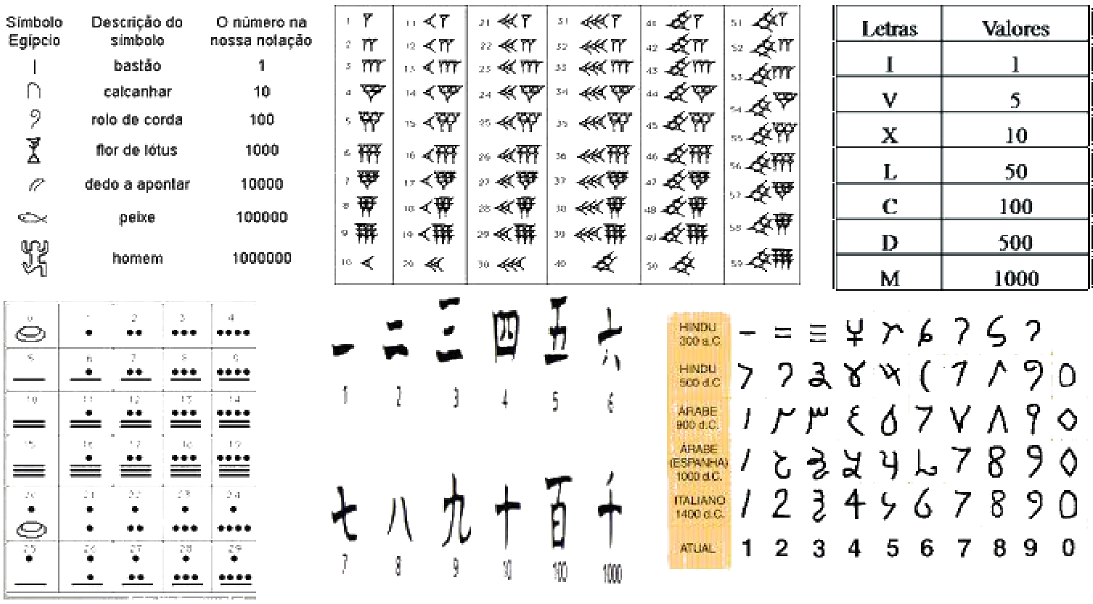
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ — UFPR
CAMPUS AVANÇADO EM JANDAIA DO SUL
LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO
LICENCIATURA EM CIÊNCIAS EXATAS

Disciplina: JLC048 — Pré-Cálculo *Professor:* Carlos Galvão
Disciplina: JCE023 — Matemática I *Professor:* Carlos Galvão

Conjuntos Numéricos — 2017_1 — Notas de Aula

Números Naturais $\mathbb{N}$ A criação/uso dos números naturais ($\mathbb{N}$) se confunde com a própria história da Matemática. Desde os primórdios, determinar a quantidade de objetos de uma coleção, como por exemplo animais em um rebanho, desperta no ser humano a necessidade da contagem. Inicialmente $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, sem maiores dificuldades. Tribos mais rudimentares contam "*um*", "*dois*", "*muitos*".



Sistemas: Egípcio[1], Babilônico[2], Romano[3], Maia[4], Chinês[5] e Evolução do Indo-arábico[6]
Resultado de pesquisa de imagens no Google

Os sistemas de numeração antigos atribuíam a símbolos seus valores. No sistema que utilizamos, chamado de *sistema posicional*, é a posição do símbolo que determina seu valor relativo. Neste contexto, é imprescindível uma notação para o "vazio". O número 207, por exemplo, representa duas centenas, nenhuma dezena e sete unidades.

$0 \in \mathbb{N}$ **ou** $0 \notin \mathbb{N}$**?** A resposta correta é "depende da necessidade e/ou preferência". Porém, a pergunta por si só não tem importância. Na Matemática Grega, por exemplo, não fazia sentido pensar no "nada" ou "vazio". Mais além, "para os gregos era discutível se 1 era número. Nos 'Elementos' de Euclides encontram-se as definições 'Unidade é aquilo pelo qual cada objeto é um. Número é uma multitude de unidades.' " [7] Os livros didáticos usados nas escolas brasileiras consideram $0 \in \mathbb{N}$. Quando isto ocorre e há necessidade de se excluir o 0, usa-se a representação $\mathbb{N}^*$, significando $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. A repetição desta preocupação em um determinado contexto pode ser evitada definindo inicialmente $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. **No contexto da disciplina, favor considerar** $0 \in \mathbb{N}$.

Números Inteiros $\mathbb{Z}$ **([9])** [1] A ideia de números negativos aparece em escritos chineses datados de antes de Cristo, embora não concebidos como unidades independentes. Na Grécia, a concepção da Matemática era essencialmente geométrica (contar e medir), onde não faz sentido falar em negativos. Porém, considerando o Livro I da "Aritmética" de Diofantino (séc III a.C), vê-se

[1] Este parágrafo é uma síntese de [9]. Recomenda-se ler o artigo de referência inteiro.

> uma declaração muito importante a respeito do que hoje é a multiplicação de números negativos afirmando que o que está em falta multiplicado pelo que falta resulta em algo positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo resulta em algo que está em falta. Daí pode-se observar que os matemáticos gregos já conheciam a famosa regra de sinais[2] "menos por menos dá mais" e "menos por mais dá menos" ainda muito utilizadas nos dias de hoje. [9]

Durante a Idade Média, temos *BrahmasphutaSidd'hanta* trabalho de Bramaghupta escrito em 628 d.C, no qual se trabalham o conceito dos inteiros como fortunas (positivos) e débitos (negativos). Também se formaliza o zero (0) como subtração de um número por ele mesmo. Bháskara (1114-1185), ao resolver uma equação quadrática que obtém como resultados 50 e -5, considera este último como "inadequado". Até o século XIX perdura esta noção de "falsas raízes" para os negativos

Stevin(1548-1620), matemático belga, propõe que as raízes negativas de uma equação com variável x são, na verdade, raízes positivas da mesma equação com variável $-x$. Cardano(1501-1576), trabalhando em formas de obter as raízes de uma cúbica, obteve o que chamou de "números fictícios" ou "números falsos" os negativos e suas raízes quadradas.

Hankel(1839-1873), a fim de definir a teoria sobre números Complexos, desvenda (de passagem) as dúvidas sobre os negativos, saindo de modelos concretos e passando para a formalidade.

> Ele afirmava que os números não são descobertos e sim inventados, imaginados. Ou seja, "aqueles que se aventurarem em procurar todas as explicações lógicas na natureza, ou mundo real, jamais conseguirão adquirir maturidade em conceitos matemáticos, que outrora, são definidos para um mundo ideal".[9]

Ao final do séc. XIX surgem teorias para construir formalmente $\mathbb{Z}$ dos inteiros[3]. Uma teoria bastante difundida foi a dos pares numéricos, onde o número negativo é concebido como diferença de dois naturais a, b com $a < b$. Outra ideia é a de estender a ordem preexistente entre os positivos em sentido contrário a estes. Nesta abordagem é introduzida a noção de *oposto*: y é oposto de x se $y + x = 0$. A notação para este oposto $y = -x$. Com isso, $\mathbb{Z} = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ ou } -x \in \mathbb{N}\}$.

Números Racionais $\mathbb{Q} = \left\{ x | x = \dfrac{m}{n} \text{ com } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. As frações são conhecidas desde a antiguidade. Para os Gregos, as frações não eram exatamente números, mas sim relações entre comprimentos de segmentos. Fixando um segmento unitário u, a medida de um segmento AB será a quantidade de vezes (dada em $\mathbb{N}$) que u cabe em AB. Caso não seja uma quantidade inteira, procura-se outro segmento w, menor que u, que caiba n vezes em u e m vezes em AB. Com isso, a medida de w será a fração $\dfrac{1}{n}$, a fração $\dfrac{m}{n}$ é a razão entre os comprimentos de AB e u e estes segmentos são ditos *comensuráveis*[4].
O erro era acreditar que encontrar este segmento w sempre seria possível, ou seja, que quaisquer dois segmentos seriam sempre comensuráveis. A impossibilidade foi constatada ao tentar encontrar uma medida comum para um lado de um quadrado e sua diagonal. A "razão" de uma diagonal de um quadrado para o lado deste mesmo quadrado é $\sqrt{2}$ e não é possível encontrar $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$. Os números que não podem ser escritos como razão são chamados *irracionais*.

Divisão por zero A ideia de divisão de dois números é associada como operação inversa à multiplicação. Ou seja,

$$\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$$

Supondo possível a divisão por 0, vamos tratar de dois casos:

- Numerador nulo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$: Esta é uma das chamadas *indeterminações matemáticas*. Supondo algum $c = \dfrac{0}{0}$, temos que $c \cdot 0 = 0$. Porém, isto vale para qualquer valor c (seja $c \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ...). O valor é indeterminado.

[2]Para mais informações sobre este obstáculo epistemológico e estratégias de ensino, consulte [10]

[3]Inicial de "*zahl*", número em alemão

[4]que admitem uma mesma medida

- Numerador não nulo $\left(\frac{a}{0},\ a \neq 0\right)$: Se fosse possível algum $d = \frac{a}{0}$, necessariamente $d \cdot 0 = a \neq 0$. Porém $d \cdot 0 = 0 \neq a$. Este valor **não existe**.

Números Reais $\mathbb{R}$ A união do conjunto $\mathbb{Q}$ com os números irracionais forma o conjunto $\mathbb{R}$. Pode-se imaginar uma reta,na qual é marcado um ponto de origem O e outro ponto A, distinto da origem. O segmento OA será nossa unidade de medida, sendo a reta OA chamada de *eixo real*. O ponto O define duas semirretas: A que contém o ponto A é dita *positiva*, sendo a outra *negativa*. Por convenção, dizemos que A está à direita de O, tornando positiva a semirreta à direita e negativa a semirreta à esquerda.
Para um ponto X qualquer da reta, fazemos as seguintes considerações:

- Se OA cabe exatamente n vezes em OX, significa que X representa o número $n \in \mathbb{Z}$;
- Se X não representa um inteiro, mas OA e OX são comensuráveis a uma razão $\frac{OX}{OA} = \frac{m}{n}$, então X representa o racional $\frac{m}{n}$;
- Para X não inteiro e OA e OX incomensuráveis, então X representa um número irracional.

Em todos os casos considera-se positivo se X estiver na semirreta positiva e negativo caso contrário. Com isso, a cada ponto de uma reta associamos um, e somente um, número real.

Expressões Decimais Uma *expressão decimal* α é um símbolo da forma

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... são *dígitos*, ou seja $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Estes dígitos são as *casas decimais* e, $\forall n \in \mathbb{N}$ temos uma n^{a} (n-ésima ou enésima) casa decimal. O número a_0 é chamado de parte inteira. Podemos associar a expressão α ao número real correspondente

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \dots$$

Quando a expressão é interrompida na n^{a} casa decimal, dizemos que o número real α tem por aproximação a soma de racionais $\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$. O erro de aproximação que se comete é da ordem de 10^{-n}. Formalmente, o número real é o limite desta sequência de racionais quando n tende a infinito.

Se, a partir de uma certa casa decimal a_n, todas as casas decimais seguintes forem 0, temos uma fração decimal. Por exemplo: $15,879000000\dots = 15 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000} = \frac{15879}{1000}$.

Também se pode obter um racional de uma expressão decimal quando um grupo de casas decimais (ou uma casa decimal) se repita periodicamente, as chamadas *dízimas periódicas*. Comecemos pelo caso mais "intrigante"

$$\alpha = 0,9999999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots$$

Afirmamos $\alpha = 1$, pois (formalmente) este é o limite ao qual esta soma de racionais converge. Tomando as aproximações α_n, temos que $1 - \alpha_n = 10^{-n}$. Para n suficientemente grande, a diferença fica tão pequena quanto quisermos.

Um meio de chegar neste resultado é o que segue: Sendo $x = 0,999\dots$, temos $10x = 9,999\dots$. Subtraindo a primeira da segunda, obtemos $9x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{9} = 1$. Outra forma de compreender (embora não seja uma demonstração correta) é assumir $\frac{1}{3} = 0,333333\dots$ e efetuar o "produto" desta igualdade por 3 em ambos os lados.
Tomando $0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = 1$, obtemos $0,111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{9}$ e, com isso, $0,aaaa\dots = \frac{a}{9}$.

Deste ponto podemos deduzir como obter a forma racional de dízimas periódicas, considerando o raciocínio do exemplos a seguir:

Ex. 1: (apenas com partes periódicas) $0,578578578578\ldots.$ A parte periódica é 578, ou seja, com 3 algarismos. Chamando $x = 0,578578578578\ldots$, obtemos $1000x = 578,578578578\ldots$ (para períodos de n dígitos, multiplicamos x por 10^n). Subtraindo a primeira da segunda, obtemos $999x = 578 \therefore x = \dfrac{578}{999}$.

Ex. 2: (com partes periódicas precedidas de uma parte não periódica) $7,52689689689689\ldots.$ Temos $7,52$ não periódico e 689 periódico. Tomamos $x = 7,52689689689689\ldots$ e usamos $100x = 752,689689689689\ldots$ (1) e $100000x = 752689,689689689\ldots$ (2). Subtraindo (2)$-$(1), obtemos $99900x = 751937$, ou seja, a parte decimal se cancela (trata-se do mesmo período) e a parte inteira fica $752689 - 725 = 751937$. $\therefore x = \dfrac{751937}{99900}$.

Intervalos são subconjuntos dos números reais, com extremos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Os intervalos poderão ser

- Abertos, se o extremo não pertence ao intervalo
- Fechado, se o extremo pertence ao intervalo.

Exemplos: $A = (2, 5]$ é dito "aberto em 2 e fechado em 5", pois $2 \notin A$ e $5 \in A$.
$B = [0, 1]$ é fechado em 0 e fechado em 1.

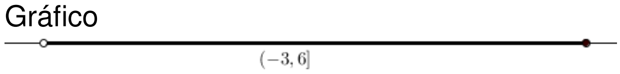
Representação de Intervalos: Intervalos podem ser representados das seguintes formas:

- Notação de Intervalo: com uso de parênteses "( )" ou colchetes "[ ]" respectivamente para abertos ou fechados;
- Notação de Conjunto: com uso de $<$ (ou $>$) e $\leq$ (ou $\geq$) respectivamente para abertos ou fechados;
- Representação Gráfica: com uso de "bola aberta" $\circ$ ou "bola fechada" $\bullet$ respectivamente para abertos ou fechados;

Ex.:

a) Intervalo aberto em -3, fechado em 6:

   - Intervalo $(-3, 6]$
   - Conjunto $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 6\}$
   - Gráfico



b) Intervalo fechado em 1, aberto em 4:

   - Intervalo $[1, 4)$
   - Conjunto $\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 4\}$
   - Gráfico

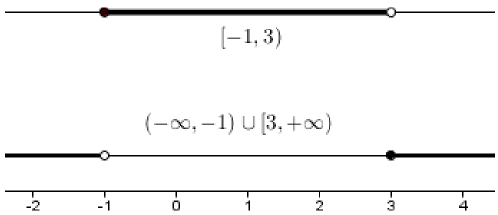
c) Intervalo de $-\infty$, aberto em 4:

   - Intervalo $(-\infty, 4)$
   - Conjunto $\{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$
   - Gráfico

   Sempre que um dos extremos for infinito ($+\infty$ ou $-\infty$), o intervalo será aberto neste extremo.

d) *Intervalos Disjuntos:* Como são conjuntos, tomamos a união ($\cup$) de cada intervalo. Por exemplo, Sendo $A = [-1, 3)$, representar A^C;

- Intervalo $(-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$
- Conjunto $\{x \in \mathbb{R} | x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x\}$
- Gráfico



Curiosidade: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Importante: Nunca diga que $(2, 5] = \{3, 4, 5\} = [3, 5]$. As duas igualdades são FALSAS, pois intervalos são subconjuntos dos números reais!!!

Referências

[1] Portal São Francisco. **Sistema de Numeração Egípcia**. Disponível em <http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/sistema-de-numeracao-egipcia/sistema-de-numeracao-egipcia.php>

[2] Mundo Educação. **Sistema de Numeração Babilônico**. Disponível em <http://www.mundoeducacao.com/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm>

[3] **Sistema de Numeração.** Disponível em <http://brainly.com.br/tarefa/45055>

[4] **Sistema de Numeração Maia**. Disponível em <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=688\&evento=5>

[5] Mundo Educação. **Numeração Chinesa**. Disponível em <http://www.mundoeducacao.com/matematica/numeracao-chinesa.htm>

[6] FARIAS, G., MEDEIROS, E.S. **Introdução à Computação**. Disponível em <http://producao.virtual.ufpb.br/books/camyle/introducao-a-computacao-livro/livro/livro.chunked/ch03s01.html>

[7] LIMA, E.L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio**, Vol 1, 9ª ed. Rio: SBM, 2006.

[8] GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR, J.R.; BONJORNO, J.R. **Matemática Fundamental: Uma nova abordagem** 2ª ed. São Paulo: FTD,2011

[9] SÁ,P.F.; ANJOS, L.J.S. **Números Negativos: Uma trajetória histórica** *In: Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática*, Aracaju: SBM e UFS, 2011. Disponível em <http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Sá_P_F_Números_Negativos_Uma_Trajetória_Histórica.pdf>

[10] ROSA, C.E.G.; FIGUEIREDO, C.G.M.; LISBOA, M.L.C. **Produto de Números Negativos: Estratégias para tratar um obstáculo epistemológico.** Dissertação de Mestrado (PROFMAT/UFPR) 2013. Disponível em <http://people.ufpr.br/~cegalvao/Dissertacao_Deposito(3autores).pdf>