Universidade Federal do Paraná - Setor Palotina
Departamento de Engenharias e Exatas
DEE137 - Física Matemática I
Prof. Carlos H. Coimbra-Araújo

Lista de Exercícios 2 - Entrega: 30/11/2017

1. Mostre que as seguintes transformações são lineares

(a) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 - x_3 - 3x_4)$

(c) $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

2. Quanto à comutação de operadores, faça o que se pede:

(a) Calcule $[S, T] + [U, S] - [T, S] + 2\,[S, U]$

(b) Verifique que a identidade de Jacobi é válida: $[[S, T]\,, U] + [[U, S]\,, T] + [[T, U]\,, S] = 0$

3. Verifique que o operador $U : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dado por

$$U \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} - i\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

é unitário.

4. (a) Encontre a matriz associada ao operador linear T dado por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ x + y \\ 2y - z \end{pmatrix},$$

na base $B = \{|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(b) Encontre então a sua conjugada, (c) a sua transposta e (d) a sua adjunta. (e) Ela é hermitiana?

5. Uma força $\vec{F} = y\hat{i} + x^2\hat{j} + z\hat{k}$ atua sobre um certo ponto material. Calcule o vetor torque $\vec{\tau}$ em relação à origem se $\vec{F}$ atua no ponto $(-1, -1, -1)$. Use $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

6. Calcule os seguintes gradientes:

(a) ∇f, com $f(x, y, z) = x^2 + 3y - z^3$

(b) ∇g, com $g(x, y, z) = 2x$

(c) ∇h, com $h(x, y, z) = 6y + \frac{2}{3}z^2$

7. Calcule os seguintes divergentes:

(a) $\nabla \cdot \vec{V}$, com $\vec{V}(x,y,z) = (x^2 + y)\hat{\imath} + (z)\hat{\jmath} + (2x + y^3 - z)\hat{k}$

(b) $\nabla \cdot \vec{W}$, com $\vec{W}(x,y,z) = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + (y)\hat{k}$

(c) $\nabla \cdot \vec{T}$, com $\vec{T}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

8. Mostre que, se $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ (e portanto, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), um campo de força $\vec{F} = -\nabla V(r)$ pode ser reescrito como $\vec{F} = -\left(\frac{dV}{dr}\right)\hat{r}$.

9. Calcule os seguintes rotacionais:

(a) $\nabla \times \vec{W}$, com $\vec{W}(x,y,z) = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + (y)\hat{k}$

(b) $\nabla \times \vec{T}$, com $\vec{T}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

10. Considere o vetor $\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\imath} + V_z\hat{k}$ e a função escalar $\varphi = \varphi(x,y,z)$. Verifique as seguintes identidades:

(a) $\nabla \cdot (f\vec{V}) = (\nabla f) \cdot \vec{V} + f\nabla \cdot \vec{V}$
(b) $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$