)*x(n)+1.d0)+(qBc-qA)*(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-
1.d0)*(4.d0*b-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0))*&
      DSIN(x(n)*z)*DSIN(x(n)*L)*DEXP(-t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))/ &
      (4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)/(4.d0*b-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)
      Si = S
    END DO
    IF (a.LT.(0.25d0)) THEN
      u = (0.25d0-a)**(0.5d0)
      K = qBc-(qBc-K0)*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+(qB-
qBc)*DSINH(z*u)*DEXP(-a*t)/&
(0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
      END IF
      IF (a.EQ.0.25d0) THEN
        K = qBc-(qBc-K0)*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+2.d0*(qB-qBc)*z*DEXP(-
a*t)/(L+2.d0))
        END IF
        IF (a.GT.0.25d0) THEN
          u = (DABS(0.25d0-a))**(0.5d0)
          K = qBc-(qBc-K0)*DEXP(-z)+DEXP((L-z)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+(qB-
qBc)*DSIN(z*u)*DEXP(-a*t)/&
(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
          END IF

          IF (b.LT.(0.25d0)) THEN
            u = (0.25d0-b)**(0.5d0)
            K = K-DEXP((L-z)*0.5d0)*((qB-qBc)*DSINH(z*u)*DEXP(-b*t)/&
(0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
            END IF
            IF (b.EQ.0.25d0) THEN
              K = K-DEXP((L-z)*0.5d0)*(2.d0*(qB-qBc)*z*DEXP(-b*t)/(L+2.d0))
              END IF
              IF (b.GT.0.25d0) THEN
                u = (DABS(0.25d0-b))**(0.5d0)
                K = K-DEXP((L-z)*0.5d0)*((qB-qBc)*DSIN(z*u)*DEXP(-b*t)/&
(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
                END IF
                psi(i,j) = (1.d0/alpha)*DLOG(K)
                theta(i,j) = thetaR+(thetaS-thetaR)*K

```

```

END DO
END DO

END IF

! Calculo do fluxo em Zq
dTq = Tq/NTq
OPEN (50, FILE=arq3)
WRITE(50,12) Zq/alpha
12 FORMAT("# Fluxo Qt avaliado em z =",F11.6," m",2/)
13 FORMAT("#-----")
WRITE(50,13)
WRITE(50,14)
14 FORMAT("#   t",13X,"q(Zq)",17X,"q(L)")
19 FORMAT("#   (h)",12X,"(m/s)",17X,"(m/s)")
WRITE(50,19)
WRITE(50,13)
15 FORMAT(1PE24.15,1X,1PE24.15,1X,1PE24.15)

IF (tipo==1) THEN
  t = 0.d0
  q = qB*Ks
  qt = qA*Ks
  WRITE(50,15)t,qt,q
  DO j = 2,NTq+1
    t = beta*(j-1)*dTq*3600.d0 ! tempo adimensional
    Si = 0.d0
    DO n = 1,Nmax
      S = Si+DSIN(x(n)*L)*(x(n)*DCOS(x(n)*Zq)+0.5d0*DSIN(x(n)*Zq))*DEXP(-
t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))
      Si = S
    END DO
    q = qB*Ks
    qt = Ks*(qB-4.d0*(qB-qA)*DEXP(0.5d0*(L-Zq))*DEXP(-0.25d0*t)*S)
    t = (j-1)*dTq ! tempo em horas
    WRITE(50,15)t,qt,q
  END DO
END IF

IF (tipo==2) THEN
  t = 0.d0
  q = qB*Ks*DEXP(-a*t)
  qt = qA*Ks
  WRITE(50,15)t,qt,q
  DO j = 2,NTq+1
    t = beta*(j-1)*dTq*3600.d0 ! tempo adimensional
    Si = 0.d0
    DO n = 1,Nmax
      S = Si+(-qB*(4.d0*x(n)*x(n)+1.d0)-qA*(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0))*&
      DSIN(x(n)*L)*(x(n)*DCOS(x(n)*Zq)+0.5d0*DSIN(x(n)*Zq))*DEXP(-
t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))/&
      (4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)
      Si = S
    END DO
    IF (a.LT.(0.25d0)) THEN
      u = (0.25d0-a)**(0.5d0)
      qt = Ks*DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+qB*&
      (u*DCOSH(Zq*u)+0.5d0*DSINH(Zq*u))*DEXP(-a*t)/(0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
    END IF
  END DO

```

```

IF (a.EQ.0.25d0) THEN
qt = Ks*DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+2.d0*qB*(1.d0+0.5d0*Zq)*DEXP(-
a*t)/(L+2.d0))
END IF
IF (a.GT.0.25d0) THEN
u = (DABS(0.25d0-a)**(0.5d0)
qt = Ks*DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+qB*&
(u*DCOS(Zq*u)+0.5d0*DSIN(Zq*u))*DEXP(-a*t)/(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
END IF
q = qB*Ks*DEXP(-a*t)
t = (j-1)*dTq ! tempo em horas
WRITE(50,15)t,qt,q
END DO
END IF

IF (tipo==3) THEN
t = 0.d0
q = qBc*Ks+(qB-qBc)*Ks*DEXP(-a*t)
qt = qA*Ks
DO j = 2,NTq+1
t = beta*(j-1)*dTq*3600.d0 ! tempo adimensional
Si = 0.d0
DO n = 1,Nmax
S = Si+(-1.d0*(qB-qBc)*(4.d0*x(n)*x(n)+1.d0)+(qBc-qA)*(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0))*&
(x(n)*DCOS(x(n)*Zq)+0.5d0*DSIN(x(n)*Zq))*DSIN(x(n)*L)*DEXP(-
t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))/ &
(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)
Si = S
END DO
IF (a.LT.(0.25d0)) THEN
u = (0.25d0-a)**(0.5d0)
qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+(qB-qBc)*&
(u*DCOSH(Zq*u)+0.5d0*DSINH(Zq*u))*DEXP(-a*t)/(0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
END IF
IF (a.EQ.0.25d0) THEN
qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+2.d0*(qB-qBc)*(1.d0+Zq*0.5d0)*DEXP(-
a*t)/(L+2.d0))
END IF
IF (a.GT.0.25d0) THEN
u = (DABS(0.25d0-a)**(0.5d0)
qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+(qB-qBc)*&
(u*DCOS(Zq*u)+0.5d0*DSIN(Zq*u))*DEXP(-a*t)/(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
END IF
qt = (qt+qBc)*Ks
q = qBc*Ks+(qB-qBc)*Ks*DEXP(-a*t)
t = (j-1)*dTq ! tempo em horas
WRITE(50,15)t,qt,q
END DO
END IF

IF (tipo==4) THEN
t = 0.d0
q = qB*Ks*(DEXP(-a*t)-DEXP(-b*t))
qt = qA*Ks
DO j = 2,NTq+1
t = beta*(j-1)*dTq*3600.d0 ! tempo adimensional
Si = 0.d0
DO n = 1,Nmax

```

```

      S = Si+(-4.d0*qB*(b-a)*(4.d0*x(n)*x(n)+1.d0)-qA*(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)*(4.d0*b-
4.d0*x(n)*x(n)-1.d0))*&
      DSIN(x(n)*L*(x(n)*DCOS(x(n)*Zq)+0.5D0*DSIN(x(n)*Zq))*DEXP(-
t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))/ &
      (4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)/(4.d0*b-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)
      Si = S
      END DO
      IF (a.LT.(0.25d0)) THEN
        u = (0.25d0-a)**(0.5d0)
        qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+qB*&
(u*DCOSH(Zq*u)+0.5d0*DSINH(Zq*u))*DEXP(-a*t)/(0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u)))
        END IF
      IF (a.EQ.0.25d0) THEN
        qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+2.d0*qB*(1.d0+Zq*0.5d0)*DEXP(-a*t)/(L+2.d0))
        END IF
      IF (a.GT.0.25d0) THEN
        u = (DABS(0.25d0-a))**(0.5d0)
        qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+qB*&
(u*DCOS(Zq*u)+0.5d0*DSIN(Zq*u))*DEXP(-a*t)/(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
        END IF

      IF (b.LT.(0.25d0)) THEN
        u = (0.25d0-b)**(0.5d0)
        qt = qt-DEXP((L-Zq)*0.5d0)*qB*(u*DCOSH(Zq*u)+0.5d0*DSINH(Zq*u))*DEXP(-b*t)/&
(0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u))
        END IF
      IF (b.EQ.0.25d0) THEN
        qt = qt-DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(2.d0*qB*(1.d0+Zq*0.5d0)*DEXP(-b*t)/(L+2.d0))
        END IF
      IF (b.GT.0.25d0) THEN
        u = (DABS(0.25d0-b))**(0.5d0)
        qt = qt-DEXP((L-Zq)*0.5d0)*qB*(u*DCOS(Zq*u)+0.5d0*DSIN(Zq*u))*DEXP(-b*t)/&
(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u))
        END IF
        qt = qt*Ks
        q = qB*Ks*(DEXP(-a*t)-DEXP(-b*t))
        t = (j-1)*dTq ! tempo em horas
        WRITE(50,15)t,qt,q
      END DO
    END IF

  IF (tipo==5) THEN
    t = 0.d0
    q = qBc*Ks+(qB-qBc)*Ks*(DEXP(-a*t)-DEXP(-b*t))
    qt = qA*Ks
    DO j = 2,NTq+1
      t = beta*(j-1)*dTq*3600.d0 ! tempo adimensional
      Si = 0.d0
      DO n = 1,Nmax
        S = Si+(-4.d0*(qB-qBc)*(b-a)*(4.d0*x(n)*x(n)+1.d0)+(qBc-qA)*(4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)*(4.d0*b-
4.d0*x(n)*x(n)-1.d0))*&
        (x(n)*DCOS(x(n)*Zq)+0.5d0*DSIN(x(n)*Zq))*DSIN(x(n)*L)*DEXP(-
t*x(n)*x(n))/(1.d0+0.5d0*L+2.d0*L*x(n)*x(n))/ &
        (4.d0*a-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)/(4.d0*b-4.d0*x(n)*x(n)-1.d0)
        Si = S
      END DO
      IF (a.LT.(0.25d0)) THEN
        u = (0.25d0-a)**(0.5d0)
        qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+(qB-qBc)*&

```

```

(u*DCOSH(Zq*u)+0.5d0*DSINH(Zq*u))*DEXP(-a*t)/(0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u))
END IF
IF (a.EQ.0.25d0) THEN
qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+2.d0*(qB-qBc)*(1.d0+Zq*0.5d0))*DEXP(-
a*t)/(L+2.d0))
END IF
IF (a.GT.0.25d0) THEN
u = (DABS(0.25d0-a))*0.5d0
qt = DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(-4.d0*DEXP(-t*0.25d0)*S+(qB-qBc)*&
(u*DCOS(Zq*u)+0.5d0*DSIN(Zq*u))*DEXP(-a*t)/(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u)))
END IF

IF (b.LT.(0.25d0)) THEN
u = (0.25d0-b)*0.5d0
qt = qt-DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(qB-qBc)*(u*DCOSH(Zq*u)+0.5d0*DSINH(Zq*u))*DEXP(-b*t)/&
(0.5d0*DSINH(L*u)+u*DCOSH(L*u))
END IF
IF (b.EQ.0.25d0) THEN
qt = qt-DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(2.d0*(qB-qBc)*(1.d0+Zq*0.5d0))*DEXP(-b*t)/(L+2.d0))
END IF
IF (b.GT.0.25d0) THEN
u = (DABS(0.25d0-b))*0.5d0
qt = qt-DEXP((L-Zq)*0.5d0)*(qB-qBc)*(u*DCOS(Zq*u)+0.5d0*DSIN(Zq*u))*DEXP(-b*t)/&
(0.5d0*DSIN(L*u)+u*DCOS(L*u))
END IF
qt = (qt+qBc)*Ks
q = qBc*Ks+(qB-qBc)*Ks*(DEXP(-a*t)-DEXP(-b*t))
t = (j-1)*dTq ! tempo em horas
WRITE(50,15)t,qt,q
END DO
END IF

CLOSE (50)

OPEN (20, FILE=arq1)
OPEN (30, FILE=arq2)

WRITE(20,1)
1 FORMAT ("# Z(m) ",<7*Nt-1>X,"PSI(m)")
WRITE(30,2)
2 FORMAT ("# Z(m) ",<7*Nt-1>X,"THETA")

lin = " "
DO i=1,Nt
lin = TRIM(ADJUSTL(lin))/'-----'
END DO
lin = TRIM(ADJUSTL(lin))/'---'
ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(lin)))
3 FORMAT ("#",10x,A<ver>)
WRITE(20,3) TRIM(ADJUSTL(lin))
WRITE(30,3) TRIM(ADJUSTL(lin))

4 FORMAT ("#",4x,"T (h)=",<Nt>E24.15)
WRITE(20,4) (td(j), j=1,Nt)
WRITE(30,4) (td(j), j=1,Nt)

lin = "#-----"
DO i=1,Nt
lin = TRIM(ADJUSTL(lin))/'-----'

```

```

END DO
lin = TRIM(ADJUSTL(lin))/'---'
ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(lin)))
5 FORMAT (A<ver>)
WRITE(20,5) TRIM(ADJUSTL(lin))
WRITE(30,5) TRIM(ADJUSTL(lin))

6 FORMAT (1PE24.15,<Nt>E24.15)

DO i = 1,Nz
  z = dz*DABS(1.d0-i)
  WRITE(20,6) z,(psi(i,j), j = 1,Nt)
  WRITE(30,6) z,(theta(i,j), j = 1,Nt)
END DO

CLOSE (20)
CLOSE (30)

texto = "Notepad "//arq1
VER = SYSTEM(texto)

texto = "Notepad "//arq2
VER = SYSTEM(texto)

texto = "Notepad "//arq3
VER = SYSTEM(texto)

CALL WRITE_SCRIPT(arq1,arq2,arq3,Nt,plot,Opt)
VER = SYSTEM ("Wgnuplot script.txt")

END PROGRAM

!#####!

SUBROUTINE WRITE_SCRIPT(arq1,arq2,arq3,Nt,plot,Opt)
USE DFPORT
IMPLICIT NONE
CHARACTER(20) arq1,arq2,arq3,num
INTEGER i,Nt,DOS,tam1,tam2,tam3,plot,Opt

OPEN(40,FILE="script.txt")

IF (plot==0) THEN
GO TO 200
ELSE
GO TO 100
END IF

100 CONTINUE
IF (plot==1.OR.plot==3) THEN
OPEN(10,FILE = 'input.dat')
DO i=1,40
READ(10,*)
END DO
WRITE(40,*) "set title 'Z x Psi(t)'"
WRITE(40,*) "set data style linespoints"
WRITE(40,*) "set grid"
WRITE(40,*) "set xlabel 'Psi(m)'"
WRITE(40,*) "set ylabel 'Z(m)'"

```

```

WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq1)))
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
7 FORMAT(" plot ",A<tam1>," using ($2):($1) title 'T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,7)TRIM(ADJUSTL(arq1)),num
END IF

IF (plot==1.OR.plot==3) THEN
DO i = 2,Nt
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
tam3 = MOD(10,i+1)
IF (tam3.GE.10.OR.(i+1).EQ.10) THEN
tam3 = 2
ELSE
tam3 = 1
END IF
8 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($,I<tam3>):($1) title 'T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,8)TRIM(ADJUSTL(arq1)),i+1,num
! WRITE(40,*) "pause 1"
END DO
CLOSE(10)
END IF

IF (plot==2.OR.plot==3) THEN
WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"
WRITE(40,*) "#####"
WRITE(40,*) "reset"
OPEN(10,FILE = 'input.dat')
DO i=1,40
READ(10,*)
END DO
WRITE(40,*) "set title 'Z x Theta(t)'"
WRITE(40,*) "set data style linespoints"
WRITE(40,*) "set grid"
WRITE(40,*) "set xlabel 'Theta'"
WRITE(40,*) "set ylabel 'Z(m)'"
WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq2)))
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
9 FORMAT(" plot ",A<tam1>," using ($2):($1) title 'T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,9)TRIM(ADJUSTL(arq2)),num
END IF

IF (plot==2.OR.plot==3) THEN
DO i = 2,Nt
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
tam3 = MOD(10,i+1)
IF (tam3.GE.10.OR.(i+1).EQ.10) THEN
tam3 = 2
ELSE
tam3 = 1
END IF
11 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($,I<tam3>):($1) title 'T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,11)TRIM(ADJUSTL(arq2)),i+1,num
END DO

```

```

CLOSE(10)
END IF

WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"

200 CONTINUE

IF (Opt==1) THEN
  WRITE(40,*) "#####"
  WRITE(40,*) "reset"
  WRITE(40,*) "set title 'Q x t'"
  WRITE(40,*) "set data style linespoints"
  WRITE(40,*) "set grid"
  WRITE(40,*) "set xlabel 'T (h)'"
  WRITE(40,*) "set ylabel 'Q(m/s)'"
  WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
  tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq3)))
  16 FORMAT(" plot ",A<tam1>," using ($1):($2) title 'q(z=Zb)'"
  WRITE(40,16)TRIM(ADJUSTL(arq3))
  17 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($1):($3) title 'q(z=L)'"
  WRITE(40,17)TRIM(ADJUSTL(arq3))
  WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"
END IF

CLOSE(40)

END SUBROUTINE WRITE_SCRIPT

```

APÊNDICE 6 – PROGRAMA SNERD (SOLUÇÃO NUMÉRICA  
DA EQUAÇÃO DE RICHARDS POR DIFERENÇAS FINITAS)

```

PROGRAM SNERD
USE DFPORT
IMPLICIT NONE
CHARACTER(20):: arq1,arq2,arq3,texto
CHARACTER(300):: lin
REAL*8 :: z,L,Ks,qA,qB,alpha,psi0,thetaR,thetaS,dz
REAL*8 :: a,b,Ke,Kw,eps,Cp,t,qt,E,erro,DEN,NUM
REAL*8 :: Ap,Aw,Ae,Bp,dt,f,qBc,Zq,T1,T2
REAL*8,ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: td,psi,psib,theta,thetaI,P,Q,psiit,BM
INTEGER :: i,j,n,Nmax,VER,Nitmax,tipa,Nat,it,k,plot,Opt,Nq,Nnode,Nt
CHARACTER(300),ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: linha

! Abertura e leitura do arquivo de entrada contendo valores de parâmetros do
! problema e parâmetros de cálculo para o programa
VER = SYSTEM("Notepad input.dat")
OPEN(10,FILE='input.dat')
READ(10,*) Ks
READ(10,*) alpha
READ(10,*) thetaR
READ(10,*) thetaS
READ(10,*) qA
DO i = 1,6
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) tipa
READ(10,*) qB
READ(10,*) qBc
READ(10,*) a
READ(10,*) b
READ(10,*) psi0
READ(10,*) L
READ(10,*) dz
READ(10,*) dt
READ(10,*) Zq
READ(10,*) Nitmax
READ(10,*) erro
READ(10,*) eps
READ(10,*) arq1
READ(10,*) arq2
READ(10,*) arq3
DO i = 1,5
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) plot
DO i = 1,3
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) Opt
READ(10,*) Nat
READ(10,*)
! entrar com os tempos de avaliação requeridos (horas)
ALLOCATE(td(Nat))
DO i = 1,Nat
  READ(10,*) td(i)
END DO
CLOSE(10)

T1 = TIMEF()
Nnode = L/dz+1

```

```

Nt = td(Nat)/dt
dt = dt*3600.d0 ! transforma dt de horas para segundos
Nq = IDINT(Zq/dz+1.d0)

ALLOCATE(BM(Nt+1),P(Nnode+2),Q(Nnode+2),psi(Nnode+2),psib(Nnode+2),psiit(Nnode+2),linha(Nnode),t
heta(Nnode),thetal(Nnode))

! Condição inicial
theta(1) = thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi0)
thetal(1) = theta(1)
psib(1) = psi0
DO i = 2,Nnode
  z = (i-1.d0)*dz
  psib(i) = (1.d0/alpha)*DLOG(qA/Ks-DEXP(-alpha*z)*(qA/Ks-DEXP(alpha*psi0)))
  theta(i) = thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psib(i))
  thetal(i) = theta(i) ! armazena a condição inicial para calculo do balanço de massa
END DO

OPEN (20, FILE=arq1)
OPEN (30, FILE=arq2)

WRITE(20,1)
1 FORMAT ("#  Z(m) ",<7*Nat-1>X,"PSI(m)")
WRITE(30,2)
2 FORMAT ("#  Z(m) ",<7*Nat-1>X,"THETA")

lin = "      "
DO i=1,Nat
  lin = TRIM(ADJUSTL(lin))//'------'
END DO
lin = TRIM(ADJUSTL(lin))//'----'
ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(lin)))
3 FORMAT ("#",10x,A<ver>)
WRITE(20,3) TRIM(ADJUSTL(lin))
WRITE(30,3) TRIM(ADJUSTL(lin))

4 FORMAT ("#",4x,"T (h)=",<Nat>F14.3)
WRITE(20,4) (td(j), j=1,Nat)
WRITE(30,4) (td(j), j=1,Nat)

lin = "#-----"
DO i=1,Nat
  lin = TRIM(ADJUSTL(lin))//'------'
END DO
lin = TRIM(ADJUSTL(lin))//'----'
ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(lin)))
5 FORMAT (A<ver>)
WRITE(20,5) TRIM(ADJUSTL(lin))
WRITE(30,5) TRIM(ADJUSTL(lin))

6 FORMAT (F11.6,F14.8)

DO i = 1,Nnode
  z = (i-1.d0)*dz
  WRITE(20,6) z,psib(i)
  WRITE(30,6) z,theta(i)
END DO

CLOSE (20)

```

```

CLOSE (30)

! Calculo do fluxo em Zq
OPEN (50, FILE=arq3)
OPEN (50, FILE=arq3)
WRITE(50,22) Zq
22 FORMAT("# Fluxo Qt avaliado em z =",F11.6," m",2/)
23 FORMAT("#-----")
WRITE(50,23)
WRITE(50,24)
24 FORMAT("# t",13X,"q(Zq)",17X,"q(L)")
29 FORMAT("# (h)",12X,"(m/s)",17X,"(m/s)")
WRITE(50,29)
WRITE(50,23)
25 FORMAT(F11.6,1X,F20.16,1X,F20.16)
WRITE(50,25) 0.d0,qA

IF (td(1)==0.d0) THEN
  k=2
ELSE
  k=1
END IF

psiit = psib
psi = psib*0.95d0
DEN = 0.d0

DO j = 1,Nt
  t = j*dt
  it = 0
  E = 1000.d0
  DO WHILE (it.LE.Nitmax.AND.E.GT.erro)

    it = it+1
    ! PARAMETROS NO CONTORNO z=0 (P=1) // C.C. psi=psi0
    i = 1
    Aw = 0.d0
    Ae = 0.d0
    Ap = 1.d0
    Bp = psi0
    P(1) = Ae/Ap
    Q(1) = Bp/Ap

    ! PARAMETROS NO INTERVALO z [dz,L-dz] (P=2,Nnode-1)
    DO i = 2,Nnode-1

      Ke = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i+1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i+1)))
      Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i-1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i-1)))

      Cp = alpha*(thetaS-thetaR)*(DEXP(alpha*psib(i))+DEXP(alpha*psiit(i)))
      Aw = Kw/dz/dz
      Ae = Ke/dz/dz
      Ap = Aw+Ae+Cp/dt
      Bp = psib(i)*Cp/dt+(Ke-Kw)/dz

      Ke = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psib(i)+psib(i+1))))/(DEXP(alpha*psib(i))+DEXP(alpha*psib(i+1)))
      Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psib(i)+psib(i-1))))/(DEXP(alpha*psib(i))+DEXP(alpha*psib(i-1)))

      Bp = Bp+(Ke*((psib(i+1)-psib(i))/dz+1.d0)-Kw*((psib(i)-psib(i-1))/dz+1.d0))/dz

```

```

P(i) = Ae/(Ap-Aw*P(i-1))
Q(i) = (Bp+Aw*Q(i-1))/(Ap-Aw*P(i-1))
END DO

! PARÂMETROS NO CONTORNO z=L (P=N) // C.C. q=qB(t)
i = Nnode
Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i-1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i-1)))
Aw = 1.d0
Ae = 0.d0
Ap = 1.d0
IF (tipo==1) THEN
  f = qB
END IF
IF (tipo==2) THEN
  f = (qB/a/dt)*(-DEXP(-a*(t+0.5d0*dt))+DEXP(-a*(t-0.5d0*dt)))
END IF
IF (tipo==3) THEN
  f = qBc+((-DEXP(-a*(t+0.5d0*dt))+DEXP(-a*(t-0.5d0*dt)))/a)*(qB-qBc)/dt
END IF
IF (tipo==4) THEN
  f = (qB/dt)*((-DEXP(-a*(t+0.5d0*dt))+DEXP(-a*(t-0.5d0*dt)))/a+&
    (DEXP(-b*(t+0.5d0*dt))-DEXP(-b*(t-0.5d0*dt)))/b)
END IF
IF (tipo==5) THEN
  f = qBc+((-DEXP(-a*(t+0.5d0*dt))+DEXP(-a*(t-0.5d0*dt)))/a+&
    (DEXP(-b*(t+0.5d0*dt))-DEXP(-b*(t-0.5d0*dt)))/b)*(qB-qBc)/dt
END IF
Bp = (f/Kw-1.d0)*dz
P(Nnode) = 0.0d0
Q(Nnode) = (Bp+Aw*Q(Nnode-1))/(Ap-Aw*P(Nnode-1))

! SOLUÇÃO POR TDMA
E = 0
DO i = Nnode,1,-1
  psi(i) = P(i)*psi(i+1)+Q(i) ! O psi(N+1) não importa por que P(N)=0
  E = E + DABS(psiit(i)-psi(i))
END DO

! atribuição
psiit=psi

END DO

psib=psi

!para calculo BM
NUM = (thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi(1))-thetaI(1))*0.5d0*dz
num = 0.d0
DO i = 2,Nnode-1 !1,Nnode-1
  NUM = NUM+(thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi(i))-thetaI(i))*dz
END DO
NUM = NUM+(thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi(Nnode))-thetaI(Nnode))*0.5d0*dz

Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psi(Nnode)+psi(Nnode-
1))))/(DEXP(alpha*psi(Nnode))+DEXP(alpha*psi(Nnode-1)))
Ke = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psi(2)+psi(1))))/(DEXP(alpha*psi(2))+DEXP(alpha*psi(1)))
DEN = DEN+(Kw*((psi(Nnode)-psi(Nnode-1))/dz+1.d0)-Ke*((psi(2)-psi(1))/dz+1.d0)) !*0.5d0
BM(j) = NUM/DEN/dt
write(8,*)j,BM(j)

```

```

qt = Ke*((psi(Nq+1)-psi(Nq))/dz+1.d0)

WRITE(50,25)t/3600.d0,qt,f

IF ((t/3600.d0).GE.td(k)) THEN
  OPEN (20, FILE=arq1)
  OPEN (30, FILE=arq2)
  DO i=1,4
    READ(20,*)
  END DO
  7 FORMAT(A300)
  DO i=1,Nnode
    READ(20,7) linha(i)
  END DO
  REWIND(20)
  DO i=1,4
    READ(20,*)
  END DO

  DO i=1,Nnode
    ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(linha(i))))
    9 FORMAT (3X,A<ver>,F14.8)
    WRITE(20,9)TRIM(ADJUSTL(linha(i))),psi(i)
  END DO

  DO i=1,4
    READ(30,*)
  END DO
  DO i=1,Nnode
    READ(30,7) linha(i)
  END DO
  REWIND(30)
  DO i=1,4
    READ(30,*)
  END DO

  DO i=1,Nnode
    ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(linha(i))))
    theta(i) = thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi(i))
    13 FORMAT (3X,A<ver>,F14.8)
    WRITE(30,13)TRIM(ADJUSTL(linha(i))),theta(i)
  END DO

  k=k+1

  CLOSE (20)
  CLOSE (30)
END IF

END DO

T2 =TIMEF()

texto = "Notepad "//arq1
VER = SYSTEM(texto)

texto = "Notepad "//arq2
VER = SYSTEM(texto)

```

```

CALL WRITE_SCRIPT(arq1,arq2,arq3,Nat,plot,Opt)
VER = SYSTEM ("Wgnuplot script.txt")

WRITE(*,31) T2-T1
31 FORMAT("O tempo de processamento foi de ",F9.3," segundos",1/)

END PROGRAM

!#####!

SUBROUTINE WRITE_SCRIPT(arq1,arq2,arq3,Nat,plot,Opt)
USE DFPORT
IMPLICIT NONE
CHARACTER(20) arq1,arq2,arq3,num
INTEGER i,Nat,tam1,tam2,tam3,plot,Opt

OPEN(40,FILE="script.txt")

IF (plot==0) THEN
GO TO 200
ELSE
GO TO 100
END IF

100 CONTINUE
IF (plot==1.OR.plot==3) THEN
OPEN(10,FILE = 'input.dat')
DO i=1,39
READ(10,*)
END DO
WRITE(40,*) "set title 'Z x Psi(t)'"
WRITE(40,*) "set data style linespoints"
WRITE(40,*) "set grid"
WRITE(40,*) "set xlabel 'Psi(m)'"
WRITE(40,*) "set ylabel 'Z(m)'"
WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq1)))
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
7 FORMAT(" plot ",A<tam1>," using ($2):($1) title 'T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,7)TRIM(ADJUSTL(arq1)),num
END IF

IF (plot==1.OR.plot==3) THEN
DO i = 2,Nat
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
tam3 = MOD(10,i+1)
IF (tam3.GE.10.OR.(i+1).EQ.10) THEN
tam3 = 2
ELSE
tam3 = 1
END IF
8 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($",I<tam3>,"):($1) title 'T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,8)TRIM(ADJUSTL(arq1)),i+1,num
! WRITE(40,*) "pause 1"
END DO
CLOSE(10)
END IF

```

```

IF (plot==2.OR.plot==3) THEN
  WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"
  WRITE(40,*) "#####"
  WRITE(40,*) "reset"
  OPEN(10,FILE = 'input.dat')
  DO i=1,39
    READ(10,*)
  END DO
  WRITE(40,*) "set title 'Z x Theta(t)'"
  WRITE(40,*) "set data style linespoints"
  WRITE(40,*) "set grid"
  WRITE(40,*) "set xlabel 'Theta'"
  WRITE(40,*) "set ylabel 'Z(m)'"
  WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
  tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq2)))
  READ(10,*)num
  tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
  9 FORMAT(" plot ",A<tam1>," using ($2):($1) title 'T(h)=",A<tam2>,"")
  WRITE(40,9)TRIM(ADJUSTL(arq2)),num
END IF

IF (plot==2.OR.plot==3) THEN
  DO i = 2,Nat
    READ(10,*)num
    tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
    tam3 = MOD(10,i+1)
    IF (tam3.GE.10.OR.(i+1).EQ.10) THEN
      tam3 = 2
    ELSE
      tam3 = 1
    END IF
    11 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($",I<tam3>,"):($1) title 'T(h)=",A<tam2>,"")
    WRITE(40,11)TRIM(ADJUSTL(arq2)),i+1,num
    ! WRITE(40,*) "pause 1"
  END DO
  CLOSE(10)
END IF

WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"

200 CONTINUE

IF (Opt==1) THEN
  WRITE(40,*) "#####"
  WRITE(40,*) "reset"
  WRITE(40,*) "set title 'Q x t'"
  WRITE(40,*) "set data style linespoints"
  WRITE(40,*) "set grid"
  WRITE(40,*) "set xlabel 'T (h)'"
  WRITE(40,*) "set ylabel 'Q(m/s)'"
  WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
  tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq3)))
  16 FORMAT(" plot ",A<tam1>," using ($1):($2) title 'q(z=Zb)'"
  WRITE(40,16)TRIM(ADJUSTL(arq3))
  17 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($1):($3) title 'q(z=L)'"
  WRITE(40,17)TRIM(ADJUSTL(arq3))
  WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"

```

END IF

CLOSE(40)

END SUBROUTINE WRITE\_SCRIPT

APÊNDICE 6 – PROGRAMA SNERV (SOLUÇÃO NUMÉRICA  
DA EQUAÇÃO DE RICHARDS POR VOLUMES FINITOS)

```

PROGRAM SNERV
USE DFPORT
IMPLICIT NONE
CHARACTER(20):: arq1,arq2,arq3,texto
CHARACTER(300):: lin
REAL*8 :: z,L,Ks,qA,qB,alpha,psi0,thetaR,thetaS,dz
REAL*8 :: a,b,Ke,Kw,eps,Cp,t,qt,E,erro,num,den
REAL*8 :: Ap,Aw,Ae,Bp,dt,f,qBc,Zq,T1,T2
REAL*8,ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: td,psi,psib,theta,P,Q,psit,thetaI,BM
INTEGER :: i,j,n,Nt,Nmax,VER,Nitmax,tip0,Nv,Nat,it,k,plot,Opt,Nq
CHARACTER(300),ALLOCATABLE,DIMENSION(:) :: linha

! Abertura e leitura do arquivo de entrada contendo valores de parâmetros do
! problema e parâmetros de cálculo para o programa
VER = SYSTEM("Notepad input.dat")
OPEN(10,FILE='input.dat')
READ(10,*) Ks
READ(10,*) alpha
READ(10,*) thetaR
READ(10,*) thetaS
READ(10,*) qA
DO i = 1,6
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) tipo
READ(10,*) qB
READ(10,*) qBc
READ(10,*) a
READ(10,*) b
READ(10,*) psi0
READ(10,*) L
READ(10,*) Nv ! incluindo 2 fictícios
READ(10,*) Nt
READ(10,*) Zq
READ(10,*) Nitmax
READ(10,*) erro
READ(10,*) eps
READ(10,*) arq1
READ(10,*) arq2
READ(10,*) arq3
DO i = 1,5
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) plot
DO i = 1,3
  READ(10,*)
END DO
READ(10,*) Opt
READ(10,*) Nat
READ(10,*)
! entrar com os tempos de avaliação requeridos (horas)
ALLOCATE(td(Nat))
DO i = 1,Nat
  READ(10,*) td(i)
END DO
CLOSE(10)

T1 = TIMEF()
dz = L/(Nv-2)

```

```

dt = (td(Nat))*3600.d0/Nt
!dt = (td(Nat)-td(1))*3600.d0/Nt

Nq = IDINT(Zq/dz+1.5d0)

ALLOCATE(P(Nv+2),Q(Nv+2),psi(Nv+3),psib(Nv+3),psiit(Nv+2),linha(Nv),theta(Nv),thetai(Nv),BM(Nt))

! Condição inicial ANAL

psiit(1) = psi0
DO i = 2,Nv-1
  z = (i-1.5d00)*dz
  psiit(i) = (1.d0/alpha)*DLOG(qA/Ks-DEXP(-alpha*z)*(qA/Ks-DEXP(alpha*psi0)))
END DO
psiit(Nv) = (1.d0/alpha)*DLOG(qA/Ks-DEXP(-alpha*L)*(qA/Ks-DEXP(alpha*psi0)))

! CONDIÇÃO INICIAL NUM
it=0
E = 1000.d0
DO WHILE (it.LE.Nitmax.AND.E.GT.erro)

  it = it+1
  ! PARAMETROS NO VOLUME FICTÍCIO z=0 (P=1) // C.C. psi=psi0
  i=1
  Aw = 0.d0
  Ae = -1.d0
  Ap = 1.d0
  Bp = 2.d0*psi0
  P(1) = Ae/Ap
  Q(1) = Bp/Ap

  ! PARAMETROS NO INTERVALO z [Dz,L-Dz] (P=2,Nv-1)
  DO i = 2,Nv-1
    Ke = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i+1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i+1)))
    Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i-1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i-1)))
    Aw = Kw/dz
    Ae = Ke/dz
    Ap = Aw+Ae
    Bp = (Ke-Kw)
    P(i) = Ae/(Ap-Aw*P(i-1))
    Q(i) = (Bp+Aw*Q(i-1))/(Ap-Aw*P(i-1))
  END DO

  ! PARÂMETROS NO VOLUME FICTÍCIO z=L (P=N) // C.C. q=qB(t)
  i=Nv
  Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i-1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i-1)))
  Aw = 1.d0
  Ae = 0.d0
  Ap = 1.d0
  Bp = (qA/Kw-1.d0)*dz
  P(Nv) = Ae/(Ap-Aw*P(Nv-1))
  Q(Nv) = (Bp+Aw*Q(Nv-1))/(Ap-Aw*P(Nv-1))

  ! SOLUÇÃO POR TDMA
  E = 0
  DO i = Nv,1,-1
    psi(i) = P(i)*psi(i+1)+Q(i) ! O psi(N+1) NÃO IMPORTA PQ P(N)=0
    E = E + DABS(psiit(i)-psi(i))
  END DO

```

```

END DO

! atribuição
psiit=psi

END DO

psib = psi
psib(Nv) = (psi(Nv)+psi(Nv-1))*0.5d0
theta = thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi)
theta(1) = thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi0)
theta(Nv) =thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi(Nv))
thetaI = theta

OPEN (20, FILE=arq1)
OPEN (30, FILE=arq2)

WRITE(20,1)
1 FORMAT ("#  Z(m) ",<7*Nat-1>X,"PSI(m)")
WRITE(30,2)
2 FORMAT ("#  Z(m) ",<7*Nat-1>X,"THETA ")

lin = "      "
DO i=1,Nat
  lin = TRIM(ADJUSTL(lin))/'-----'
END DO
lin = TRIM(ADJUSTL(lin))/'---'
ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(lin)))
3 FORMAT ("#",10x,A<ver>)
WRITE(20,3) TRIM(ADJUSTL(lin))
WRITE(30,3) TRIM(ADJUSTL(lin))

4 FORMAT ("#",4x,"T (h)=",<Nat>F14.3)
WRITE(20,4) (td(j), j=1,Nat)
WRITE(30,4) (td(j), j=1,Nat)

lin = "#-----"
DO i=1,Nat
  lin = TRIM(ADJUSTL(lin))/'-----'
END DO
lin = TRIM(ADJUSTL(lin))/'---'
ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(lin)))
5 FORMAT (A<ver>)
WRITE(20,5) TRIM(ADJUSTL(lin))
WRITE(30,5) TRIM(ADJUSTL(lin))

6 FORMAT (F11.6,F14.8)
z = 0.d0
WRITE(20,6) z,psi0
WRITE(30,6) z,theta(1)
DO i = 2,Nv-1
  z = (i-1.5d00)*dz
  WRITE(20,6) z,psib(i)
  WRITE(30,6) z,theta(i)
END DO
WRITE(20,6) L,psib(Nv)
WRITE(30,6) L,theta(Nv)

CLOSE (20)

```

CLOSE (30)

```

! Calculo do fluxo em Zq
OPEN (50, FILE=arq3)
OPEN (50, FILE=arq3)
WRITE(50,22) Zq
22 FORMAT("# Fluxo Qt avaliado em z =",F11.6," m",2/)
23 FORMAT("#-----")
WRITE(50,23)
WRITE(50,24)
24 FORMAT("#   t",13X,"q(Zq)",17X,"q(L)")
29 FORMAT("#   (h)",12X,"(m/s)",17X,"(m/s)")
WRITE(50,29)
WRITE(50,23)
25 FORMAT(F11.6,1X,F20.16,1X,F20.16)
WRITE(50,25) 0.d0,qA

IF (td(1)==0.d0) THEN
  k=2
ELSE
  k=1
END IF

DEN = 0.d0
psiit = psib

DO j = 1,Nt
  t=j*dt
  !t=td(1)+j*dt/3600.d0
  it=0
  E = 1000.d0
  DO WHILE (it.LE.Nitmax.AND.E.GT.erro)

    it = it+1
    ! PARAMETROS NO VOLUME FICTÍCIO z=0 (P=1) // C.C. psi=psi0
    i=1
    Aw = 0.d0
    Ae = -1.d0 !-eps
    Ap = 1.d0 !eps
    Bp = 2.d0*psi0 !-(1-eps)*(psiit(i)+psiit(i+1))
    P(1) = Ae/Ap
    Q(1) = Bp/Ap

    ! PARAMETROS NO INTERVALO z [Dz,L-Dz] (P=2,Nv-1)
    DO i = 2,Nv-1
      Ke = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i+1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i+1)))
      Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i-1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i-1)))
      !Cp = alpha*(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psiit(i))
      Cp = alpha*(thetaS-thetaR)*(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psib(i)))*0.5d0
      Aw = Kw*dt/dz
      Ae = Ke*dt/dz
      Ap = Aw+Ae+2.d0*Cp*dz
      Bp = 2.d0*Cp*psib(i)*dz+(Ke-Kw)*dt
      Ke = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psib(i)+psib(i+1))))/(DEXP(alpha*psib(i))+DEXP(alpha*psib(i+1)))
      Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psib(i)+psib(i-1))))/(DEXP(alpha*psib(i))+DEXP(alpha*psib(i-1)))
      Bp = Bp+((Ke+Ke*(psib(i+1)-psib(i))/dz)-(Kw+Kw*(psib(i)-psib(i-1))/dz))*dt
      P(i) = Ae/(Ap-Aw*P(i-1))
      Q(i) = (Bp+Aw*Q(i-1))/(Ap-Aw*P(i-1))
    
```

```

END DO

! PARÂMETROS NO VOLUME FICTÍCIO z=L (P=N) // C.C. q=qB(t)

i=Nv
Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psiit(i)+psiit(i-1))))/(DEXP(alpha*psiit(i))+DEXP(alpha*psiit(i-1)))
Aw = 1.d0 !eps
Ae = 0.d0
Ap = 1.d0 !eps
IF (tipo==1) THEN
  f = qB
END IF
IF (tipo==2) THEN
  f = (qB/a/dt)*(-DEXP(-a*(t+0.5d0*dt))+DEXP(-a*(t-0.5d0*dt)))
END IF
IF (tipo==3) THEN
  f = qBc+((-DEXP(-a*(t+0.5d0*dt))+DEXP(-a*(t-0.5d0*dt)))/a)*(qB-qBc)/dt
END IF
IF (tipo==4) THEN
  f = (qB/dt)*((-DEXP(-a*(t+0.5d0*dt))+DEXP(-a*(t-0.5d0*dt)))/a+&
  (DEXP(-b*(t+0.5d0*dt))-DEXP(-b*(t-0.5d0*dt)))/b)
END IF
IF (tipo==5) THEN
  f = qBc+((-DEXP(-a*(t+0.5d0*dt))+DEXP(-a*(t-0.5d0*dt)))/a+&
  (DEXP(-b*(t+0.5d0*dt))-DEXP(-b*(t-0.5d0*dt)))/b)*(qB-qBc)/dt
END IF
Bp = (f/Kw-1.d0)*dz !+ (1-eps)*(psiit(i-1)-psiit(i))
P(Nv) = 0.0d0
Q(Nv) = (Bp+Aw*Q(Nv-1))/(Ap-Aw*P(Nv-1))

! SOLUÇÃO POR TDMA
E = 0
DO i = Nv,1,-1
  psi(i) = P(i)*psi(i+1)+Q(i) ! O psi(N+1) NÃO IMPORTA PQ P(N)=0
  E = E + DABS(psiit(i)-psi(i))
END DO

! atribuição
psiit=psi

END DO

! psib=psi

!para calculo BM
num= 0.d0
DO i = 2,Nv-1
  NUM = NUM+(thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi(i))-thetaI(i))
END DO
Kw = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psi(Nv)+psi(Nv-1))))/(DEXP(alpha*psi(Nv))+DEXP(alpha*psi(Nv-1)))
Ke = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psi(1)+psi(2))))/(DEXP(alpha*psi(1))+DEXP(alpha*psi(2)))
DEN = DEN+Kw*((psi(Nv)-psi(Nv-1))/dz+1.d0)-Ke*((psi(2)-psi(1))/dz+1.d0)

BM(j) = NUM*dz/DEN/dt
write(8,*)j,BM(j)

Ke = 2.d0*Ks*(DEXP(alpha*(psi(Nq+1)+psi(Nq))))/(DEXP(alpha*psi(Nq+1))+DEXP(alpha*psi(Nq)))
qt = Ke*((psi(Nq+1)-psi(Nq))/dz+1.d0)
WRITE(50,25)t/3600.d0,qt,f

```

```

psib=psi

IF ((t/3600.d0),GE.td(k)) THEN
  OPEN (20, FILE=arq1)
  OPEN (30, FILE=arq2)
  DO i=1,4
    READ(20,*)
  END DO
  7 FORMAT(A300)
  DO i=1,Nv
    READ(20,7) linha(i)
  END DO
  REWIND(20)
  DO i=1,4
    READ(20,*)
  END DO

  ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(linha(1))))
  8 FORMAT (3X,A<ver>,F14.8)
  WRITE(20,8)TRIM(ADJUSTL(linha(1))),psi0
  DO i=2,Nv-1
    ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(linha(i))))
    9 FORMAT (3X,A<ver>,F14.8)
    WRITE(20,9)TRIM(ADJUSTL(linha(i))),psi(i)
  END DO
  ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(linha(Nv))))
  11 FORMAT (3X,A<ver>,F14.8)
  !psi(Nv) = psi(Nv-1)+0.5d0*(psi(Nv-1)-psi(Nv-2))
  psi(Nv) = (psi(Nv)+psi(Nv-1))*0.5d0
  WRITE(20,11)TRIM(ADJUSTL(linha(nv))),psi(Nv)

  DO i=1,4
    READ(30,*)
  END DO
  DO i=1,Nv
    READ(30,7) linha(i)
  END DO
  REWIND(30)
  DO i=1,4
    READ(30,*)
  END DO

  ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(linha(1))))
  12 FORMAT (3X,A<ver>,F14.8)
  WRITE(30,12)TRIM(ADJUSTL(linha(1))),theta(1)
  DO i=2,Nv-1
    ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(linha(i))))
    theta(i) = thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi(i))
    13 FORMAT (3X,A<ver>,F14.8)
    WRITE(30,13)TRIM(ADJUSTL(linha(i))),theta(i)
  END DO
  ver = LEN(TRIM(ADJUSTL(linha(Nv))))
  14 FORMAT (3X,A<ver>,F14.8)
  theta(Nv) = thetaR+(thetaS-thetaR)*DEXP(alpha*psi(Nv))
  WRITE(30,14)TRIM(ADJUSTL(linha(Nv))),theta(Nv)

  k=k+1

```

```

        CLOSE (20)
        CLOSE (30)
    END IF

END DO

T2 =TIMEF()

texto = "Notepad "//arq1
VER = SYSTEM(texto)

texto = "Notepad "//arq2
VER = SYSTEM(texto)

CALL WRITE_SCRIPT(arq1,arq2,arq3,Nat,plot,Opt)
VER = SYSTEM ("Wgnuplot script.txt")

WRITE(*,31) T2-T1
31 FORMAT("O tempo de processamento foi de ",F9.3," segundos",1/)

END PROGRAM

!#####!

SUBROUTINE WRITE_SCRIPT(arq1,arq2,arq3,Nat,plot,Opt)
USE DFPORT
IMPLICIT NONE
CHARACTER(20) arq1,arq2,arq3,num
INTEGER i,Nat,tam1,tam2,tam3,plot,Opt

OPEN(40,FILE="script.txt")

IF (plot==0) THEN
GO TO 200
ELSE
GO TO 100
END IF

100 CONTINUE
IF (plot==1.OR.plot==3) THEN
OPEN(10,FILE = 'input.dat')
DO i=1,39
READ(10,*)
END DO
WRITE(40,*) "set title 'Z x Psi(t)'"
WRITE(40,*) "set data style linespoints"
WRITE(40,*) "set grid"
WRITE(40,*) "set xlabel 'Psi(m)'"
WRITE(40,*) "set ylabel 'Z(m)'"
WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq1)))
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
7 FORMAT(" plot '"',A<tam1>,'" using ($2):($1) title 'T(h)=' ,A<tam2>,'"")
WRITE(40,7)TRIM(ADJUSTL(arq1)),num
END IF

IF (plot==1.OR.plot==3) THEN
DO i = 2,Nat

```

```

READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
tam3 = MOD(10,i+1)
IF (tam3.GE.10.OR.(i+1).EQ.10) THEN
tam3 = 2
ELSE
tam3 = 1
END IF
8 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($,I<tam3>,:)($1) title "T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,8)TRIM(ADJUSTL(arq1)),i+1,num
END DO
CLOSE(10)
END IF

IF (plot==2.OR.plot==3) THEN
WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"
WRITE(40,*) "#####"
WRITE(40,*) "reset"
OPEN(10,FILE = 'input.dat')
DO i=1,39
READ(10,*)
END DO
WRITE(40,*) "set title 'Z x Theta(t)'"
WRITE(40,*) "set data style linespoints"
WRITE(40,*) "set grid"
WRITE(40,*) "set xlabel 'Theta'"
WRITE(40,*) "set ylabel 'Z(m)'"
WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq2)))
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
9 FORMAT(" plot ",A<tam1>," using ($2):($1) title "T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,9)TRIM(ADJUSTL(arq2)),num
END IF

IF (plot==2.OR.plot==3) THEN
DO i = 2,Nat
READ(10,*)num
tam2 = LEN(TRIM(ADJUSTL(num)))
tam3 = MOD(10,i+1)
IF (tam3.GE.10.OR.(i+1).EQ.10) THEN
tam3 = 2
ELSE
tam3 = 1
END IF
11 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($,I<tam3>,:)($1) title "T(h)=",A<tam2>,"")
WRITE(40,11)TRIM(ADJUSTL(arq2)),i+1,num
END DO
CLOSE(10)
END IF

WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"

200 CONTINUE

IF (Opt==1) THEN
WRITE(40,*) "#####"
WRITE(40,*) "reset"

```

```
WRITE(40,*) "set title 'Q x t'"
WRITE(40,*) "set data style linespoints"
WRITE(40,*) "set grid"
WRITE(40,*) "set xlabel 'T (h)'"
WRITE(40,*) "set ylabel 'Q(m/s)'"
WRITE(40,*) "set key right outside title 'Legenda' box 1"
tam1 = LEN(TRIM(ADJUSTL(arq3)))
16 FORMAT(" plot ",A<tam1>," using ($1):($2) title 'q(z=Zb)'"
WRITE(40,16)TRIM(ADJUSTL(arq3))
17 FORMAT(" replot ",A<tam1>," using ($1):($3) title 'q(z=L)'"
WRITE(40,17)TRIM(ADJUSTL(arq3))
WRITE(40,*) "pause -1 'CONTINUA?'"
END IF

CLOSE(40)

END SUBROUTINE WRITE_SCRIPT
```