Polinômios

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definições

Definições

Termo: Expressão matemática com os seguintes itens:

- Coeficiente: Valor numérico a
- Variáveis: $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$
- Expoentes de variáveis: $m_1,\ m_2, \ldots, m_n$

$$\text{Termo:} \quad a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

Definições

Termo: Expressão matemática com os seguintes itens:

- Coeficiente: Valor numérico a
- Variáveis: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Expoentes de variáveis: $m_1, m_2, \ldots, m_n$

$$\text{Termo:} \quad ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$$

Monômio: Expressão de apenas um termo. Ex.: $2x^2$, -5, $\sqrt{3}y^3, \ldots$

Definições

Termo: Expressão matemática com os seguintes itens:

- Coeficiente: Valor numérico a
- Variáveis: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Expoentes de variáveis: $m_1, m_2, \ldots, m_n$

$$\text{Termo:} \quad a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

Monômio: Expressão de apenas um termo. Ex.: $2x^2$, -5, $\sqrt{3}y^3, \ldots$

Binômio: Expressão de soma de dois termos. Ex.: $3x + 5y$, $a^2 + b^2$, $x - 5, \ldots$

Definições

Termo: Expressão matemática com os seguintes itens:

- Coeficiente: Valor numérico a
- Variáveis: $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Expoentes de variáveis: $m_1, m_2, \dots, m_n$

$$\text{Termo:} \quad a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

Monômio: Expressão de apenas um termo. Ex.: $2x^2$, -5, $\sqrt{3}y^3, \dots$

Binômio: Expressão de soma de dois termos. Ex.: $3x + 5y$, $a^2 + b^2$, $x - 5, \dots$

Trinômio: Expressão de soma de três termos. Ex.: $ax^2 + bx + c$, $x^2 - 6x + 9$, $y^4 - 4x^2 + 3xy, \dots$

Definições

Termo: Expressão matemática com os seguintes itens:

- Coeficiente: Valor numérico a
- Variáveis: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Expoentes de variáveis: $m_1, m_2, \ldots, m_n$

$$\text{Termo:} \quad a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

Monômio: Expressão de apenas um termo. Ex.: $2x^2$, -5, $\sqrt{3}y^3, \ldots$

Binômio: Expressão de soma de dois termos. Ex.: $3x + 5y$, $a^2 + b^2$, $x - 5, \ldots$

Trinômio: Expressão de soma de três termos. Ex.: $ax^2 + bx + c$, $x^2 - 6x + 9$, $y^4 - 4x^2 + 3xy, \ldots$

Polinômio: Expressão de soma com mais de três termos. Genericamente, monômio, binômio e trinômio são considerados casos particulares de polinômios.

Definições

Termo: Expressão matemática com os seguintes itens:

- Coeficiente: Valor numérico a
- Variáveis: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Expoentes de variáveis: $m_1, m_2, \ldots, m_n$

$$\text{Termo:} \quad a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

Monômio: Expressão de apenas um termo. Ex.: $2x^2$, -5, $\sqrt{3}y^3, \ldots$

Binômio: Expressão de soma de dois termos. Ex.: $3x + 5y$, $a^2 + b^2$, $x - 5, \ldots$

Trinômio: Expressão de soma de três termos. Ex.: $ax^2 + bx + c$, $x^2 - 6x + 9$, $y^4 - 4x^2 + 3xy, \ldots$

Polinômio: Expressão de soma com mais de três termos. Genericamente, monômio, binômio e trinômio são considerados casos particulares de polinômios.

Polinômio Identicamente Nulo: Polinômio em que todos os coeficientes são 0.

Grau e Forma Padrão

Grau de um termo: Casos possíveis

- Não havendo variável, o grau do termo é 0. Ex: π, 5, $-\sqrt{7}$.
- Havendo uma variável, o grau é o expoente da variável. Ex: $3x^5$ tem grau 5.
- Havendo mais de uma variável, o grau do termo é a soma dos expoentes.

Ex: $-2xy^3$ tem grau 4.

Grau e Forma Padrão

Grau de um termo: Casos possíveis

- Não havendo variável, o grau do termo é 0. Ex: π, 5, $-\sqrt{7}$.
- Havendo uma variável, o grau é o expoente da variável. Ex: $3x^5$ tem grau 5.
- Havendo mais de uma variável, o grau do termo é a soma dos expoentes.

Ex: $-2xy^3$ tem grau 4.

Grau de um polinômio: O grau de um polinômio é o maior grau de seus termos.

(a) $x^4 + 3x^2 - 250$ tem grau 4;
(b) $x^3y^2 - 30x^4$ tem grau 5;
(c) $x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$ tem grau 3.
(d) 16 tem grau 0;

O polinômio identicamente nulo tem, por definição, grau *menos infinito*.

Grau e Forma Padrão

Grau de um termo: Casos possíveis

- Não havendo variável, o grau do termo é 0. Ex: π, 5, $-\sqrt{7}$.
- Havendo uma variável, o grau é o expoente da variável. Ex: $3x^5$ tem grau 5.
- Havendo mais de uma variável, o grau do termo é a soma dos expoentes.

Ex: $-2xy^3$ tem grau 4.

Grau de um polinômio: O grau de um polinômio é o maior grau de seus termos.

(a) $x^4 + 3x^2 - 250$ tem grau 4;

(b) $x^3y^2 - 30x^4$ tem grau 5;

(c) $x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$ tem grau 3.

(d) 16 tem grau 0;

O polinômio identicamente nulo tem, por definição, grau *menos infinito*.

Forma Padrão: Um polinômio de grau n e uma variável x tem como forma padrão de escrita com os termos em ordem decrescente dos graus: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0$

Grau e Forma Padrão

Grau de um termo: Casos possíveis

- Não havendo variável, o grau do termo é 0. Ex: π, 5, $-\sqrt{7}$.
- Havendo uma variável, o grau é o expoente da variável. Ex: $3x^5$ tem grau 5.
- Havendo mais de uma variável, o grau do termo é a soma dos expoentes.

Ex: $-2xy^3$ tem grau 4.

Grau de um polinômio: O grau de um polinômio é o maior grau de seus termos.

(a) $x^4 + 3x^2 - 250$ tem grau 4;

(b) $x^3y^2 - 30x^4$ tem grau 5;

(c) $x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$ tem grau 3.

(d) 16 tem grau 0;

O polinômio identicamente nulo tem, por definição, grau *menos infinito*.

Forma Padrão: Um polinômio de grau n e uma variável x tem como forma padrão de escrita com os termos em ordem decrescente dos graus: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0$

Igualdade de Polinômios: Dois polinômios são iguais se os coeficientes dos termos de mesmo grau forem iguais. Para $(4-a)x^2 + 5x - 3c = 2x^2 + (b+3)x + 9$ é preciso $a = 2$, $b = 2$ e $c = -3$.

Operações

Adição e Subtração

A **soma** de dois polinômios é feita somando termos que tenham as mesmas variáveis com os mesmos graus. Exemplo: $p(x) = x^5 + 3x^4 - x^2 + 2$ e $q(x) = -2x^4 + x^3 - x - 5$

$$
\begin{array}{rcccccc}
p(x) \to & x^5 & +3x^4 & & -x^2 & & +2 \\
q(x) \to & & -2x^4 & +x^3 & & -x & -5 \\
\hline
p(x) + q(x) \to & x^5 & +x^4 & +x^3 & -x^2 & -x & -3
\end{array}
$$

Adição e Subtração

A **soma** de dois polinômios é feita somando termos que tenham as mesmas variáveis com os mesmos graus. Exemplo: $p(x) = x^5 + 3x^4 - x^2 + 2$ e $q(x) = -2x^4 + x^3 - x - 5$

$$\begin{array}{rcccccc}
p(x) \rightarrow & x^5 & +3x^4 & & -x^2 & & +2 \\
q(x) \rightarrow & & -2x^4 & +x^3 & & -x & -5 \\
\hline
p(x) + q(x) \rightarrow & x^5 & +x^4 & +x^3 & -x^2 & -x & -3
\end{array}$$

A **diferença** entre de dois polinômios $p(x) - q(x)$ é a soma de $p(x) + (-q(x))$, sendo $-q(x)$ obtido trocando todos os sinais. Com os mesmos polinômios do exemplo anterior

$$\begin{array}{rcccccc}
p(x) \rightarrow & x^5 & +3x^4 & & -x^2 & & +2 \\
-q(x) \rightarrow & & 2x^4 & -x^3 & & +x & +5 \\
\hline
p(x) - q(x) \rightarrow & x^5 & +5x^4 & -x^3 & -x^2 & +x & +7
\end{array}$$

Multiplicação

O **produto** de polinômios é feito usando a propriedade distributiva.

Ex. 1: Multiplicando $x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2)$.

$$\begin{aligned} x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2) &= x^3 \cdot 3x^4 - x^3 \cdot 5x^2 + x^3 \cdot 7x + x^3 \cdot 2 \\ &= 3x^7 - 5x^5 + 7x^4 + 2x^3 \end{aligned}$$

Multiplicação

O **produto** de polinômios é feito usando a propriedade distributiva.

Ex. 1: Multiplicando $x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2)$.

$$x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2) = x^3 \cdot 3x^4 - x^3 \cdot 5x^2 + x^3 \cdot 7x + x^3 \cdot 2$$
$$= 3x^7 - 5x^5 + 7x^4 + 2x^3$$

Ex. 2: Multiplicando $(x + 2y)(x^3 - 3x^2y + xy^2)$.

$$(x + 2y)(x^3 - 3x^2y + xy^2) = x(x^3 - 3x^2y + xy^2) + 2y(x^3 - 3x^2y + xy^2)$$

Multiplicação

O **produto** de polinômios é feito usando a propriedade distributiva.

Ex. 1: Multiplicando $x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2)$.

$$\begin{aligned} x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2) &= x^3 \cdot 3x^4 - x^3 \cdot 5x^2 + x^3 \cdot 7x + x^3 \cdot 2 \\ &= 3x^7 - 5x^5 + 7x^4 + 2x^3 \end{aligned}$$

Ex. 2: Multiplicando $(x + 2y)(x^3 - 3x^2y + xy^2)$.

$$\begin{aligned} (x + 2y)(x^3 - 3x^2y + xy^2) &= x(x^3 - 3x^2y + xy^2) + 2y(x^3 - 3x^2y + xy^2) \\ &= x^4 - 3x^3y + x^2y^2 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3 \end{aligned}$$

Multiplicação

O **produto** de polinômios é feito usando a propriedade distributiva.

Ex. 1: Multiplicando $x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2)$.

$$\begin{aligned} x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2) &= x^3 \cdot 3x^4 - x^3 \cdot 5x^2 + x^3 \cdot 7x + x^3 \cdot 2 \\ &= 3x^7 - 5x^5 + 7x^4 + 2x^3 \end{aligned}$$

Ex. 2: Multiplicando $(x + 2y)(x^3 - 3x^2y + xy^2)$.

$$\begin{aligned} (x+2y)(x^3 - 3x^2y + xy^2) &= x(x^3 - 3x^2y + xy^2) + 2y(x^3 - 3x^2y + xy^2) \\ &= x^4 - 3x^3y + x^2y^2 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3 \\ &= x^4 - x^3y - 5x^2y^2 + 2xy^3 \end{aligned}$$

Multiplicação II

Ex. 2 (forma vertical):

$$
\begin{array}{cccc}
x^3 & -3x^2y & +xy^2 & \\
x & +2y & & \\
\hline
x^4 & -3x^3y & +x^2y^2 & \\
 & 2x^3y & -6x^2y^2 & +2xy^3 \\
\hline
x^4 & -x^3y & -5x^2y^2 & +2xy^3
\end{array}
$$

Produtos Notáveis

$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$	Diferença de dois quadrados

Produtos Notáveis

	$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$	Diferença de dois quadrados
$(a+b)^2$	$= (a+b)(a+b)$	$= a^2 + 2ab + b^2$	Quadrado de uma soma

Produtos Notáveis

	$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$	Diferença de dois quadrados
$(a+b)^2$	$= (a+b)(a+b)$	$= a^2 + 2ab + b^2$	Quadrado de uma soma
$(a-b)^2$	$= (a-b)(a-b)$	$= a^2 - 2ab + b^2$	Quadrado de uma diferença

Produtos Notáveis

	$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$	Diferença de dois quadrados
$(a+b)^2$	$= (a+b)(a+b)$	$= a^2 + 2ab + b^2$	Quadrado de uma soma
$(a-b)^2$	$= (a-b)(a-b)$	$= a^2 - 2ab + b^2$	Quadrado de uma diferença
	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$= a^3 - b^3$	Diferença de dois cubos

Produtos Notáveis

	$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$	Diferença de dois quadrados
$(a+b)^2$	$= (a+b)(a+b)$	$= a^2 + 2ab + b^2$	Quadrado de uma soma
$(a-b)^2$	$= (a-b)(a-b)$	$= a^2 - 2ab + b^2$	Quadrado de uma diferença
	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$= a^3 - b^3$	Diferença de dois cubos
	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$= a^3 + b^3$	Soma de dois cubos

Produtos Notáveis

	$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$	Diferença de dois quadrados
$(a+b)^2$	$= (a+b)(a+b)$	$= a^2 + 2ab + b^2$	Quadrado de uma soma
$(a-b)^2$	$= (a-b)(a-b)$	$= a^2 - 2ab + b^2$	Quadrado de uma diferença
	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$= a^3 - b^3$	Diferença de dois cubos
	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$= a^3 + b^3$	Soma de dois cubos
$(a+b)^3$	$= (a+b)(a+b)^2$	$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$ $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Cubo de uma soma

Produtos Notáveis

	$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$	Diferença de dois quadrados
$(a+b)^2$	$= (a+b)(a+b)$	$= a^2 + 2ab + b^2$	Quadrado de uma soma
$(a-b)^2$	$= (a-b)(a-b)$	$= a^2 - 2ab + b^2$	Quadrado de uma diferença
	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$= a^3 - b^3$	Diferença de dois cubos
	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$= a^3 + b^3$	Soma de dois cubos
$(a+b)^3$	$= (a+b)(a+b)^2$	$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$ $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Cubo de uma soma
$(a-b)^3$	$= (a-b)(a-b)^2$	$= (a-b)(a^2-2ab+b^2)$ $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	Cubo de uma diferença

Fatoração

Inverter o processo de multiplicação

Colocar em evidência fator comum: $3x^5 - 24x^4 + 12x^3 = 3x^3(x^2 - 8x + 4)$

Fatoração

Inverter o processo de multiplicação

Colocar em evidência fator comum: $3x^5 - 24x^4 + 12x^3 = 3x^3(x^2 - 8x + 4)$

Colocar em evidência fator não monomial comum:

$$\begin{aligned}
&12\left(x^2-1\right)^4(3x+1)^3 + 8x\left(x^2-1\right)^3(3x+1)^4\\
&= 4\left(x^2-1\right)^3(3x+1)^3\left[3\left(x^2-1\right) + 2x(3x+1)\right]\\
&= 4\left(x^2-1\right)^3(3x+1)^3\left(9x^2+2x-3\right)
\end{aligned}$$

Fatoração

Inverter o processo de multiplicação

Colocar em evidência fator comum: $3x^5 - 24x^4 + 12x^3 = 3x^3(x^2 - 8x + 4)$

Colocar em evidência fator não monomial comum:

$$\begin{aligned}
&12\left(x^2-1\right)^4(3x+1)^3 + 8x\left(x^2-1\right)^3(3x+1)^4 \\
&= 4\left(x^2-1\right)^3(3x+1)^3\left[3\left(x^2-1\right)+2x(3x+1)\right] \\
&= 4\left(x^2-1\right)^3(3x+1)^3\left(9x^2+2x-3\right)
\end{aligned}$$

Agrupamento: $3x^2 + 4xy - 3xt - 4ty = x(3x+4y) - t(3x+4y) = (3x+4y)(x-t)$

Fatoração

Distributiva dupla

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$
$$acx^2 + (bc+ad)xy + bdy^2 = (ax+by)(cx+dy)$$

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$
$$acx^2 + (bc+ad)xy + bdy^2 = (ax+by)(cx+dy)$$

Exemplos de fatoração:

Ex. 1) $x^2 - 15x + 50$. Precisamos de dois valores com $a + b = -15$ e $ab = 50$: $a = -5$ e $b = -10$. Assim $x^2 - 15x + 50 = (x-5)(x-10)$

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$
$$acx^2 + (bc+ad)xy + bdy^2 = (ax+by)(cx+dy)$$

Exemplos de fatoração:

Ex. 1) $x^2 - 15x + 50$. Precisamos de dois valores com $a + b = -15$ e $ab = 50$: $a = -5$ e $b = -10$. Assim $x^2 - 15x + 50 = (x-5)(x-10)$

Ex. 2) $4x^2 + 11xy + 6y^2$. Procurar dois fatores de $4 \cdot 6 = 24$ que somam 11: 8 e 3.

$$4x^2 + 11xy + 6y^2 = 4x^2 + 8xy + 3xy + 6y^2$$
$$= 4x(x+2y) + 3y(x+2y) = (4x+3y)(x+2y)$$

Formas especiais e Estratégias

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	Diferença de dois quadrados
$a^2 + b^2$ é primo	Soma de dois quadrados
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	Quadrado de uma soma
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	Quadrado de uma diferença
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	Soma de dois cubos
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	Diferença de dois cubos

Estratégia de Fatoração Geral

Passo 1 Coloque em evidência todos os fatores comuns a todos os termos.

Formas especiais e Estratégias

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	Diferença de dois quadrados
$a^2 + b^2$ é primo	Soma de dois quadrados
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	Quadrado de uma soma
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	Quadrado de uma diferença
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	Soma de dois cubos
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	Diferença de dois cubos

Estratégia de Fatoração Geral

Passo 1 Coloque em evidência todos os fatores comuns a todos os termos.

Passo 2
- Se o polinômio remanescente após o passo 1 tem dois termos, procure por uma diferença de dois quadrados ou a soma ou diferença entre dois cubos.

Formas especiais e Estratégias

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	Diferença de dois quadrados
$a^2 + b^2$ é primo	Soma de dois quadrados
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	Quadrado de uma soma
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	Quadrado de uma diferença
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	Soma de dois cubos
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	Diferença de dois cubos

Estratégia de Fatoração Geral

Passo 1 Coloque em evidência todos os fatores comuns a todos os termos.

Passo 2
- Se o polinômio remanescente após o passo 1 tem dois termos, procure por uma diferença de dois quadrados ou a soma ou diferença entre dois cubos.
- Se o polinômio remanescente após o passo 1 tem três termos, procure por um quadrado perfeito ou tente reverter a distributividade dupla.

Formas especiais e Estratégias

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	Diferença de dois quadrados
$a^2 + b^2$ é primo	Soma de dois quadrados
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	Quadrado de uma soma
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	Quadrado de uma diferença
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	Soma de dois cubos
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	Diferença de dois cubos

Estratégia de Fatoração Geral

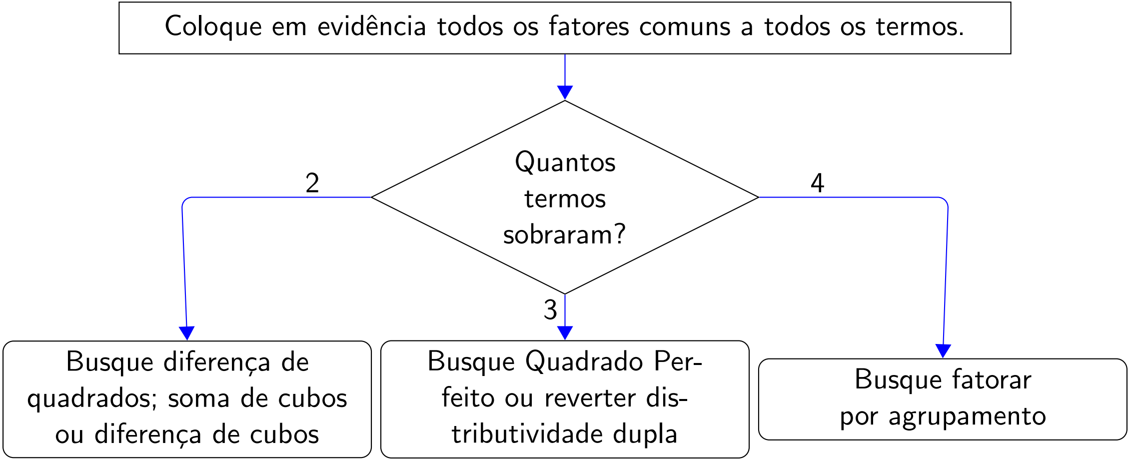
Passo 1 Coloque em evidência todos os fatores comuns a todos os termos.

Passo 2

- Se o polinômio remanescente após o passo 1 tem dois termos, procure por uma diferença de dois quadrados ou a soma ou diferença entre dois cubos.
- Se o polinômio remanescente após o passo 1 tem três termos, procure por um quadrado perfeito ou tente reverter a distributividade dupla.
- Se o polinômio remanescente após o passo 1 tem quatro ou mais termos, tente fatorar por agrupamento.

Formas especiais e Estratégias

Estratégia de Fatoração Geral



Até a próxima!!!