Universidade Federal do Paraná - Setor Palotina
Departamento de Engenharias e Exatas
DEE137-Física Matemática I
Prof. Carlos H. Coimbra-Araújo

Lista de Exercícios 1 – Data final de entrega: 10/05/2017

1. Em termos das definições em teoria dos conjuntos, explique o que significa cada uma das seguintes asserções matemáticas: (a) $s_1 \in S$; (b) $\{z \in \mathbb{C} | z^4 = 1\}$; (c) $\{n, k \in \mathbb{N} | k = 0, 1, 2, ...; n = 2k + 1; 0 < n < 11\}$; (d) $(A \cup B) \cap C$; (e) $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

2. Encontre o conjunto C, resultado das seguintes operações com conjuntos:

(a) $C = A \times B$, com $A = \{3, 7, 8, 9\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(b) $C = A \times B$, com $A = \{3i, 7 - i, 2, i\}$ e $B = \{1 - i, 2 + 2i, 4, 2i\}$

(c) $C = A \cup B$, com $A = \{x \in \mathbb{R} || x| \geq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x < 1\}$

(d) $C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, com $A_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 8\}$, $A_3 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$

3. Sejam $|a\rangle$ e $|b\rangle$ vetores definidos em $\mathbb{C}$, escritos como $|a\rangle = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $|b\rangle = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$. Encontre explicitamente o que se pede: (a) $\alpha(\beta|a\rangle)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; (b) $\alpha(\beta|b\rangle)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; (c) $\alpha(|a\rangle + |b\rangle)$, com $\alpha \in \mathbb{C}$; (d) $\langle(\alpha + \beta)a|b\rangle$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

4. Encontre o que se pede:

(a) Seja o vetor $|a\rangle = (2 + i, 1, -1, i, -i)$ que pertence a $\mathbb{C}^5$. Escreva esse vetor como uma combinação linear da base padrão de $\mathbb{C}^5$.

(b) Seja a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Escreva-a como uma combinação linear da base padrão de $M^{3\times3}$.

(c) Sejam $\vec{A}, \vec{B}$ e $\vec{C}$ vetores definidos no plano cartesiano real. Represente graficamente o vetor $\vec{D}$ definido pela soma vetorial $\vec{D} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$.

(d) Dado que os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ do espaço cartesiano real são conhecidos, encontre $\vec{C}$ e $\vec{D}$, tal que $\vec{A} = \vec{C} + \vec{D}$ e $\vec{B} = \vec{C} - \vec{D}$.

5. Uma certa força $\vec{F}$ está no espaço cartesiano fazendo ângulos iguais entre as coordenadas x e y e um ângulo de 60^o com a coordenada z. Encontre as componentes vetoriais dessa força.

6. Uma força é aplicada sobre um corpo e no referencial XY ela é escrita como $\vec{F} = (-5,0 \text{ N})\hat{i} + (2,0; \text{N})\hat{j}$. Um observador $\mathcal{O}'$ se encontra no referencial $X'Y'$, que está rotacionado em relação a XY de 33^o. Encontre $\vec{F}$ definida no referencial do observador $\mathcal{O}'$.

7. Encontre os seguintes produtos internos:
(a) $\langle a|b\rangle$, com $|a\rangle = (-i, 1-i, 0, 8)$ e $|b\rangle = (0, 1, 2, 7+i)$
(b) $\langle c|d\rangle$, com $|c\rangle = (-1, 1+i, 1, 1, 2)$ e $|d\rangle = (2, 2, 1-i, i, -i)$
(c) $\langle f|g\rangle$ e $\langle g|f\rangle$ se $f(x) = e^{2ix}$ e $g(x) = e^{ix}$, definidas em $\mathbb{C}(0, \pi)$. Considere que a função peso $w(x) = \frac{1}{2\pi}$.

8. Uma força $\vec{F} = x\hat{i} + y^3\hat{j} + x^2\hat{k}$ atua sobre um ponto material. Calcule:
(a) O trabalho realizado por essa força se ela atua sobre o ponto material ao longo de uma trajetória que começa na origem e termina no ponto (2,1,-1).
(b) O vetor torque $\vec{\tau}$ em relação à origem se $\vec{F}$ atua no ponto (-1,2,2).

9. Use o processo de Gram-Schmidt para ortonormalizar os seguintes conjuntos de vetores:

(a) $H_1 = \{(e^{i\theta}, e^{-i\theta}), (e^{i\theta}, 0)\}$

(b) $H_2 = \{|b_i\rangle\}_{i=1}^{3}$, com $|b_1\rangle = (3, 0, 0)$, $|b_2\rangle = (1, 1, 0)$ e $|b_3\rangle = (0, 2, 1)$

(c) $H_3 = \{|c_i\rangle\}_{i=1}^{4}$, com $|c_1\rangle = (1, 0, 0, i)$, $|c_2\rangle = (-i, 1, 0, 2)$, $|c_3\rangle = (i, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0)$ e $|c_4\rangle = (0, 0, 0, 2)$

10. Use o produto escalar ou o produto vetorial em vetores do espaço cartesiano para mostrar a veracidade das seguintes propriedades:

(a) $(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = |\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2$

(b) $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B}$

(c) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$

11. Dados $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = -6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ e $\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, mostre que dois deles são perpendiculares entre si e dois deles são paralelos (ou antiparalelos) entre si.