Lista 5

Volume 2, Capítulo 15, Seção 8

Exercícios 26 a 29: Use coordenadas esféricas.

26. Avalie $\iiint_E y^2 dV$, onde E é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9, y \geqslant 0$.

27. Avalie $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2} dV$, onde E é a parte da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ que se encontra no primeiro octante.

28. Avalie $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, onde E se encontra acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

29. Determine o volume da parte da bola $\rho \leqslant a$ que se encontra entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

Exercícios 43 a 45: Avalie a integral mudando para coordenadas esféricas.

43.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \; dz \; dy \; dx$$

44.

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3) \; dz \; dx \; dy$$

45.

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \; dz \; dy \; dx$$

Exercício 46: Um modelo para a densidade δ da atmosfera terrestre perto da superfície é

$$\delta = 619,09 - 0,000097\rho$$

onde ρ (a distância ao centro da Terra) é medida em metros e δ é medida em quilogramas por metro cúbico. Se considerarmos que a superfície da Terra é uma esfera de raio 6.370 km, então esse modelo é razoável para $6,370 \times 10^6 \leqslant \rho \leqslant 6,375 \times 10^6$. Use esse modelo para estimar a massa da atmosfera entre o chão e uma altitude de 5 km.

Volume 2, Capítulo 15, Seção 9

Exercício 1: Associe as transformações dadas (rotuladas de “(a)”até “(f)”) com as imagens (rotuladas de I a VI) do conjunto $S = \{(u, v)|0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1\}$ sob a transformação. Justifique suas escolhas.

(a)
$$x = u + v$$
$$y = u - v$$

(b)
$$x = u - v$$
$$y = uv$$

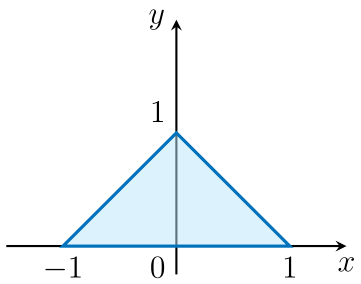
(c)
$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$

(d)
$$x = u - v$$
$$y = u + v^2$$

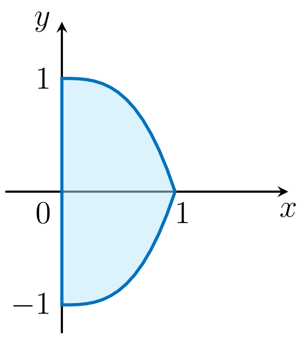
(e)
$$x = u + v$$
$$y = 2v$$

(f)
$$x = uv$$
$$y = u^3 - v^3$$

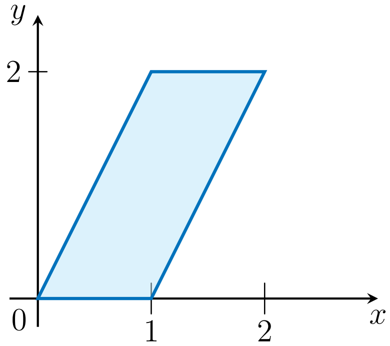
I



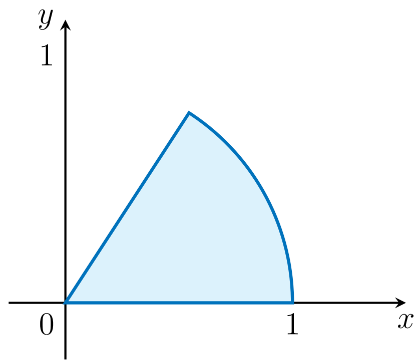
II



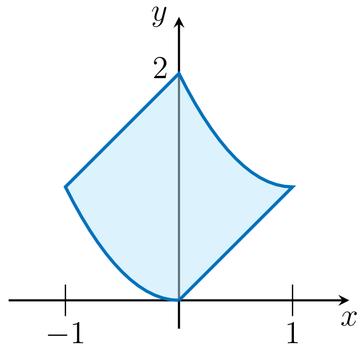
III



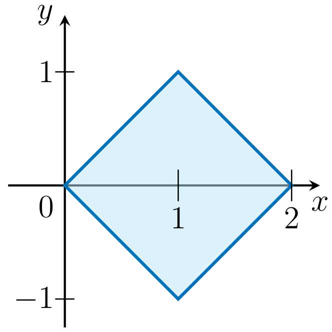
IV



V



VI



Exercícios 2 a 6: Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

2.

$$S = \{(u, v)|0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 2\}$$

$$x = u + v$$

$$y = -v$$

3.

$$S = \{(u, v)|0 \leqslant u \leqslant 3, 0 \leqslant v \leqslant 2\}$$

$$x = 2u + 3v$$

$$y = u - v$$

4.

$$S = \{(u, v)|0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$$

$$x = v$$

$$y = u(1 + v^2)$$

5.

S é a região triangular com vértices (0,0), (1,1) e (0,1)

.

$$x = u^2$$

$$y = v$$

6.

S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$

$$x = au$$

$$y = bv$$

Exercícios 17 a 22: Use a transformação dada para avaliar a integral.

17. $\iint_R (x - 3y)\ dA$, onde R é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$;

$$x = 2u + v;$$

$$y = u + 2v.$$

18. $\iint_R (4x + 8y)\ dA$, onde R é o paralelogramo com vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ e $(1, 5)$;

$$x = \frac{u + v}{4};$$

$$y = \frac{v - 3u}{4}.$$

19. $\iint_R x^2\ dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$;

$$x = 2u;$$

$$y = 3v.$$

20. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, onde R é a região limitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$;

$$x = u\sqrt{2} - v\sqrt{2/3};$$

$$y = u\sqrt{2} + v\sqrt{2/3}.$$

21. $\iint_R xy\, dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas linhas $y = x$, $y = 3x$ e as hipérboles $xy = 1$ e $xy = 3$;

$$x = u/v;$$

$$y = v.$$

22. $\iint_R y^2\, dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$ e $xy^2 = 2$;

$$u = xy;$$

$$v = xy^2.$$

Use uma calculadora gráfica ou computador para ilustrar a região R.

Exercícios 25 a 30: Avalie a integral fazendo uma mudança apropriada de variáveis.

25. $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\, dA$, onde R é o paralelogramo limitado pelas linhas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$ e $3x - y = 8$.

26. $\iint_R (x + y)e^{x^2-y^2}\, dA$, onde R é o retângulo limitado pelas linhas $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$ e $x + y = 3$.

27. $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\, dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$.

28. $\iint_R \sin(9x^2 + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$.

29. $\iint_R e^{x+y}\, dA$, onde R é dada pela desigualdade $|x| + |y| \leqslant 1$.

30. $\iint_R \frac{y}{x}\, dA$, onde R é a região limitada pelas linhas $x + y = 1$, $x + y = 3$, $y = 2x$ e $y = x/2$.

Exercício 31: Seja f contínua em $[0, 1]$ e R a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x + y)\, dA = \int_0^1 u f(u)\, du.$$