Números e Frações

JCE048 \ JCE023

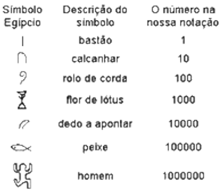
Prof.º Carlos Galvão

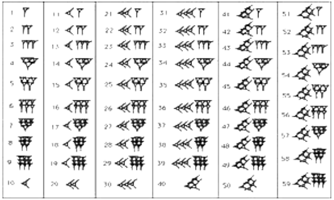
Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Números Naturais

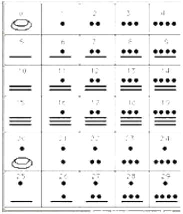
Conjuntos Numéricos

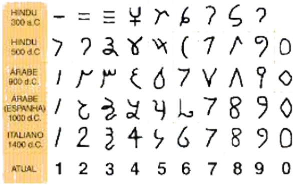
Números Naturais





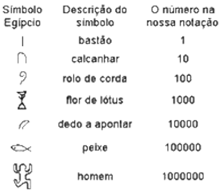
Letras	Valores
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000



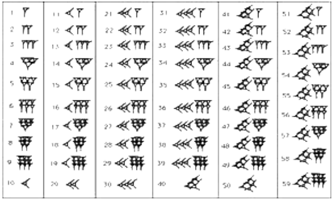


Conjuntos Numéricos

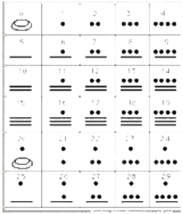
Números Naturais

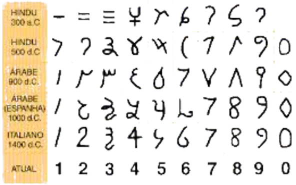


Símbolo Egípcio	Descrição do símbolo	O número na nossa notação
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo a apontar	10000
	peixe	100000
	homem	1000000



Letras	Valores
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

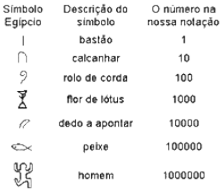


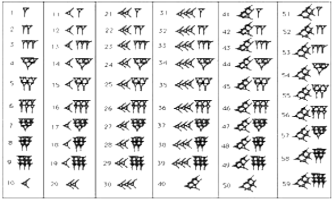


$0 \in \mathbb{N}$??? Depende!

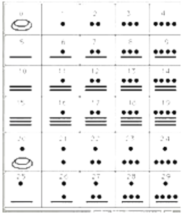
Conjuntos Numéricos

Números Naturais





Letras	Valores
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

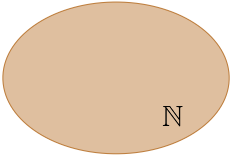


$$0 \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Conjuntos Numéricos

Números Naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$



Números Inteiros

- Chineses: Unidades não independentes.

- Chineses: Unidades não independentes.
- Grécia Antiga: Medidas. Não faz sentido.

Conjuntos Numéricos

Números Inteiros

- Chineses: Unidades não independentes.
- Grécia Antiga: Medidas. Não faz sentido.
- Idade Média (Índia): Bramaghupta. Fortunas e Débitos. Formalização do Zero.

Conjuntos Numéricos

Números Inteiros

- Chineses: Unidades não independentes.
- Grécia Antiga: Medidas. Não faz sentido.
- Idade Média (Índia): Bramaghupta. Fortunas e Débitos. Formalização do Zero.
- Idade Média (Índia): Bháskara. Falsas raízes.

- Chineses: Unidades não independentes.
- Grécia Antiga: Medidas. Não faz sentido.
- Idade Média (Índia): Bramaghupta. Fortunas e Débitos. Formalização do Zero.
- Idade Média (Índia): Bháskara. Falsas raízes.
- Séc. XVI: Stevin (Belga). Raiz de "$-x$".

Conjuntos Numéricos

Números Inteiros

- Chineses: Unidades não independentes.
- Grécia Antiga: Medidas. Não faz sentido.
- Idade Média (Índia): Bramaghupta. Fortunas e Débitos. Formalização do Zero.
- Idade Média (Índia): Bháskara. Falsas raízes.
- Séc. XVI: Stevin (Belga). Raiz de "$-x$".
- Séc. XVI: Cardano (Italiano). Números fictícios.

Conjuntos Numéricos

Números Inteiros

- Chineses: Unidades não independentes.
- Grécia Antiga: Medidas. Não faz sentido.
- Idade Média (Índia): Bramaghupta. Fortunas e Débitos. Formalização do Zero.
- Idade Média (Índia): Bháskara. Falsas raízes.
- Séc. XVI: Stevin (Belga). Raiz de "$-x$".
- Séc. XVI: Cardano (Italiano). Números fictícios.
- Séc. XIX: Hermann Hankel (alemão). Números complexos.

Conjuntos Numéricos

Números Inteiros

- Chineses: Unidades não independentes.
- Grécia Antiga: Medidas. Não faz sentido.
- Idade Média (Índia): Bramaghupta. Fortunas e Débitos. Formalização do Zero.
- Idade Média (Índia): Bháskara. Falsas raízes.
- Séc. XVI: Stevin (Belga). Raiz de "$-x$".
- Séc. XVI: Cardano (Italiano). Números fictícios.
- Séc. XIX: Hermann Hankel (alemão). Números complexos.

Formalizações

Pares Numéricos: Diferença entre dois positivos $b - a$ com $a > b$.

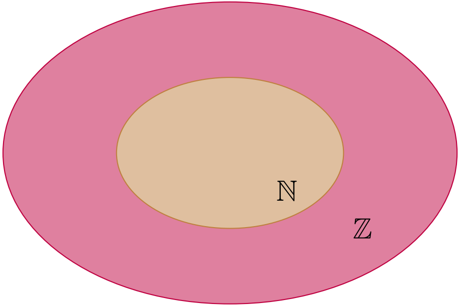
- Chineses: Unidades não independentes.
- Grécia Antiga: Medidas. Não faz sentido.
- Idade Média (Índia): Bramaghupta. Fortunas e Débitos. Formalização do Zero.
- Idade Média (Índia): Bháskara. Falsas raízes.
- Séc. XVI: Stevin (Belga). Raiz de "$-x$".
- Séc. XVI: Cardano (Italiano). Números fictícios.
- Séc. XIX: Hermann Hankel (alemão). Números complexos.

Formalizações

Pares Numéricos: Diferença entre dois positivos $b - a$ com $a > b$.

Oposto: y é *oposto* a $x \implies x + y = 0$. Notação $y = -x$.

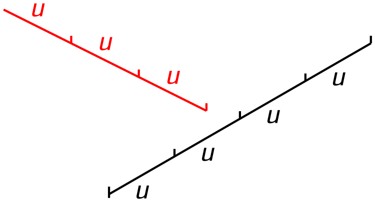
$$\mathbb{Z} = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ ou } -x \in \mathbb{N}\} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$



Números Racionais

- Grécia Antiga: Medidas. Razão entre segmentos. Comensuráveis.

- Grécia Antiga: Medidas. Razão entre segmentos. Comensuráveis.



- Grécia Antiga: Medidas. Razão entre segmentos. Comensuráveis.
- Crise. Diagonal do Quadrado. Irracionais.

- Grécia Antiga: Medidas. Razão entre segmentos. Comensuráveis.
- Crise. Diagonal do Quadrado. Irracionais.

Divisão Por Zero

$$\frac{a}{b} = c \implies b \cdot c = a$$

- Grécia Antiga: Medidas. Razão entre segmentos. Comensuráveis.
- Crise. Diagonal do Quadrado. Irracionais.

Divisão Por Zero

$$\frac{a}{b} = c \implies b \cdot c = a$$

Numerador nulo: $\dfrac{0}{0} = c \implies 0 \cdot c = 0$. Vale para qualquer c. Indeterminação.

- Grécia Antiga: Medidas. Razão entre segmentos. Comensuráveis.
- Crise. Diagonal do Quadrado. Irracionais.

Divisão Por Zero

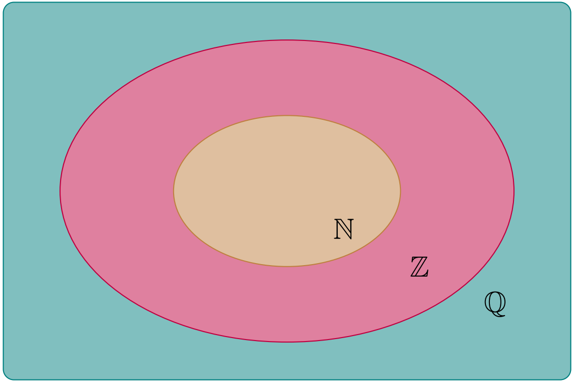
$$\frac{a}{b} = c \implies b \cdot c = a$$

Numerador não nulo: $\dfrac{1}{0} = c \implies 0 \cdot c = 1$. Não existe c.

Conjuntos Numéricos

Números Racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$



Lema:

Se x é múltiplo de k, x^2 também é.

Dem.: Para qualquer valor x podemos escrever $x = dk + r$, com d resultado da divisão e $0 \leq r < k$ resto. x é múltiplo de k se $r = 0$. Assim, $x^2 = d^2k^2 = \underbrace{\left(d^2k\right)}_{d'} k \therefore x^2$ é múltiplo de k.

Corolário: *(consequência)* Se x^2 não é múltiplo de k então x também não é. (Contrapositiva)

Lema:

Se x é múltiplo de k, x^2 também é.

Dem.: Para qualquer valor x podemos escrever $x = dk + r$, com d resultado da divisão e $0 \leq r < k$ resto. x é múltiplo de k se $r = 0$. Assim, $x^2 = d^2k^2 = \underbrace{\left(d^2k\right)}_{d'} k \therefore x^2$ é múltiplo de k.

Corolário: *(consequência)* Se x^2 não é múltiplo de k então x também não é. (Contrapositiva)

Recíproca : Se x^2 é múltiplo de k, então x também é. **Falsa!** Para $x = 12$ e $k = 9$, temos $x^2 = 144 = 16 \cdot 9$, múltiplo, e $x = 12 = 1 \cdot 9 + 3$, não múltiplo!

Isso ocorre porque algum dos fatores primos de r, ao ser elevado ao quadrado, passa a ser múltiplo de k, com k e r tendo algum divisor comum diferente de 1. Uma forma de garantir que isso não ocorra é se k for primo!

Lema:

Se x é múltiplo de k, x^2 também é.

Dem.: Para qualquer valor x podemos escrever $x = dk + r$, com d resultado da divisão e $0 \leq r < k$ resto. x é múltiplo de k se $r = 0$. Assim, $x^2 = d^2k^2 = \underbrace{\left(d^2k\right)}_{d'} k \therefore x^2$ é múltiplo de k.

Corolário: *(consequência)* Se x^2 não é múltiplo de k então x também não é. (Contrapositiva)

Recíproca (melhorada): Se k é primo e x^2 é múltiplo de k, então x também é.

Dem.: Temos k primo, $x^2 = dk$ para algum d. Supondo que x não seja múltiplo de k, existe um d_1 tal que $x = d_1k + r$. Assim, $x^2 = (d_1k + r)^2 = d_1^2k^2 + 2d_1kr + r^2 = \left(\underbrace{d_1^2k + 2d_1r}_{d'}\right) k + r^2$.

Assim, $x^2 = (d_1k + r)^2 = d_1^2k^2 + 2d_1kr + r^2 = \Bigg(\underbrace{d_1^2k + 2d_1r}_{d'}\Bigg)k + r^2.$

Mas, como $x^2 = dk$ temos

$$\begin{cases} d' = d & \text{e, com isso, } r^2 = 0 \implies r = 0 \therefore x \text{ é múltiplo.} \\ d' \neq d & \text{e, com isso, } r^2 \text{ é múltiplo de } k. \end{cases}$$

Assim, $x^2 = (d_1 k + r)^2 = d_1^2 k^2 + 2 d_1 k r + r^2 = \left(\underbrace{d_1^2 k + 2 d_1 r}_{d'}\right) k + r^2.$

Mas, como $x^2 = dk$ temos

$$\begin{cases} d' = d & \text{e, com isso, } r^2 = 0 \implies r = 0 \therefore x \text{ é múltiplo.} \\ d' \neq d & \text{e, com isso, } r^2 \text{ é múltiplo de } k. \end{cases}$$

Este último caso é impossível pelo fato de k ser primo e $\text{mdc}\,(k, r) = 1$, $\forall r$ que seja $0 < r < k$.

Assim, $x^2 = (d_1 k + r)^2 = d_1^2 k^2 + 2 d_1 k r + r^2 = \Big(\underbrace{d_1^2 k + 2 d_1 r}_{d'}\Big) k + r^2.$

Mas, como $x^2 = dk$ temos

$$\begin{cases} d' = d & \text{e, com isso, } r^2 = 0 \implies r = 0 \therefore x \text{ é múltiplo.} \\ d' \neq d & \text{e, com isso, } r^2 \text{ é múltiplo de } k. \end{cases}$$

Este último caso é impossível pelo fato de k ser primo e $\mathrm{mdc}\,(k, r) = 1$, $\forall r$ que seja $0 < r < k$.

Portanto

Para k primo, x é múltiplo de k **se, e somente se** x^2 também for múltiplo de k

Suponha $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, $\exists m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

Suponha $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, $\exists m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*$ tais que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

- Podemos considerar também que m e n *não tem fator comum* pois se tivesse (exemplo $m' = km,\ n' = kn$) este poderia ser simplificado $\dfrac{m'}{n'} = \dfrac{\cancel{k}m}{\cancel{k}n} = \dfrac{m}{n}$.

Suponha $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, $\exists m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

- Podemos considerar também que m e n *não tem fator comum* pois se tivesse (exemplo $m' = km$, $n' = kn$) este poderia ser simplificado $\dfrac{m'}{n'} = \dfrac{\cancel{k}m}{\cancel{k}n} = \dfrac{m}{n}$.
- $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \implies m = n\sqrt{2} \implies m^2 = 2n^2$. Com isso, m^2 é múltiplo de 2 e, pelo resultado anterior (2 é primo), m é múltiplo de 2. Podemos escrever $m = 2d$ para algum d e, assim, $m^2 = 4d^2$.

Suponha $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, $\exists m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

- Podemos considerar também que m e n *não tem fator comum* pois se tivesse (exemplo $m' = km$, $n' = kn$) este poderia ser simplificado $\dfrac{m'}{n'} = \dfrac{\cancel{k}m}{\cancel{k}n} = \dfrac{m}{n}$.
- $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \implies m = n\sqrt{2} \implies m^2 = 2n^2$. Com isso, m^2 é múltiplo de 2 e, pelo resultado anterior (2 é primo), m é múltiplo de 2. Podemos escrever $m = 2d$ para algum d e, assim, $m^2 = 4d^2$.
- Voltando à $m^2 = 2n^2$, temos $4d^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2d^2$. Novamente, n^2 é múltiplo de 2 e, pelo resultado anterior, n é múltiplo de 2.

Conjuntos Numéricos

Números Racionais - Por que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$??

Suponha $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, $\exists m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

- Podemos considerar também que m e n *não tem fator comum* pois se tivesse (exemplo $m' = km$, $n' = kn$) este poderia ser simplificado $\dfrac{m'}{n'} = \dfrac{\cancel{k}m}{\cancel{k}n} = \dfrac{m}{n}$.
- $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \implies m = n\sqrt{2} \implies m^2 = 2n^2$. Com isso, m^2 é múltiplo de 2 e, pelo resultado anterior (2 é primo), m é múltiplo de 2. Podemos escrever $m = 2d$ para algum d e, assim, $m^2 = 4d^2$.
- Voltando à $m^2 = 2n^2$, temos $4d^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2d^2$. Novamente, n^2 é múltiplo de 2 e, pelo resultado anterior, n é múltiplo de 2.
- Mas isso contraria nossa suposição inicial de que m e n não tem fatores comuns. Se $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, então m e n são números que podem ser indefinidamente simplificados, o que é absurdo.

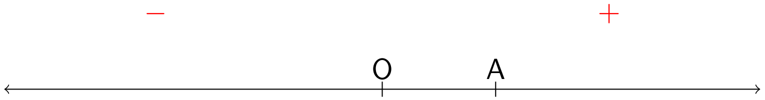
Suponha $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, $\exists m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

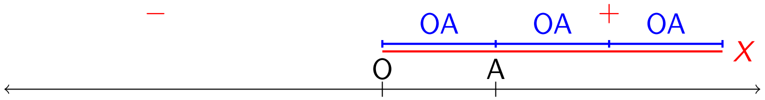
- Podemos considerar também que m e n *não tem fator comum* pois se tivesse (exemplo $m' = km$, $n' = kn$) este poderia ser simplificado $\dfrac{m'}{n'} = \dfrac{\cancel{k}m}{\cancel{k}n} = \dfrac{m}{n}$.
- $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \implies m = n\sqrt{2} \implies m^2 = 2n^2$. Com isso, m^2 é múltiplo de 2 e, pelo resultado anterior (2 é primo), m é múltiplo de 2. Podemos escrever $m = 2d$ para algum d e, assim, $m^2 = 4d^2$.
- Voltando à $m^2 = 2n^2$, temos $4d^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2d^2$. Novamente, n^2 é múltiplo de 2 e, pelo resultado anterior, n é múltiplo de 2.
- Mas isso contraria nossa suposição inicial de que m e n não tem fatores comuns. Se $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, então m e n são números que podem ser indefinidamente simplificados, o que é absurdo.
- Como não existem tais valores de m e n, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

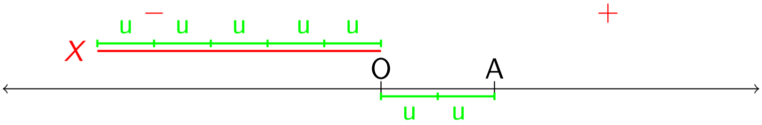
Números Reais

Conjuntos Numéricos

Números Reais




−
+
OA
OA
OA
X
O
A


u
−
u
u
u
u
X
O
A
+
u
u

Expressões Decimais

$$\alpha = a_0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n \ldots \qquad \underbrace{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}_{\text{dígitos}}$$

Fração Decimal: $15{,}8790000\ldots = 15 + \dfrac{8}{10} + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{9}{10^3}$

Dízimas Periódicas: $0{,}597859785978\ldots = 0{,}\overline{5978}$

$$\alpha = 0{,}597859785978\ldots \implies 10000\alpha = 5978{,}59785978\ldots$$

$$\begin{array}{rr} 10000\alpha & 5978{,}59785978\ldots \\ -\alpha & -0{,}59785978\ldots \\ \hline 9999\alpha & = 5978 \end{array} \implies \alpha = \frac{5978}{9999}$$

Intervalos

Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Fechado

Quando os extremos pertencem ao intervalo

Aberto

Quando os extremos não pertencem ao intervalo

Notação

Notação de Intervalo: Colchetes $[a, b]$

Notação de Conjunto: $\leq$ ou $\geq$

Representação Gráfica: Bola Fechada $\bullet$

Ex: $[-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 1\}$

Notação de Intervalo: Parênteses (a, b)

Notação de Conjunto: $<$ ou $>$

Representação Gráfica: Bola Aberta $\circ$

Ex: $(-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 1\}$

	Intervalo	Conjunto	Gráfico
Intervalo aberto em -3, fechado em 6	$(-3,6]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 6\}$	
Intervalo fechado em 1, aberto em 4:	$[1,4)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$	
Intervalo de $-\infty$, aberto em 4:	$(-\infty,4)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$	

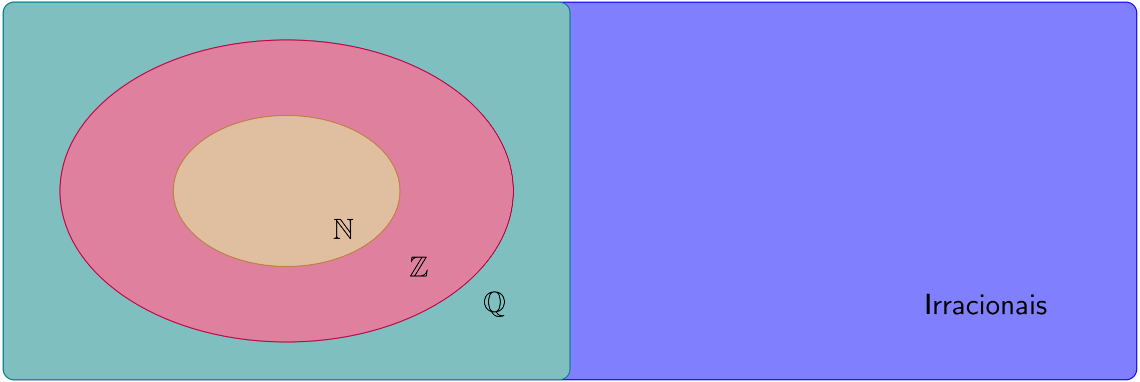
Sempre que um dos extremos for infinito ($+\infty$ ou $-\infty$), o intervalo será aberto neste extremo.
Curiosidade: $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Importante: Nunca diga que $(2,5] = \{3,4,5\} = [3,5]$.
As duas igualdades são **FALSAS**, pois intervalos são subconjuntos dos números reais!!!

Conjuntos Numéricos

Números Reais

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q} \cup \text{Irracionais} = \mathbb{R}$$



Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a + b$ e $a \cdot b$ (ou ab) são únicos.

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a+b$ e $a \cdot b$ (ou ab) são únicos.

Comutatividade $a+b=b+a$ e $ab=ba$

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a+b$ e $a \cdot b$ (ou ab) são únicos.

Associatividade $a+(b+c)=(a+b)+c$ e
$a(bc)=(ab)c$

Comutatividade $a+b=b+a$ e $ab=ba$

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a+b$ e $a \cdot b$ (ou ab) são únicos.

Associatividade $a+(b+c) = (a+b)+c$ e
$a(bc) = (ab)c$

Comutatividade $a+b = b+a$ e $ab = ba$

Distributivas $a(b+c) = ab+ac$ e
$(a+b)c = ac+bc$

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a+b$ e $a\cdot b$ (ou ab) são únicos.

Associatividade $a+(b+c)=(a+b)+c$ e $a(bc)=(ab)c$

Comutatividade $a+b=b+a$ e $ab=ba$

Distributivas $a(b+c)=ab+ac$ e $(a+b)c=ac+bc$

Identidades Há um único s tal que $a+s=a, \forall a\,(s=0)$ e um único p tal que $ap=a, \forall a\,(p=1)$

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a+b$ e $a \cdot b$ (ou ab) são únicos.

Comutatividade $a+b=b+a$ e $ab=ba$

Associatividade $a+(b+c)=(a+b)+c$ e
$a(bc)=(ab)c$

Distributivas $a(b+c)=ab+ac$ e
$(a+b)c=ac+bc$

Identidades Há um único s tal que $a+s=a, \forall a\,(s=0)$ e um único p tal que $ap=a, \forall a\,(p=1)$

Inversos Para cada a, há um único b tal que $a+b=0$. $b=-a$ inverso aditivo, oposto

Para cada a, há um único b tal que $a \cdot b=1$. $b=\dfrac{1}{a}=a^{-1}$ inverso multiplicativo, inverso

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a+b$ e $a \cdot b$ (ou ab) são únicos.

Comutatividade $a+b=b+a$ e $ab=ba$

Associatividade $a+(b+c)=(a+b)+c$ e
$a(bc)=(ab)c$

Distributivas $a(b+c)=ab+ac$ e
$(a+b)c=ac+bc$

Identidades Há um único s tal que $a+s=a, \forall a\,(s=0)$ e um único p tal que $ap=a, \forall a\,(p=1)$

Inversos Para cada a, há um único b tal que $a+b=0$. $b=-a$ inverso aditivo, oposto

Para cada a, há um único b tal que $a \cdot b = 1$. $b=\dfrac{1}{a}=a^{-1}$ inverso multiplicativo, inverso

Fator Zero $a \cdot 0 = 0$, $\forall a$ e se $ab=0$ então $a=0$ ou $b=0$

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a+b$ e $a \cdot b$ (ou ab) são únicos.

Comutatividade $a+b=b+a$ e $ab=ba$

Associatividade $a+(b+c)=(a+b)+c$ e
$a(bc)=(ab)c$

Distributivas $a(b+c)=ab+ac$ e
$(a+b)c=ac+bc$

Identidades Há um único s tal que $a+s=a, \forall a\,(s=0)$ e um único p tal que $ap=a, \forall a\,(p=1)$

Inversos Para cada a, há um único b tal que $a+b=0$. $b=-a$ inverso aditivo, oposto

Para cada a, há um único b tal que $a \cdot b=1$. $b=\dfrac{1}{a}=a^{-1}$ inverso multiplicativo, inverso

Fator Zero $a \cdot 0=0, \forall a$ e se $ab=0$ então $a=0$ ou $b=0$

Consequências:

Cancelamento: $x+z=y+z \implies x=y$. $xw=yw \implies x=y$ se $w \neq 0$

Axiomas para números reais

Existem duas operações: **adição** $+$ e **produto** $\cdot$

Fechamento $a+b$ e $a\cdot b$ (ou ab) são únicos.

Comutatividade $a+b=b+a$ e $ab=ba$

Associatividade $a+(b+c)=(a+b)+c$ e
$a(bc)=(ab)c$

Distributivas $a(b+c)=ab+ac$ e
$(a+b)c=ac+bc$

Identidades Há um único s tal que $a+s=a, \forall a\,(s=0)$ e um único p tal que $ap=a, \forall a\,(p=1)$

Inversos Para cada a, há um único b tal que $a+b=0$. $b=-a$ inverso aditivo, oposto

Para cada a, há um único b tal que $a\cdot b=1$. $b=\dfrac{1}{a}=a^{-1}$ inverso multiplicativo, inverso

Fator Zero $a\cdot 0=0, \forall a$ e se $ab=0$ então $a=0$ ou $b=0$

Consequências:

Cancelamento: $x+z=y+z \implies x=y$. $xw=yw \implies x=y$ se $w\neq 0$

Quocientes: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \iff ad=bc$ $\qquad \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\,d+b\,c}{b\,d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$

Propriedades de Ordem

Sendo $\mathbb{R}^+$ o conjunto de reais positivos, temos

- Se $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$ então $a + b \in \mathbb{R}^+$ e $ab \in \mathbb{R}^+$.

Propriedades de Ordem

Sendo $\mathbb{R}^+$ o conjunto de reais positivos, temos

- Se $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$ então $a + b \in \mathbb{R}^+$ e $ab \in \mathbb{R}^+$.
- Para cada número real a apenas uma afirmação é possível

$a \in \mathbb{R}^+$ (positivo) $\qquad a = 0 \qquad -a \in \mathbb{R}^+$ (negativo)

Propriedades de Ordem

Sendo $\mathbb{R}^+$ o conjunto de reais positivos, temos

- Se $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$ então $a + b \in \mathbb{R}^+$ e $ab \in \mathbb{R}^+$.
- Para cada número real a apenas uma afirmação é possível

$a \in \mathbb{R}^+$ (positivo) $\qquad a = 0 \qquad -a \in \mathbb{R}^+$ (negativo)

$a < b$ (a menor que b) se $b - a \in \mathbb{R}^+$
$a \leq b$ se $a < b$ ou $a = b$
(a menor que ou igual a b)

$a > b$ (a maior que b) se $a - b \in \mathbb{R}^+$
$a \geq b$ se $a > b$ ou $a = b$
(a maior que ou igual a b)

Propriedades de Ordem

Consequências das propriedades:

- $a > 0$ se, e somente se, a é positivo.

Propriedades de Ordem

Consequências das propriedades:

- $a > 0$ se, e somente se, a é positivo.
- Se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$.

Propriedades de Ordem

Consequências das propriedades:

- $a > 0$ se, e somente se, a é positivo.
- Se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$.
- Se $a < b$ então $a + c < b + c$.

Propriedades de Ordem

Consequências das propriedades:

- $a > 0$ se, e somente se, a é positivo.
- Se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$.
- Se $a < b$ então $a + c < b + c$.
- Se $a < b$ então $\begin{cases} ac < bc, & \text{se } c > 0 \\ ac > bc, & \text{se } c < 0 \end{cases}.$

Propriedades de Ordem

Consequências das propriedades:

- $a > 0$ se, e somente se, a é positivo.
- Se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$.
- Se $a < b$ então $a + c < b + c$.
- Se $a < b$ então $\begin{cases} ac < bc, & \text{se } c > 0 \\ ac > bc, & \text{se } c < 0 \end{cases}$.
- Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$ (transitividade)

Propriedades de Ordem

Consequências das propriedades:

- $a > 0$ se, e somente se, a é positivo.
- Se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$.
- Se $a < b$ então $a + c < b + c$.
- Se $a < b$ então $\begin{cases} ac < bc, & \text{se } c > 0 \\ ac > bc, & \text{se } c < 0 \end{cases}$.
- Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$ (transitividade)
- Se $0 < a < b$ então $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

Até a próxima!!!