UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Carlos Eurico Galvão Rosa
Carlos Gustavo da Mota Figueiredo
Marcelo Luís da Cruz Lisboa

Produto de números negativos: Estratégias para tratar um obstáculo epistemológico

Curitiba
2013

PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

Produto de números negativos: Estratégias para tratar um obstáculo epistemológico

por

Carlos Eurico Galvão Rosa
Carlos Gustavo da Mota Figueiredo
Marcelo Luís da Cruz Lisboa

Preprint PROFMAT 2 (2013) 11 de abril, 2013

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
COORDENAÇÃO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

No dia 11 de abril de 2013, no Anfiteatro B do Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Alexandre Luis Trovon de Carvalho, a Banca Examinadora para o Trabalho de Conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UFPR. Estiveram presentes ao Ato, professores alunos e visitantes. A banca examinadora foi constituída pelos professores: Marco Aurélio Kalinke, do Departamento Acadêmico de Matemática da UTFPR; Luiz Antonio Ribeiro de Santana, do Departamento de Matemática da UFPR; e Alexandre Luis Trovon de Carvalho, orientador do artigo a quem coube a presidência dos trabalhos. Às 19 horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando os alunos Carlos Eurico Galvão Rosa, Carlos Gustavo da Mota Figueiredo, e Marcelo Luís da Cruz Lisboa a fazerem a apresentação do trabalho intitulado "Produto de Números Negativos: Estratégias para Tratar um Obstáculo Epistemológico". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca reuniu-se para a apreciação do desempenho dos estudantes. Tendo em vista o trabalho realizado e a arguição, os membros presentes da banca decidiram por suas aprovações, com nota 90, e conceito A.

Curitiba, 11 de abril de 2013.

Alexandre Luis T. Carvalho
Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho
Presidente

Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke
Titular

Luiz Antonio R. de Santana
Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana
Titular

Resumo

A construção do conceito de número negativo deparou-se com vários obstáculos. Sabe-se que a regra dos sinais para a multiplicação foi inicialmente apresentada à comunidade científica por Diofanto de Alexandria no século III d.C. Não obstante, somente no século XIX é que Hankel apresentou sua demonstração e formalização matemática. Contudo, esse conhecimento - matemático demanda uma transposição didática para a compreensão pelo discente dessa multiplicação entre números negativos, o que muitas vezes não ocorre, ou por falta do saber científico pelo professor ou pela dificuldade de elaboração de um plano de aula que realmente supere os obstáculos que se colocam. O que se pretende, nesse artigo, é apresentar um estudo histórico-epistemológico da multiplicação entre números negativos, os obstáculos para a consolidação da noção de número negativo, a exploração de estratégias para a facilitação do ensino da multiplicação entre números negativos e ainda, duas propostas de atividades elaboradas com estratégias apresentadas para uso em sala, com o intuito de facilitar a compreensão, pelos alunos, da multiplicação entre números negativos.
Palavras-chave: Números negativos; Estratégias de Ensino; Regra de Sinais

Resumen

La construcción del concepto de números negativos se enfrentó a muchos obstáculos. Se sabe que la regla de los signos para la multiplicación fue presentado inicialmente a la comunidad científica por Diofanto de Alejandría en el siglo III de nuestra era. Sin embargo, hasta el siglo XIX que Hankel presentó su manifestación y formalización matemática. Pero, este saber matemático exige una transposición didáctica para la comprensión por parte del alumno de esta multiplicación de los números negativos, que a menudo no se producen, o por falta de saber científico del profesor o por la dificultad de preparar un plan de clase que en realidad supera obstáculos que se presenten. La intención de este artículo es presentar un estudio histórico-epistemológico de la multiplicación de los números negativos, los obstáculos para la consolidación de la noción de número negativo, la exploración de estrategias para facilitar la enseñanza de la multiplicación de los números negativos y también dos actividades propuestas preparadas con estrategias que se presentan para su uso en la clase, con el fin de facilitar la comprensión de los estudiantes de la multiplicación de los números negativos.
Palabras clave: Números negativos; Estrategias de enseñanza; Regla de los Signos

Conteúdo

1 Números negativos: obstáculos epistemológicos **6**

1.1 Números negativos: a história 8

1.2 O obstáculo didático: $(-1) \times (-1) = +1$ 11

2 Estratégias para ensinar $(-1) \times (-1) = +1$ **12**

2.1 Reta numerada 13

2.2 Viagem em uma rodovia 14

2.3 Elevadores 14

2.4 Office boy 15

2.5 Filmagens 16

2.5.1 Tanque de água 16

2.5.2 Caminhando 16

2.6 Bloquinho animado (*"flip book"*) 16

2.7 Reconhecimento de padrões 17

2.8 Gráficos 17

2.8.1 Usando *Geogebra* na estratégia dos gráficos 18

2.9 Circuitos elétricos 20

2.10 Partículas carregadas 21

2.11 Propriedade distributiva 22

2.12 Processo dedutivo 22

2.13 Definições 23

3 O ensino da multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$ **23**

3.1 Utilizando duas estratégias em sala de aula 25

4 Considerações Finais **27**

Debruçando-se sobre a história dos números negativos, observa-se que o processo de consolidação do conceito de número negativo foi lento e muito marcante. No século III d.C, Diofanto de Alexandria em sua "Aritmética" descreve a regra dos sinais para a multiplicação dos números inteiros. Somente no século XIX, é que Hankel demonstra, de forma consistente, a regra dos sinais. Matemáticos anteriores a Hankel tentaram provar a existência da multiplicação entre números negativos com exemplos práticos e fracassaram. De acordo com Glaeser [5] o modelo metafórico, usado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas, constitui-se como um obstáculo à compreensão da multiplicação desses números.

Atualmente, no campo matemático, o teorema de Hankel não causa nenhuma dificuldade para o seu entendimento. Não obstante, nos processos didático-pedagógicos muitos obstáculos necessitam ser ultrapassados. Sabe-se que, através do modelo metafórico, o aluno consegue compreender que se ele possui dez reais $(+10)$ e deve sete reais (-7), ao pagar o que deve, restarão três reais $(+3)$. Todavia, será difícil convencê-lo que $(-1) \times (-1) = +1$. De que forma uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? Diante desse obstáculo didático e motivador para a pesquisa e para o estudo de estratégias de ensino que venham melhorar as práticas pedagógicas do professor, propõem-se nesse artigo, primeiramente, um estudo histórico-epistemológico dos números negativos. Num segundo momento, são apresentadas estratégias de ensino para a transposição didática da multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$. A seguir, são disponibilizadas como sugestões para o docente, duas atividades didático-pedagógicas elaboradas para a sala de aula com o uso e aplicação de estratégias de ensino elencadas na segunda parte desse artigo, com o objetivo de melhorar a compreensão da multiplicação entre números negativos pelos alunos.

1 Números negativos: obstáculos epistemológicos

A definição de obstáculo epistemológico foi apresentada inicialmente pelo filósofo francês Gaston Bachelard, na obra "A formação do Espírito Científico", publicada em 1938. Nessa obra, seu objetivo era interpretar as condições de evolução da ciência, descrevendo bases para realizar o que chamou de psicanálise do conhecimento objetivo. Para isso, delineou com detalhes a noção de obstáculo que é atualmente mencionada em estudos de didática.

Bachelard [2] indicou que a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de conhecimento passa, na maioria das vezes, pela aceitação de conhecimentos anteriores e se depara com certo número de obstáculos. Dessa forma, esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, e sim, de conhecimentos antigos, estáticos, que resistem à aceitação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento.

Segundo Bachelard, a análise dos obstáculos no contexto da Matemática deveria ser tomada de maneira diferenciada, já que a evolução dessa ciência apresentaria uma interessante regularidade em seu desenvolvimento, conhecendo períodos de paradas, sem etapas de erros ou rupturas que destruíssem o saber estabelecido anteriormente. Desse modo, torna-se necessária a análise dessa regularidade e sua relação com a aprendizagem. Entretanto, ao se analisar a trajetória da história dos números negativos com relação à multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$, nota-se que a regularidade destacada por Bachelard não se verifica nesse contexto histórico-epistemológico. Na realidade o que se observa é que a ideia de obstáculo epistemológico passa por uma evolução, como é apontada por Almouloud [1] de modo que observa-se sua presença na Matemática. Isso é o que ocorre, por exemplo com o produto de números negativos, a noção de limites, os números complexos, dentre outros.

Para se chegar ao saber científico apresentado por Hankel com relação à multiplicação entre números negativos e aceito pela comunidade científica, a partir do século XIX, surgiram pelo caminho obstáculos epistemológicos que precederam tal formalização da multiplicação entre números negativos.

Diante do problema, torna-se interessante a investigação dessas barreiras epistemológicas para o enriquecimento do desenvolvimento didático-pedagógico no estudo dos números inteiros. Ao se investigar o estabelecimento do conceito de número negativo como entidade matemática, e as operações multiplicativas entre esses números, observam-se profundas discussões de diferentes níveis durante um longo período. O desenvolvimento histórico dos números negativos é marcado por obstáculos epistemológicos que merecem ser estudados e analisados, pois o processo histórico apresenta, claramente, as várias formas, atitudes e conflitos em que o conhecimento matemático foi construído.

Sabe-se que as dificuldades encontradas no contexto escolar para a aprendizagem da multiplicação de números negativos são consideráveis, principalmente no que tange à multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$, considerada como obstáculo didático que precisa ser transposto com a implementação de estratégias de ensino diferenciadas.

Existem obras didáticas do Programa Nacional do Livro Didáticos (PNLD) que contemplam estratégias para o melhor entendimento da multiplicação entre números negativos, o chamado saber escolar. Apesar disso grande parte dos docentes insistem em trabalhar o saber ensinado, aquele que é registrado no plano de aula do professor. As vezes essa maneira de ensino é pouco flexível, valendo-se apenas do uso pedagógico da regra dos sinais.

Sendo assim, inicialmente far-se-á um estudo histórico-epistemológico dos números negativos e da multiplicação entre esses números, abordando o seu surgimento, desenvolvimento e sua formalização conceitual e operacional. O que se pretende é apresentar as dificuldades encontradas ao longo da história para se aceitar os números negativos como entidade matemática. Com isso, ao discutir no campo pedagógico a barreira didática apresentada pela multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$, e criar mais um ambiente para que o leitor possa se familiarizar com as estratégias de ensino propostas nesse trabalho, tem-se uma motivação para a melhoria da prática pedagógica no ensino da multiplicação entre números negativos.

1.1 Números negativos: a história

Na antiguidade, mais especificamente na Grécia, região onde se iniciou a Matemática demonstrativa, representada pela escola pitagórica, surgiu Diofanto de Alexandria (250 d.C. - 350 d.C.). Ele é considerado o criador da álgebra por introduzir notações abreviadas para representar potências e quantidades desconhecidas, além de apresentar resoluções de equações sem utilizar a geometria. A ele ainda é atribuído a origem da regra dos sinais. Apesar de suas contribuições no campo da álgebra, ele não faz qualquer referência aos números negativos. Entretanto, no começo de sua obra, intitulada "Livro I: Aritmética", Diofanto apresenta uma declaração afirmando que aquilo que está em falta multiplicado pelo que falta resulta em algo positivo, enquanto que aquilo que está em falta multiplicado pelo que é positivo resulta em algo que está em falta. Nota-se que os antigos gregos já tinham contato com a regra dos sinais "menos vezes menos dá mais" e "menos vezes mais dá menos". Embora Diofanto não tratasse isoladamente os números negativos, pelo sentido prático do uso, fica sinalizada na história a necessidade do surgimento de um novo tipo de número: os números negativos.

Na Idade Média, o uso dos números negativos foi marcado por sua prática no cálculo, apesar de sempre usado pelos matemáticos com certo receio. Como afirma Glaeser em [5]:

> "Durante muito tempo eles se espantaram ao perceber que cálculos efetuados com falsos números levavam afinal ao resultado exato!".

Nesse período, também aparece a figura do indiano Brahmagupta, matemático e astrônomo que em uma de suas obras "Brahmasphutasiddhanta" fornece as regras operatórias com os números negativos isoladamente, sem se preocupar em explicar o porquê de negativo multiplicado por negativo resultar em positivo. Outro matemático hindu que trata de números negativos nessa época é Bhaskara. Em uma de suas obras, ele resolveu uma equação do 2° grau determinando duas raízes distintas: (50) e (-5). A solução negativa, (-5), ele desconsiderou justificando que as pessoas da época não a consideravam e também que um número negativo não se tratava de um quadrado.

A existência dos números negativos no período que se inicia na idade média e se estende até o início da idade moderna é marcada pelo uso operatório eficaz no campo algébrico, todavia inexplicável conceitualmente pela comunidade Matemática. Como comenta Glaeser em [5]: "Assim, a prática clandestina do cálculo dos números negativos antecedeu em 1600 anos sua compreensão".

A primeira tentativa de aceitação e incorporação dos números negativos no meio acadêmico consta dos trabalhos de Simon Stevin (1548-1620), matemático belga, que aceitou esses tipos de números como raízes e coeficientes de equações com o uso de uma proposição de que as raízes negativas das equações são as raízes positivas da equação obtida trocando-se x por $(-x)$, isto é, se -3 é raiz de uma equação $x^2 - ax = b$, então $+3$ é raiz de $-x^2 + ax = -b$. Observa-se que esse artifício criado por Stevin ainda demonstra uma forma de se evitar em assumir o negativo como um símbolo de uma quantidade, ou seja, um número propriamente dito.

É a partir do século XVIII que os números negativos aparecem naturalmente em trabalhos científicos da época, justificados pela seguinte oração: "A eficácia do cálculo é suficiente para confortar o matemático em sua fé". Todavia, no campo pedagógico, não existia naquele momento algum pesquisador que validasse os processo envolvendo os números negativos. Matemáticos como François Viète (1540-1603), René Descartes (1596-1650) e Gottfried Leibniz (1646-1716) contribuíram para o amadurecimento do conceito dos números negativos, atualmente considerados como elementos pertencentes ao conjunto dos números inteiros.

Viète foi um dos primeiros matemáticos a utilizar os símbolos "+" e "−", apesar de usá-los apenas nas operações com números positivos. Ele considerava que os números negativos não possuíam um significado intuitivo ou físico; dizia "diminua 3" em vez de dizer "acrescente -3". Descartes, ao apresentar a geometria cartesiana, chamou de "falsas" as raízes negativas e desenvolveu um método para transformá-las em positivas. Leibniz mostrou que se poderia calcular com as proporções $(-1) : 1 = 1 : (-1)$, já que formalmente isso era equivalente a calcular quantidades imaginárias, introduzidas à época. O que Leibniz fez foi dar condições para validade das operações com os negativos.

Em 1748, foi publicado o "Tratado de álgebra", do matemático Colin Maclaurin (1698-1746), obra que vai marcar o início do entendimento dos números negativos, pois tratou de definições sobre quantidades negativas. Nessa obra, Maclaurin apresenta a ideia de que uma quantidade negativa é tão real quanto uma positiva, não obstante tomada em sentido oposto. Contudo, ele afirmava que essa quantidade somente existiria por comparação e não isolada. Para isto, ele enunciou que se "uma quantidade negativa não possui outra que lhe seja oposta, então não se pode dessa subtrair outra menor". Maclaurin somente admitia quantidades negativas em relação ao zero origem, o que anteriormente causava conflitos, pois não se distinguia o zero absoluto do zero origem. Ainda em sua obra, define a regra dos sinais, o que marcou o início do formalismo e a conceituação atual dos números negativos. Como afirmam Sá e Anjos em [8]:

> "Maclaurin foi o primeiro matemático moderno que chegou muito perto de compreender os números negativos tornando-se, portanto, uma importante referência para futuras gerações de matemáticos".

Leonhard Euler (1707-1783), notável matemático do século XVIII, ao tentar justificar a regra dos sinais em sua obra "Elementos de álgebra", deixa transparecer que ele entendia os números negativos apenas como uma quantidade precedida pelo sinal "$-$" (menos). Ele não raciocinava com negativos sendo quantidades menores que zero. Outro grande matemático que fez parte da história dos números negativos na idade moderna foi Jean le Rond D'Alembert (1717-1783). Ele escreveu o artigo "Negativo", onde apresenta uma ideia equivocada no conceito de números negativos. Afirma em sua publicação científica que "Quantidades negativas encontradas no cálculo algébrico indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. O sinal de menos que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar um erro que cometemos na hipótese inicial".

Em 1821, Augustin Cauchy (1789-1857) lançou uma obra destinada à Escola Politécnica de Paris, na qual faz uma distinção entre os números reais positivos e quantidades positivas e negativas. Nessa obra, ele define as leis de crescimento e de diminuição pelos sinais "$+$" e "$-$" (operatórios) e define quantidades positivas por grandezas que aumentam representadas por um número precedido de um sinal "$+$" e quantidades negativas por grandezas que diminuem representadas por um número precedido do sinal "$-$" . No entanto, essas definições que facilitavam a compreensão das propriedades aditivas, tornavam-se um obstáculo à compreensão da multiplicação. Com relação a essa barreira didática, Glaeser relata em [5]:

> Neste último caso, pode-se diminuir um número positivo, multiplicando-o por um fator compreendido entre 0 e 1. Daí resultaria confusões entre esses dois tipos de diminuições, e numa tal situação nebulosa não se compreenderia mais por que o produto de uma diminuição por uma diminuição é um aumento. Cauchy teria podido, contudo, assimilar o número negativo a uma diminuição aditiva (mas não o fez).

Cauchy de modo formal apresenta em sua obra a multiplicação sem modelos concretos e não utiliza as explicações usadas por ele para as propriedades aditivas, o que cria uma confusão entre os sinais operatórios "$+$" e "$-$", e que adiante, irá instigar o interesse de Herman Hankel (1839-1873) pelos números negativos.

Hankel em sua obra "Teoria dos Sistemas dos Complexos", publicada em 1867, dedica-se a exposição formal da teoria dos números complexos. Todavia, nas suas considerações preliminares, finalmente formula o princípio de permanência das formas equivalentes e das leis formais que estabelecem um critério geral para algumas aplicações do conceito de número, resolvendo assim, a dificuldade encontrada anteriormente para o entendimento do conceito de números negativos. A formalização de Hankel sobre os números negativos é considerada uma revolução para aceitação da existência desses números. Ele afirma que os números não são descobertos e sim inventados, imaginados. Hankel sinaliza que aqueles que tentarem procurar todas as respostas lógicas na natureza, no cotidiano, nunca conseguirão adquirir maturidade em conceitos matemáticos que doravante, são definidos para a realidade. Diante dessa reflexão, ele abandona a idéia de se extrair da natureza exemplos práticos para explicar os números negativos de forma metafórica e adota o ponto de vista formal a partir das propriedades aditivas dos $\mathbb{R}$ e multiplicativas em $\mathbb{R}^+$, propondo a extensão das propriedades de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$.

Como afirma Glaeser em [5]:

> O Teorema de Hankel foi enunciado da seguinte forma: "A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}^+$ respeitando as distribuições (à esquerda e à direita) é conforme a regra de sinais". A demonstração de Hankel para a regra dos sinais da multiplicação é assim apresentada:
>
> $$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{oposto } b) = ab + a \times (\text{oposto } b)$$
>
> $$0 = 0 \times (\text{oposto } b) = (\text{oposto } a) \times (\text{oposto } b) + a \times (\text{oposto } b);$$
>
> De onde
>
> $$(\text{oposto } a) \times (\text{oposto } b) = ab$$

Conclue-se da história dos números negativos que se os antecessores de Hankel tivessem desenvolvido modelos capazes de sustentarem as propriedades sobre o conjunto dos números negativos, obviamente o nível de compreensão sobre esses números negativos poderia ter ocorrido bem mais cedo. Da análise feita com relação à trajetória na história da compreensão dos números negativos, pode se considerar que o sucesso de Hankel, foi de não tentar buscar um modelo para a explicação da existência dos números negativos.

1.2 O obstáculo didático: $(-1) \times (-1) = +1$

Até o início do século XIX as duas barreiras epistemológicas envolvendo os números negativos são assim definidas por Glaeser em [5]:

> "Estagnação do estágio das operações concretas, em confronto com o estágio das operações formais, ou seja, a dificuldade de afastar-se de um sentido concreto atribuído ao seres numéricos. E a tentativa de um modelo unificador, de encontrar um "bom modelo" aditivo que fosse igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, onde esse modelo é inoperante".

A prática pedagógica mostra que ao se apresentar aos discentes os números positivos e negativos como medidas, utilizando o número positivo com a ideia de ganho e o número negativo com a de perda, consegue-se obter um bom entendimento nas operações aditivas com esses números. Contudo, como explicar que a multiplicação de uma perda por outra perda se transforma em um ganho? Estamos diante de um obstáculo didático. Nesse caso, o que antes poderia ser apresentado por meio de situações concretas, agora precisa ser entendido como uma regra sem relação nenhuma com o que foi aprendido nas operações de adição e subtração de números positivos e negativos. Hankel, em 1867, propôs uma forma de superar esse obstáculo ao mostrar que a explicação para a regra dos sinais "$-$" $\times$ "$-$" = "$+$" não poderia ser procurada na natureza, e que havia a necessidade de ser demonstrada formalmente, ou seja, justificada dentro dos princípios da consistência interna da Matemática. Ele conseguiu justificar $(-1)\times(-1)=+1$ através do princípio da extensão da propriedade da distributiva dos números positivos para o caso dos negativos. Crowley em [3] apresenta uma demonstração direta para $(-1)\times(-1)=+1$:

$$\begin{aligned}
(-1)\times(-1) &= ((-1)\times(-1)) + ((0)\times(1)) \\
&= ((-1)\times(-1)) + ((-1+1)\times(1)) \\
&= ((-1)\times(-1)) + ((-1)\times(1)) + ((1)\times(1)) \\
&= ((-1)\times(-1+1)) + ((1)\times(1)) \\
&= ((-1)\times(0)) + ((1)\times(1)) \\
&= (1)\times(1) = +1
\end{aligned}$$

Desta forma, o produto de dois números negativos resultando num valor positivo justifica-se pelo entendimento das regras consistentes da própria Matemática, decorrentes dos processos de abstrações e generalizações formalizados com rigor matemático.

No entanto, sabe-se que se na prática pedagógica ao ensinar a multiplicação de números negativos, aplicar-se somente a formalização do saber científico com relação à regra dos sinais. Provavelmente a “pirâmide” formada pela relação professor, aluno e saber matemático sofrerá rachaduras irreparáveis. Portanto, para que a estrutura desse “sólido geométrico” repleto de qualidades matemáticas diferenciadas não se desestruture, é necessário que se proponha estratégias de ensino pois o obstáculo epistemológico apontado, envolvendo $(-1)\times(-1)=+1$, materializa-se em sala de aula como obstáculo didático, conforme será exposto a seguir.

2 Estratégias para ensinar $(-1)\times(-1)=+1$

Lima [6] inicia a seção sobre produto de inteiros contando a seguinte história sobre seu aprendizado:

> “Meu saudoso professor Benedito de Moraes costumava explicar, a mim e a meus colegas do segundo ano ginasial, as “regras de sinal” para a multiplicação de números relativos da seguinte maneira:
>
> 1^a) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja, $(+)(+)=+$;
>
> 2^a) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, $(+)(-)=-$;
>
> 3^a) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, $(-)(+)=-$ e;
>
> 4^a) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, logo, $(-)(-)=+$.
>
> Sem dúvida esta ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na justificação da quarta regra (podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si).”

Segundo Lima [6] após a explicação das regras de sinais resta, na cabeça das pessoas mais inquisidoras, uma sensação de "*magister dixit*", de regra outorgarda pela força. Mais precisamente, insinua-se a dúvida: será possível demonstrar, em vez de impor, que $(-1) \times (-1) = +1$? Existem, como os trabalhos de Crowley em [3] ou o de Hankel citado em [5], apresentados acima, demonstrações para as regras de sinais. O que se busca aqui são estratégias para a transposição didática deste fato matematicamente demonstrado para uma linguagem acessível ao estudante de ensino fundamental, como fez o professor do autor do artigo em [6].

Peterson em [7] ressalta ser comum que os professores, ao planejarem suas aulas, normalmente dispõem de poucas estratégias para abordar este tema. A fim de contribuir com o docente, ele apresenta 14 estratégias para responder a seguinte pergunta: "Por que o produto de um número negativo por outro número negativo resulta em um número positivo?". A seguir, são analisadas algumas dessas estratégias adaptando-as à realidade tecnológica quando possivel.

2.1 Reta numerada

Esta é uma estratégia popular para ensinar as quatro operações básicas com inteiros. São colocadas duas interpretações para os sinais "+" e "−": como direção de segmentos orientados na reta, sendo positivo à direita da origem, ou ainda como alteração do sentido destes segmentos orientados na reta, podendo estes serem reversos ("−") ou não ("+"). Desta forma, pela primeira interpretação, "+4" pode ser representado por 4 segmentos de tamanho unitário, orientados para direita, justapostos desde a origem. Já "−3" seria representado por 3 segmentos de tamanho unitário, orientados para a esquerda, justapostos desde a origem, entendendo aqui "justaposição" como o processo de colocar o início de um segmento orientado na seta que representa o final do segmento anterior.

Combinando estas interpretações, tem-se o seguinte significado para $a \cdot b = c$:

1. O tamanho de b é a quantidade de segmentos (unitários) que representam b;

2. O sinal de b indica o sentido para onde os segmentos de b apontam: direita ("+") ou esquerda ("−");

3. O valor absoluto de a indica quantas setas de tamanho b serão justapostas desde a origem;

4. O sinal de a indica se o sentido das setas que representam b será mantido ("+") ou revertido ("−");

5. O "Vetor Produto" obtido será a reunião de a segmentos orientados de tamanho b. O tamanho deste será o módulo de c e o sinal será determinado pelo seu sentido em relação à origem.

Por exemplo, $(-3) \times (-2)$ será tratado da seguinte forma: Com 3 segmentos (valor absoluto do primeiro fator) que apontam para a esquerda (sinal "$-$" do segundo fator) de tamanho 2 (valor absoluto do segundo fator) tem-se um segmento de tamanho 6 apontando para a esquerda. Como o sinal do primeiro fator é "$-$", o sentido do resultado será invertido, obtendo-se um segmento de tamanho 6 apontando para a direita, que representa $+6$.

2.2 Viagem em uma rodovia

Esta pode ser considerada uma variação da estratégia anterior. Supondo um ponto de partida em uma rodovia de sentido leste-oeste, por exemplo uma casa, podemos pensar neste ponto de partida como a origem da reta numerada, sendo os pontos à direita desta casa representados por coordenadas positivas e pontos à esquerda por coordenadas negativas. Viagens à leste são consideradas de sentido positivo e viagens à oeste de sentido negativo. Também considera-se tempo futuro como positivo, tempo atual igual a zero e tempo passado negativo.

Desta forma, pode-se dizer que $(+80) \times (+2) = +160$ significa que uma viagem para leste à 80 km/h por 2 horas partindo da origem resulta em um deslocamento a leste de 160 km. $(+80) \times (-2) = -160$ significa que uma viagem para leste à 80 km/h iniciada 2 horas atrás, chegando na origem resulta em uma partida a 160 km a oeste. $(-80) \times (+2) = -160$ significa que uma viagem para oeste à 80 km/h por 2 horas partindo da origem resulta em um deslocamento a oeste de 160 km. Por fim, $(-80) \times (-2) = +160$ significa que uma viagem para oeste à 80 km/h iniciada 2 horas atrás, chegando na origem resulta em uma partida a 160 km a leste.

2.3 Elevadores

Neste caso, a reta numerada é representada por um grande edifício, com muitos andares acima e abaixo do térreo. Os andares acima do térreo são denotados por números positivos, o andar térreo pelo zero e os andares abaixo do térreo por números negativos.

O prédio contém dois conjuntos de elevadores. Todos os elevadores sobem e descem, entretanto alguns elevadores sobem vazios e transportam as pessoas apenas para baixo (indicados por $-$). Outros transportam pessoas somente para cima e descem vazios (indicados por $+$). As seguintes regras regem o funcionamento dos elevadores:

1. Alguns dos elevadores param em todos os andares, outros a cada dois andares, outros de três em três andares, e assim por diante.

2. Se um elevador que desce parar em cada andar, será designado por "-1". Se ele parar a cada dois andares, será indicado por "-2", e assim por diante.

Se um elevador que sobe parar em cada andar, será denotado por "+1". Se ele parar em cada dois andares, será indicado por "+2", e assim por diante.

3. Cada elevador deve retornar para o andar térreo (zero) após cada viagem.

4. Quando um elevador que sobe está transportando pessoas, está indo na direção positiva e o número de paradas que faz é indicado por um número positivo. Se este elevador deixa o térreo para recolher passageiros num piso abaixo do térreo que desejam subir, o elevador vai para baixo – um sentido negativo – e o número de paradas que o elevador faz é indicado por um número negativo.

5. Quando um elevador que desce está transportando pessoas, está indo em uma direção negativa e o número de paradas que faz é indicado por um número negativo. Se um elevador que desce deixa o térreo para pegar passageiros em um piso acima do térreo que desejam descer, o elevador sobe – uma direção positiva – e o número de paradas que o elevador faz é indicado por um número positivo.

Por exemplo, $(+2) \times (+3)$ é ilustrado pelo seguinte problema: Suponha que uma pessoa embarque em um elevador $+3$ no térreo e desembarque na segunda parada. Em que andar esta pessoa sairá? No andar $+6$ pois o elevador $+3$ fará $+2$ paradas, sendo sinal das paradas "+" por levar passageiros para cima.

Uma ilustração de "$(-2) \times (-3)$" é o seguinte: Suponha que um elevador -3 saia do térreo e suba duas paradas para pegar passageiros. Em que andar estão esses passageiros? No andar $+6$, pois o elevador -3 fará -2 paradas, sendo o sinal das paradas "$-$" por levar passageiros para baixo.

2.4 Office boy

Usando "histórias de office boy" para, intuitivamente, introduzir o produto de números negativos. Suponha que o office boy entregue e colete para uma empresa créditos (cheques, por exemplo) ou dívidas (boletos). O primeiro fator do produto será a quantidade trazida $(+)$ ou levada $(-)$ pelo office boy. O segundo fator do produto será o valor dos créditos $(+)$ ou dívidas $(-)$ da entrega.

Por exemplo, a interpretação de $(+2) \times (+300)$ é ilustrada a seguir: O office boy coletou para a empresa dois cheques de R$300,00 cada. Como resultado disso, a empresa está "no lucro" de R$600,00, e portanto $(+2) \times (+300) = +600$. Isso eventualmente conduz à situação onde o office boy entrega duas (-2) dívidas de R$300,00 (-300) cada. Temos $(-2) \times (-300)$. Como resultado, a empresa revisa para cima $(+)$ sua estimativa de recursos disponíveis. $(-2) \times (-300) = +600$. Observe que o caso em que o office boy recolhe duas dívidas, de R$300,00 cada, levando à $(+2) \times (-300) = -600$ é bastante natural. De fato as duas dívidas podem ter sido entregues erroneamente e, nesse caso, a empresa volta a ter a dívida de R$600,00.

2.5 Filmagens

2.5.1 Tanque de água

Considere um projetor de cinema que exiba para frente $(+)$ ou para trás $(-)$ e uma bomba que pode por $(+)$ ou tirar $(-)$ água de um tanque com paredes de vidro. A bomba opera a uma taxa de 30 litros por minuto. Uma filmadora apontada para o tanque é ligada ao mesmo tempo que a bomba. Após gravar a ação da bomba por dois minutos, ambas são paradas. O filme é então projetado em uma tela. Qual mudança no volume de água será observada na tela? Se a água estava entrando no tanque $(+)$ e se o filme é exibido normalmente $(+)$ a mudança observada na tela é um aumento $(+)$ de 60 litros. Retirando água do tanque $(-)$ e exibindo normalmente o filme $(+)$ observa-se uma diminuição $(-)$ de 60 litros, assim como a bomba colocando água no tanque $(+)$ e exibindo o filme em sentido contrário $(-)$. Finalmente, bombeando água para fora do tanque $(-)$ e exibindo o filme em sentido contrário $(-)$ resulta em um efeito de aumento de 60 litros.

2.5.2 Caminhando

Um refinamento da ideia acima é filmar alguém andando para a frente $(+)$ ou para trás $(-)$ a uma velocidade constante. Exibindo o filme normalmente $(+)$ ou no sentido contrário $(-)$ permite aos alunos conjecturar o resultado que se mostrará na tela: a pessoa andando em frente $(+)$ ou para trás $(-)$. Com filmadoras baratas (celulares) disponíveis, este caso pode ser realizado muito facilmente por professores em sala de aula. Ao exibir o filme para a frente ou para trás, os alunos são capazes de verificar visualmente as suas conjecturas.

2.6 Bloquinho animado (*"flip book"*)

São dados a cada aluno dois blocos de papel, tipo *post-it*. No primeiro bloco, os alunos desenham um carro no canto inferior esquerdo da primeira página. Na página seguinte o carro é desenhado alguns milímetros à direita do que estava na página anterior, procedendo assim até que a última página tenha o carro desenhado no canto inferior direito. Assim, este bloco mostrará o carro indo em frente. Este será o nosso bloco positivo $(+)$.

O segundo bloco será feito de modo semelhante, porém, com a primeira página tendo o carro no canto inferior direito e as páginas seguintes tendo o carro desenhado um pouco à esquerda da página anterior, tendo a última folha deste bloco o carro no canto inferior esquerdo. Assim, este bloco mostrará o carro retornando. Este será o nosso bloco negativo $(-)$.

Folhear um dos blocos para frente $(+)$ significa ir da primeira à ultima página do bloco com o polegar. Folhear um dos blocos para trás $(-)$ significa ir da última para a primeira página do bloco.

Folhear o bloco positivo (+) para frente (+) resulta no carro se deslocando para frente (+). Folhear o bloco positivo (+) para trás (−), ou então folhear o bloco negativo (−) para frente (+) resulta no carro se deslocando para trás (−). Enfim, folhear o bloco negativo (−) para trás (−) resulta no carro se deslocando para frente (+).

Essa estratégia indica apenas o sinal do produto, não fornecendo seu valor.

2.7 Reconhecimento de padrões

Esta estratégia utiliza padrões, tais como os seguintes, para "prever" o produto:

$$\begin{array}{llllll} \text{A.} & +3 & \times & +2 & = & +6 \\ & +3 & \times & +1 & = & +3 \\ & +3 & \times & 0 & = & 0 \\ & +3 & \times & -1 & = & ? \\ & +3 & \times & -2 & = & ? \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \text{B.} & -3 & \times & +2 & = & -6 \\ & -3 & \times & +1 & = & -3 \\ & -3 & \times & 0 & = & 0 \\ & -3 & \times & -1 & = & ? \\ & -3 & \times & -2 & = & ? \end{array}$$

É necessário contar com um "pensamento indutivo" dos alunos. Ou seja, que os sucessivos valores dos produtos indicados irá diminuir em três unidades no exemplo A e aumentar em três unidades no exemplo B.

2.8 Gráficos

A estratégia de gráficos usa o plano cartesiano e "retas multiplicadoras". A fim de encontrar o produto $(+3) \times (+2)$ primeiro localizamos a reta "multiplicadora por +2". Para isso, localizamos o número 1 no eixo x, medimos duas unidades verticalmente para cima (pois queremos multiplicar por +2) e marcamos o ponto P. Traçando a reta que passa pela origem e por este ponto P temos a reta "multiplicadora por +2". Rotulamos esta reta como +2.

Agora, a fim de resolver $(+3) \times (+2)$, localizamos +3 no eixo x e desenhamos uma perpendicular ao eixo x por +3 de modo a intersectar a reta +2 no ponto T. Passando por T, traçamos uma paralela ao eixo x que intersecta o eixo y em +6, que é o produto desejado. Usando a reta +2 novamente, é possível determinar que $(-4) \times (+2) = (-8)$.

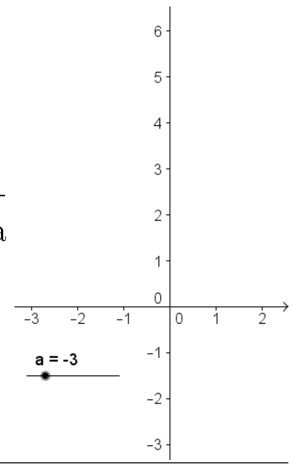
A solução de $(-3) \times (-2)$ requer uma reta "multiplicadora por −2". Esta é determinada marcando Q medindo-se verticalmente para baixo (−) duas unidades a partir de 1 localizado sobre o eixo x. Desenhando a reta determinada por este ponto Q e a origem temos a reta −2. Para calcular $(-3) \times (-2)$, localizamos −3 sobre o eixo x e desenhamos a perpendicular ao eixo x por −3. Se esta perpendicular intersecta a reta −2 em R, então a reta paralela ao eixo x passando por R intersecta o eixo y em +6, que é a solução desejada.

O nível de sofisticação usado com este método independe dos alunos, pois não é necessário que os estudantes tenham uma compreensão de coordenadas cartesianas.

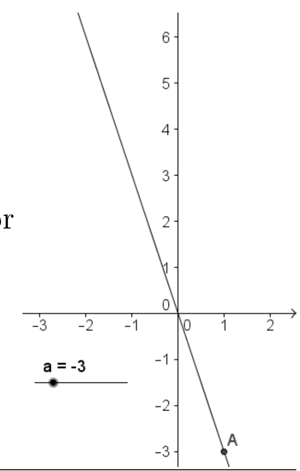
2.8.1 Usando *Geogebra* na estratégia dos gráficos

O software *Geogebra* se mostra uma poderosa ferramenta na aplicação deste método. A seguir, tem-se os comandos a serem digitados no *Geogebra* em fonte **destacada**. Para construir um gráfico com uma "reta multiplicadora genérica", que calculará $a \times b$ procede-se da seguinte forma:

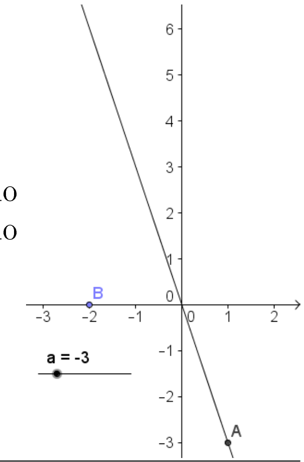
- Insira um controle deslizante, chamado **a**. Neste controle se definirá o valor da reta multiplicadora, que é a primeira parcela do produto.



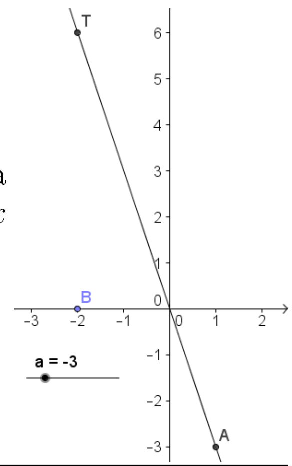
- Defina o ponto **A=(1,a)** e a "reta multiplicadora por **a**" será a reta que passa por **A** e pela origem $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.



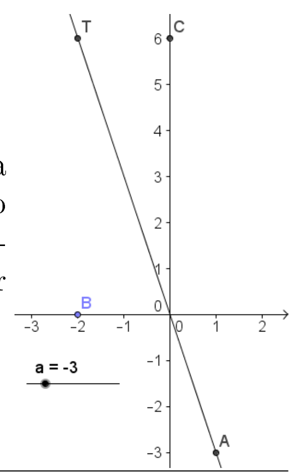
• Defina o ponto **B** no eixo x, escrevendo **B=Ponto[y=0]**. Posicione **B** no número **b** do eixo x, o valor que se quer multiplicar por **a**.



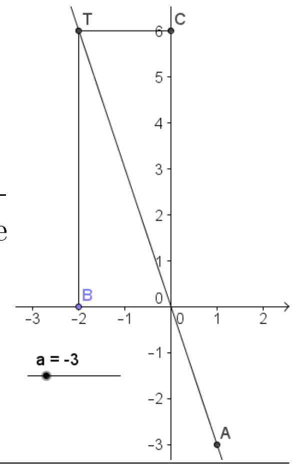
• Pela estratégia acima, marque **T** como interseção da “reta multiplicadora” com uma perpendicular ao eixo x passando por **B**. Para isso, digite o comando **T=Interseção[Reta[A,(0,0)],Perpendicular[B,y=0]]**.



• Marque **C** como o ponto de interseção entre o eixo y e a reta paralela ao eixo x que passa por **T**. Digite no campo de entrada **C=Interseção[Reta[T,y=0],x=0]**. A ordenada de **C** será o resultado da multiplicação de **a** por **b**.



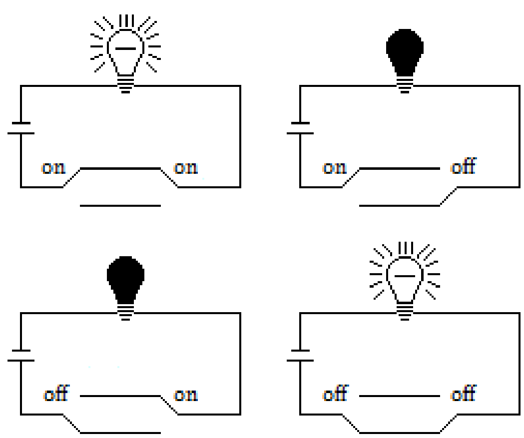
- A fim de facilitar a visualização, defina os segmentos **BT** e **CT**, digitando **BT=Segmento[B,T]** e **CT=Segmento[C,T]**.



2.9 Circuitos elétricos

Sabe-se que circuitos elétricos são muito utilizados para o ensino de lógica. A maioria dos alunos percebe que a resposta para o problema $(-3) \times (-2)$ é $+6$ ou -6. A estratégia de circuito elétrico pode ser usada para indicar qual é a resposta correta.

Muitas casas estão equipadas com lâmpadas elétricas controladas por duas chaves. Se ambas as chaves estão na posição "on", a luz estará acesa, se ambas as chaves estão na posição "off", a luz também estará acesa. Se uma chave está "off" e a outra está "on", então a luz estará apagada. Isto é feito por meio de duas chaves de três vias como no diagrama da figura.

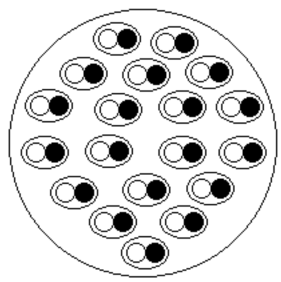


Possíveis posições dos interruptores

Note-se que esta estratégia, tal como a estratégia do Bloquinho Animado, dá apenas o sinal do produto e não seu valor.

2.10 Partículas carregadas

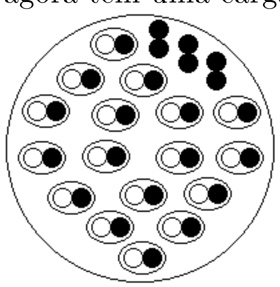
A estratégia das "Partículas Carregadas" depende de algum conhecimento de física. São necessários para esta estratégia um campo (representado por uma região circular) e partículas positivas (círculo cheio ●) e negativas (círculo vazado ○). Cada carga negativa atrai uma carga positiva e elas se neutralizam. Cada carga neutra é representada por um pequeno círculo com uma partícula positiva e uma negativa dentro do círculo. O campo usado para a multiplicação sempre deve ter uma carga total igual a zero. Isto deverá ser ilustrado por um campo contendo várias partículas neutralizadas, como na figura abaixo.



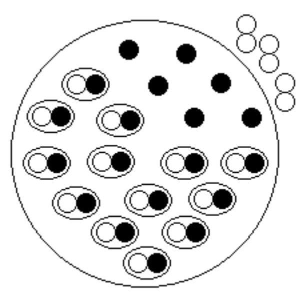
Circuito neutro

O primeiro fator do produto indica quantos grupos de partículas foram adicionados (+) ou subtraídos (−). O segundo fator indica quantas partículas positivas (+) ou negativas (−) estão em cada grupo.

Por exemplo, $(+3) \times (+2)$ é ilustrada pela adição de três grupos de duas partículas positivas cada. Feito isto no desenho, ilustrado abaixo, indica-se que o campo agora tem uma carga de +6.



$(+3) \times (+2) = 6$



$(-3) \times (-2) = 6$

Adicionar três grupos de duas cargas negativas cada é a representação de $(+3) \times (-2)$ e $(-3) \times (+2)$ refere-se a subtrair (ou remover) três grupos de duas cargas positivas cada. Finalmente, $(-3) \times (-2)$ representa subtrair três grupos de duas cargas negativas cada. A carga resultante do campo é +6 e assim $(-3) \times (-2) = +6$.

2.11 Propriedade distributiva

Este método depende da suposição de que a propriedade distributiva da multiplicação sobre a subtração se comporta da mesma forma no conjunto dos números inteiros como no conjunto dos números naturais. Assim,

$$(+3) \times (+2) = (+3) \times [(+5) - (+3)] = [(+3) \times (+5)] - [(+3) \times (+3)] \,.$$

Com esta hipótese, pode ser estabelecido que

$$\begin{aligned}(+3) \times (-2) = (+3) \times [(+2) - (+4)] &= [(+3) \times (+2)] - [(+3) \times (+4)] \\ &= (+6) - (+12) = -6.\end{aligned}$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que o $(-3) \times (+2) = -6$. Finalmente, pode-se demonstrar que o produto de dois números inteiros negativos é um número inteiro positivo. Por exemplo,

$$(-3) \times (-2) = (-3)\times[(+2) - (+4)] = [(-3) \times (+2)]-[(-3) \times (+4)] = -6-(-12)$$

Observe que -12 é o oposto de 12, sendo $-(-12)$ o oposto de -12, que é o próprio 12. Conclui-se que

$$(-3) \times (-2) = -6 - (-12) = -6 + 12 = 6$$

.

2.12 Processo dedutivo

A abordagem dedutiva é provavelmente a estratégia mais sofisticada. Embora seja semelhante à distributiva, as suas diferenças são suficientes para que esta seja considerada uma estratégia diferente. Um exemplo específico para $(-3) \times (-2)$ é o seguinte:

a) $(-3) \times (0) = 0$	— Elemento neutro da multiplicação
b) $(-3) \times (+2 - 2) = 0$	— Substituição e Elemento Oposto da Adição
c) $((-3) \times (+2)) + ((-3) \times (-2)) = 0$	— Distributiva
d) $-6 + (-3) \times (-2) = 0$	— Substituição
e) $-6 + 6 = 0$	— Elemento Oposto da Adição
f) $(-3) \times (-2) = 6$	— Unicidade do Elemento Oposto da Adição

2.13 Definições

Cada uma das treze estratégias anteriores são usadas para motivar uma compreensão da multiplicação nos números inteiros. Como resultado desta compreensão, os alunos deverão ser capazes de gerar sua própria definição de multiplicação de inteiros ou aceitar prontamente uma definição dada no livro didático ou pelo professor. Também é possível (talvez não muito indicado no ensino fundamental) começar com uma definição de multiplicação de números inteiros sem ter sido utilizada uma (ou mais) das estratégias aqui citadas. Uma abordagem diferente é considerar números inteiros como pares ordenados e definir multiplicação de pares ordenados. O número inteiro $+2$ é definido como equivalente ao conjunto de pares ordenados (a, b) com $a - b = 2$, a e $b \in \mathbb{N}$. Assim, $+2 = (2,0) = (3,1) = (4,2) = \ldots$. Esta definição representa -5 por pares ordenados tais como $(0,5)$, $(1,6)$, $(2,7)$, e assim por diante.

A multiplicação é definida por $(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$. Assim,

$$(+3) \times (+2) = (4,1) \times (5,3) = ((4 \times 5) + (1 \times 3), (4 \times 3)\,(1 \times 5))$$

$$= (20 + 3, 12 + 5) = (23,17) = 6$$

e

$$\begin{aligned}(-3) \times (-2) = (1,4) \times (3,5) &= ((1 \times 3) + (4 \times 5), (1 \times 5) + (4 \times 3)) \\ &= (3 + 20, 5 + 12) = (23,17) = 6\end{aligned}$$

Essas estratégias apresentam caminhos possíveis que deverão ser preparados e detalhados para uso em sala de aula de acordo com as necessidades específicas de cada turma. Na parte seguinte sugere-se como isso pode ser operacionalizado tomando como exemplo duas das estratégias listadas. O mesmo poderá ser realizado com cada uma das outras não tratadas.

3 O ensino da multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$

Durante o ensino fundamental, os educadores se deparam com dois obstáculos: a introdução do conceito do número negativo e a compreensão das regras dos sinais na multiplicação. Geralmente os alunos nesse nível de escolaridade, já apresentam total compreensão da operação $a - b$, pois faz parte do seu dia-a-dia perder ou ganhar objetos, pontos em jogos, guloseimas, etc. Em todos esses casos percebe-se que a operação $a - b$ é realizada sempre com o a maior do que o b. Agora, porém, deve-se ampliar o conceito de subtração. O aluno precisa entender que o sinal "$-$" não significa apenas retirar ou subtrair alguma coisa de outra e é muito importante essa compreensão, sem a qual ele jamais entenderá como é possível retirar uma quantia de outra menor. Grande parte dos professores, diante desse primeiro obstáculo, utiliza-se dos exemplos do dinheiro (ganho $\times$ perdas), da temperatura (graus positivos e negativos) ou ainda, da reta numérica (números à direita ou à esquerda do zero), para ampliar esse conceito do número negativo. Pode-se concluir que esses exemplos fazem parte do cotidiano escolar de qualquer criança nessa faixa etária e, portanto, são bem compreendidos e assimilados depois de um mínimo de prática. Geralmente essa prática acontece por meios de expressões numéricas e problemas simples envolvendo apenas a adição e a subtração.

O segundo obstáculo acontece quando o professor chega ao conteúdo da multiplicação de números negativos, onde aplica-se as "regras dos sinais" da multiplicação. Uma bifurcação de opções aparece diante do professor fazendo com que ele tenha que optar em simplesmente ditar a regra dos sinais e fazer com que seus alunos aprendam por meio de exercícios repetitivos ou, tentar fazer com que seus alunos compreendam o porquê das "regras dos sinais".

Apesar de já existirem obras didáticas mais atuais incluídas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ministério da Educação (MEC) que trazem algumas estratégias para a aprendizagem da multiplicação entre números negativos, são poucos os professores que fazem uso desse saber escolar como material para o planejamento de suas aulas. Acredita-se que, o uso da regra dos sinais como única estratégia de ensino para a multiplicação entre negativos, origina-se do fato do docente planejar a sua aula com o apoio de livros didáticos desatualizados; por ter aprendido dessa forma, ou ainda, por considerar que somente a regra dos sinais é uma boa estratégia para a compreensão desse conteúdo.

Talvez esse fato justifique o conhecimento apenas superficial e deficitário da utilização dessa regra por parte dos alunos, quando chegam às séries posteriores. Percebe-se que a grande maioria dos alunos responde corretamente quando o professor pergunta "menos com menos dá ...", "mais com menos dá ...", e mesmo assim continuam usando as regras de maneira equivocada e apresentando dificuldades na utilização das mesmas.

Destacam-se as palavras do filósofo e psicólogo francês, Raymond Duval, preocupado com a educação focada no processo de ensino aprendizagem dos alunos.

Segundo Duval [4]

> Como compreender dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da Matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram?
> Essas questões passaram a ter uma amplitude e uma importância particulares com a recente exigência de uma maior formação Matemática inicial para todos os alunos, a fim de prepará-los para enfrentar um ambiente informático e tecnológico cada vez mais complexo. Mas, para responder a essas questões, não podemos nos restringir ao campo matemático ou à sua história. É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise de visualização. (2003, p. 11)

3.1 Utilizando duas estratégias em sala de aula

Diante da opção de aumentar ainda mais o nível de compreensão da multiplicação dos números inteiros dos seus alunos e transpor a barreira didática de $(-1) \times (-1) = +1$, o professor pode utilizar, como exemplo, a ideia da estratégia 2.4 "Office boy" em sala de aula:

Suponha que o aluno seja dono de uma empresa e, como todo diretor e dono de empresa, possui uma sala com uma grande mesa. Essa mesa possui duas gavetas principais onde numa delas, ele coloca todos os cheques e dinheiro que sua empresa ganha dos clientes e na outra, todas as contas e boletos que precisa pagar para manter a sua empresa funcionando (água, luz, telefone, salários, impostos, etc...).

Além disso, ele possui uma pessoa que lhe presta o serviço de office boy e todos os dias visita a sua sala trazendo cheques (dinheiro) ou contas para pagar. É ele quem abastece as duas gavetas. Por ser um homem muito atarefado e pouco organizado, esse office boy vive se atrapalhando e às vezes confunde as contas e cheques da sua empresa com as contas e cheques de outra empresa que ele também presta serviço.

Todo cheque (dinheiro) que entra na gaveta, aumenta o patrimônio da empresa e por isso será chamado de positivo usando sempre o sinal "+" ao se fazer referência a ele. Por outro lado as contas e boletos depositados na outra gaveta fazem com que o patrimônio da sua empresa diminua e por isso será chamado de negativo usando o sinal "$-$" quando se fizer referência a ele. Chama-se também de "+" o ato de o office boy trazer (ou somar) algo nas gavetas, e de "$-$" sempre que ele precisar retirar (ou subtrair) algo que tenha depositado por engano em uma das gavetas. Agora, diante dessas condições, as seguintes situações multiplicativas são apresentadas aos alunos:

1^a) O office boy depositou na gaveta dois cheques de R\$300,00.
Resposta esperada: "O patrimônio aumentou R\$600,00, pois $2 \times 300 = 600$."
Nesse momento é importante chamar a atenção para os sinais que acompanham cada número da operação, explicando que, como o office boy somou 2 cheques na gaveta, então o número utilizado é $+2$ e, como ele depositou um cheque de R\$300,00 então há correspondência ao valor $+300$. Sendo assim a operação fica:

$$(+2) \times (+300) = +600$$

2^a) O office boy viu que tinha se confundido e teve que retirar da gaveta, três cheques de R\$200,00 que havia depositado por engano.
Resposta esperada: "O patrimônio diminuiu de R\$600,00, pois $(3) \times (200) = 600$."
Mais uma vez é importante interferir e chamar a atenção para o uso correto dos sinais e explicar que, como o office boy retirou 3 cheques então usa-se

o -3. Por outro lado como cheque representa uma quantia que acrescenta valor ao patrimônio, deve-se continuar utilizando o sinal "+" como definido antes. Portanto, a operação ficará da seguinte maneira:

$$(-3) \times (+200) = -600$$

3^a) Novamente o office boy cometeu um engano, mas agora ele teve que retirar 4 contas de R$100,00 que ele havia depositado por engano na gaveta.
Resposta esperada: "O patrimônio vai aumentar R$400,00."
Explica-se novamente que, como o office boy retirou 4 contas, então usa-se o -4 e, como os objetos retirados eram contas (diminuem o valor do patrimônio), usa-se o -100, tornando a operação correta da seguinte maneira:

$$(-4) \times (-100) = +400$$

Diante dessas três situações, conclui-se que:

- $(+) \cdot (+) = +$
- $(-) \cdot (+) = -$, e pela lógica, $(+) \cdot (-) = -$
- $(-) \cdot (-) = +$

Outra sugestão para o professor trabalhar a compreensão e fixação da multiplicação de números inteiros é utilizar a ideia da estratégia 2.5.2 "Caminhando" com seus alunos em sala de aula.

Com o apoio de um equipamento de vídeo, o professor produzirá previamente dois vìdeos simples e de curta duração. No primeiro deve aparecer uma pessoa caminhando naturalmente para frente a uma velocidade considerada constante. No segundo filme, a mesma pessoa deverá ser filmada caminhando para trás. Sendo gravados em DVD, ou mesmo celular, esses filmes podem ser reproduzidos em sentido contrário, facilmente.

Na apresentação para os alunos o professor deverá explicar as seguintes condições:

- a pessoa caminhando para frente, será representada pelo sinal "+";
- a pessoa caminhando para trás, será representada pelo sinal "$-$";
- o filme exibido no sentido normal, será positivo "+" e
- o filme exibido no sentido contrário será negativo "$-$".

Feito isso, o professor vai apresentar as filmagens de quatro maneiras diferentes:

1. Exibindo o filme da pessoa caminhando para frente (+), no sentido normal (+). Na tela os alunos perceberão que a pessoa caminha para frente (+). Pode-se chamar a atenção para o fato de que $(+) \times (+) = (+)$;

2. Exibindo o filme da pessoa caminhando para frente $(+)$, mas no sentido contrário, ou seja, voltando o filme $(-)$. Na tela a pessoa aparecerá caminhando para trás $(-)$.
   Ressalte-se que $(+) \times (-) = (-)$;

3. Exibindo o filme da pessoa caminhando para trás $(-)$, mas no sentido normal $(+)$, tem-se como resultado, na tela, uma pessoa caminhando para trás $(-)$. Assim, $(-) \times (+) = (-)$;

4. Por fim, o professor exibirá o filme no sentido contrário, para a compreensão e aprendizagem da multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$. Ou seja, voltando o filme $(-)$ da pessoa caminhando para trás $(-)$ ilustra-se a idéia da caminhada para frente $(+)$.

4 Considerações Finais

São perfeitamente justificáveis as dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com as operações matemáticas envolvendo os números negativos. Historicamente, foram necessários séculos para que os números negativos fossem aceitos e totalmente compreendidos pela sociedade matemática, ultrapassando dessa forma, esse obstáculo epistemológico. Ainda assim, é exigida dos alunos a total compreensão desse conteúdo em poucos meses.

Com relação à adição e a subtração de números negativos, verifica-se que os livros didáticos, na maioria das vezes utilizam as mesmas táticas, bem como os professores em sala de aula. Com exemplos ilustrativos, usam a reta enumerada, a temperatura de algumas cidades (frias e quentes) e movimentação numa conta bancária fictícia, onde se debitam e creditam dinheiro.

O maior problema acontece quando o assunto passa a ser a multiplicação de números negativos, com a famosa “regra dos sinais”. Verificamos que, realizar a operação $(-1) \times (-1) = +1$ não é tão simples assim, e por isso a maioria dos professores, talvez influenciados por livros mais antigos, optam por simplesmente fazer com que os seus alunos decorem a regra. Contudo, o ensino puramente expositivo destas regras, ao causar a sensação de regra outorgada pela força, cria dificuldades para a compreensão e aplicação correta nas operações. Como resultado, observa-se que os alunos chegam ao ensino médio ainda apresentando dificuldades em trabalhar com números inteiros, embora tenham decorado a “regra dos sinais”.

O uso de estratégias ou artifícios simples e compreensíveis que ilustrem as regras de sinais contribui com a assimilação do conceito e dão significado a ele, sendo superado este obstáculo epistemológico-didático que costumeiramente impede a progressão dos alunos no aprofundamento na disciplina. Não que seja impossível conseguir resultados favoráveis de compreensão do conhecimento da multiplicação entre números negativos em tão pouco tempo, mas devemos sempre estar atentos para o fato de que trabalhar com esses tipos de números não é algo natural para a maioria dos alunos. Portanto, é papel do professor estar de posse do maior número de estratégias para facilitar a compreensão do conteúdo por todos os alunos.

Referências

[1] S. Almouloud. *Fundamentos da didatica da Matemática.* Editora UFPR, Curitiba, 2007.

[2] G. Bachelard. *A formação do Espírito Científico.* Contra-ponto, São Paulo, 1996.

[3] M.L. Crowley and K.A. Dunn. On multiplying negative numbers. *Mathematics Teacher*, 78(4):252–256, 1985.

[4] R. Duval. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo de compreensão em matemática. In *Aprendizagem em Matemática.* Papirus, Campinas, 2003.

[5] G. Glaeser. Epistemologia dos números relativos. *Boletim do GEPEM*, 17:29–124, 1985.

[6] E.L. Lima. Conceitos e controvérsias: Por que (-1)(-1)=1? *Revista do Professor de Matemática*, 1(1):5–8, 1982.

[7] J.C. Peterson. Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (-1)(-1) = +1. *The Arithmetic Teacher*, 19(5):396–403, 1972.

[8] P.F. Sá and L.J.S. Anjos. Números negativos: Uma trajetória histórica. In *Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática*, Aracaju, 2011.