Expressões Racionais e Radicais

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Expressões Racionais

Definição

Expressão Racionais são as que podem ser escritas como quociente de dois polinômios. As expressões não são definidas nos valores da variável que zeram o denominador.

Ex.: $\dfrac{x^2}{y^3}$ para $y \neq 0$; $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 8}$ para $x \neq -2$.

Definição

Expressão Racionais são as que podem ser escritas como quociente de dois polinômios.
As expressões não são definidas nos valores da variável que zeram o denominador.
Ex.: $\dfrac{x^2}{y^3}$ para $y \neq 0$; $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 8}$ para $x \neq -2$.
Chamamos a expressão racional de *Regular* se o grau do polinômio numerador for *menor* que o grau do polinômio denominador. Caso contrário, a expressão é dita como *Irregular*.

Ex. : $\dfrac{x^3 - x + 5}{x^5 - 2}$ é regular, pois $gr(x^3 - x + 5) = 3 < 5 = gr(x^5 - 2)$

Ex. 2: $\dfrac{3x^2 - 2x - 7}{x + 3}$ é irregular, pois $gr(3x^2 - 2x - 7) = 2 > 1 = gr(x + 3)$

As operações com estas expressões seguem as mesmas regras de operações com frações.

Simplificação de expressão: Caso a expressão tenha fatores comuns, estes podem ser simplificados.

$$\frac{x^2-5x+6}{x^3-8}=\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=\frac{x-3}{x^2+2x+4}$$

Operações

Simplificação

As operações com estas expressões seguem as mesmas regras de operações com frações.

Simplificação de expressão: Caso a expressão tenha fatores comuns, estes podem ser simplificados.

$$\frac{x^2-5x+6}{x^3-8} = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \frac{x-3}{x^2+2x+4}$$

Frações Complexas: São expressões racionais que contém frações no numerador ou no denominador. Para simplificar, multiplique numerador e denominador por fatores que eliminem as frações.

$$\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{a}{a-1}}{x-a}\left(\cdot\frac{(x-1)(a-1)}{(x-1)(a-1)}\right) = \frac{x(a-1)-a(x-1)}{(x-a)(x-1)(a-1)} = \frac{-\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x-1)(a-1)} = \frac{-1}{(x-1)(a-1)}$$

$$\frac{{}^{x}/_{y}-{}^{y}/_{x}}{{}^{x}/_{y^2}+{}^{y}/_{x^2}}\left(\cdot\frac{x^2y^2}{x^2y^2}\right) = \frac{x^3y-xy^3}{x^3+y^3} = \frac{xy\cancel{(x+y)}(x-y)}{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)} = \frac{xy(x-y)}{x^2-xy+y^2}$$

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{- 3x^2} \cancel{- 9x} = 27 - x^3$$

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{- 3x^2} \cancel{- 9x} = 27 - x^3$$

Divisão de Polinômios: Se o grau do polinômio numerador for maior que o grau do polinômio denominador, é possível operar a divisão.

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{-9x} = 27 - x^3$$

Divisão de Polinômios: Se o grau do polinômio numerador for maior que o grau do polinômio denominador, é possível operar a divisão.
Dispositivo Prático de Briot-Ruffini: Para dividir um polinômio $p(x)$ por um $q(x) = x - c$ pode se usar uma forma prática. Exemplo: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ por $q(x) = x - 4$

Operações

Divisões

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{-9x} = 27 - x^3$$

Divisão de Polinômios: Se o grau do polinômio numerador for maior que o grau do polinômio denominador, é possível operar a divisão.

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini: Para dividir um polinômio $p(x)$ por um $q(x) = x - c$ pode se usar uma forma prática. Exemplo: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ por $q(x) = x - 4$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -5 & 7 & -9 \\ \hline & & & & \end{array}$$

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{-9x} = 27 - x^3$$

Divisão de Polinômios: Se o grau do polinômio numerador for maior que o grau do polinômio denominador, é possível operar a divisão.

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini: Para dividir um polinômio $p(x)$ por um $q(x) = x - c$ pode se usar uma forma prática. Exemplo: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ por $q(x) = x - 4$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -5 & 7 & -9 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Operações

Divisões

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{- 3x^2} \cancel{- 9x} = 27 - x^3$$

Divisão de Polinômios: Se o grau do polinômio numerador for maior que o grau do polinômio denominador, é possível operar a divisão.
Dispositivo Prático de Briot-Ruffini: Para dividir um polinômio $p(x)$ por um $q(x) = x - c$ pode se usar uma forma prática. Exemplo: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ por $q(x) = x - 4$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -5 & 7 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

Operações

Divisões

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{-9x} = 27 - x^3$$

Divisão de Polinômios: Se o grau do polinômio numerador for maior que o grau do polinômio denominador, é possível operar a divisão.

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini: Para dividir um polinômio $p(x)$ por um $q(x) = x - c$ pode se usar uma forma prática. Exemplo: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ por $q(x) = x - 4$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -5 & 7 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \end{array}$$

Operações

Divisões

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{-9x} = 27 - x^3$$

Divisão de Polinômios: Se o grau do polinômio numerador for maior que o grau do polinômio denominador, é possível operar a divisão.

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini: Para dividir um polinômio $p(x)$ por um $q(x) = x - c$ pode se usar uma forma prática. Exemplo: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ por $q(x) = x - 4$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -5 & 7 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}$$

Polinômio divisível: Com dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, se $q(x)$ for um fator de $p(x)$, então se diz que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$. Exemplo: $p(x) = 27 - x^3$ é divisível por $q(x) = x^2 + 3x + 9$ pois

$$(x^2 + 3x + 9)(3 - x) = \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 - x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{-9x} = 27 - x^3$$

Divisão de Polinômios: Se o grau do polinômio numerador for maior que o grau do polinômio denominador, é possível operar a divisão.

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini: Para dividir um polinômio $p(x)$ por um $q(x) = x - c$ pode se usar uma forma prática. Exemplo: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ por $q(x) = x - 4$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -5 & 7 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}$$

$$\therefore \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 4} = x^2 - x + 3 + \frac{3}{x - 4}$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{array}{cccccc|l} 6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{7-7} \end{array}$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{6-6}
\end{array}
\quad 6x^4
$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \hline \end{array} \qquad \frac{6x^4}{3x^2}$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{ccccc|l}
6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\
\cline{6-6}
 & & & & & \quad 2x^2
\end{array}
\qquad \frac{6x^4}{3x^2} = 2x^2
$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{7-7}
-(& 6x^4 & -4x^3 & +4x^2 &) & & 2x^2 \\ \cline{1-5}
\end{array}
$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{7-7}
-(& 6x^4 & -4x^3 & +4x^2 &) & & 2x^2 \\ \cline{1-5}
 & \cancel{0} & \cancel{0} & -12x^2 & & &
\end{array}
$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{6-6}
-(\,6x^4 & -4x^3 & +4x^2\;)\downarrow & \downarrow & & 2x^2 \\ \cline{1-4}
 & & -12x^2 & +15x & -13 &
\end{array}
$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{6-6}
-(\,6x^4 & -4x^3 & +4x^2\ ) & \downarrow & \downarrow & 2x^2 \\ \cline{1-4}
 & & -12x^2 & +15x & -13 &
\end{array}
\qquad \frac{-12x^2}{3x^2}
$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\
\cline{7-7}
-(& 6x^4 & -4x^3 & +4x^2 &) \downarrow & \downarrow & 2x^2 - 4 \\
\cline{1-5}
 & & & -12x^2 & +15x & -13 &
\end{array}
\qquad \frac{-12x^2}{3x^2} = -4
$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{7-7}
-(& 6x^4 & -4x^3 & +4x^2 &) \downarrow & \downarrow & 2x^2 - 4 \\ \cline{1-5}
 & & & -12x^2 & +15x & -13 & \\
 & -(& & -12x^2 & +8x & -8) & \\ \cline{2-6}
\end{array}
$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.

Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{7-7}
-(& 6x^4 & -4x^3 & +4x^2 \;) & \downarrow & \downarrow & 2x^2 - 4 \\ \cline{1-5}
 & & & -12x^2 & +15x & -13 & \\
-(& & & -12x^2 & +8x & -8) & \\ \cline{2-6}
 & & & & 7x & -5 &
\end{array}$$

Divisão Longa: Para outros casos, é preciso usar a divisão longa.
Ex.: Dividir $6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$ por $3x^2 - 2x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +15x & -13 & & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{7-7}
-(\,6x^4 & -4x^3 & +4x^2\,) & \downarrow & \downarrow & & 2x^2 - 4 \\ \cline{1-4}
 & & -12x^2 & +15x & -13 & & \\
 & -(& -12x^2 & +8x & -8) & & \\ \cline{2-5}
 & & & 7x & -5 & &
\end{array}
$$

$$\therefore\ \frac{6x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13}{3x^2 - 2x + 2} = 2x^2 - 4 + \frac{7x - 5}{3x^2 - 2x + 2}$$

- O grau do resto sempre será menor que o grau do polinômio divisor;

- O grau do resto sempre será menor que o grau do polinômio divisor;
- **Teorema do Resto:** Quando o polinômio $p(x)$ é dividido por $x - c$ o resto será exatamente $p(c)$.

- O grau do resto sempre será menor que o grau do polinômio divisor;
- **Teorema do Resto:** Quando o polinômio $p(x)$ é dividido por $x - c$ o resto será exatamente $p(c)$.
- Por consequência do anterior, $p(x)$ é divisível por $x - c$ se $p(c) = 0$. Neste caso, c é dito *zero* de $p(x)$

- O grau do resto sempre será menor que o grau do polinômio divisor;
- **Teorema do Resto:** Quando o polinômio $p(x)$ é dividido por $x - c$ o resto será exatamente $p(c)$.
- Por consequência do anterior, $p(x)$ é divisível por $x - c$ se $p(c) = 0$. Neste caso, c é dito *zero* de $p(x)$
- **Teorema Fundamental da Álgebra:** Todo polinômio de grau positivo e coeficientes complexos admite pelo menos um zero complexo.

Alguns Corolários do Teorema Fundamental da Álgebra

- Todo polinômio de grau n tem uma fatoração

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

sendo r_1, $r_2, \dots, r_n$ zeros de $p(x)$.

- Todo polinômio de grau n tem uma fatoração

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

sendo r_1, $r_2, \dots, r_n$ zeros de $p(x)$.

- Se um mesmo valor r_i repete-se m vezes, é dito que ele tem *multiplicidade* m.

Operações

Alguns Corolários do Teorema Fundamental da Álgebra

- Todo polinômio de grau n tem uma fatoração

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

sendo $r_1, r_2, \dots, r_n$ zeros de $p(x)$.

- Se um mesmo valor r_i repete-se m vezes, é dito que ele tem *multiplicidade m*.
- Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é um polinômio com coeficientes inteiros e $r = {}^{r_1}/_{r_2}$ é um zero racional de $p(x)$ com numerador e denominador não fatoráveis simultaneamente, então r_1 deve ser um fator do termo constante a_0 e r_2 deve ser um fator do primeiro coeficiente a_n.

- Todo polinômio de grau n tem uma fatoração

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

sendo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ zeros de $p(x)$.

- Se um mesmo valor r_i repete-se m vezes, é dito que ele tem *multiplicidade* m.
- Se $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é um polinômio com coeficientes inteiros e $r = {}^{r_1}/_{r_2}$ é um zero racional de $p(x)$ com numerador e denominador não fatoráveis simultaneamente, então r_1 deve ser um fator do termo constante a_0 e r_2 deve ser um fator do primeiro coeficiente a_n.

Ex.: Liste os possíveis zeros racionais de $4x^3 + 7x^2 - 21x - 18$.

$$\begin{aligned}\frac{\text{Fatores de } -18}{\text{Fatores de } 4} &= \frac{\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18\}}{\{\pm1, \pm2, \pm4\}} \\ &= \left\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{9}{4}\right\}\end{aligned}$$

Verificando os possíveis zeros:

zero	contas	zero	contas
1	$= 4 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 21 \cdot 1 - 18 = -28$	-1	$= 4 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - 21 \cdot (-1) - 18 = 6$
2	$= 4 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 21 \cdot 2 - 18 = 0$	-2	$= 4 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 21 \cdot (-2) - 18 = 20$
3	$= 4 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 - 21 \cdot 3 - 18 = 90$	-3	$= 4 \cdot (-3)^3 + 7 \cdot (-3)^2 - 21 \cdot (-3) - 18 = 0$
6	$= 4 \cdot 6^3 + 7 \cdot 6^2 - 21 \cdot 6 - 18 = 972$	-6	$= 4 \cdot (-6)^3 + 7 \cdot (-6)^2 - 21 \cdot (-6) - 18 = -504$
9	$= 4 \cdot 9^3 + 7 \cdot 9^2 - 21 \cdot 9 - 18 = 3276$	-9	$= 4 \cdot (-9)^3 + 7 \cdot (-9)^2 - 21 \cdot (-9) - 18 = -2178$
18	$= 4 \cdot 18^3 + 7 \cdot 18^2 - 21 \cdot 18 - 18 = 25200$	-18	$= 4 \cdot (-18)^3 + 7 \cdot (-18)^2 - 21 \cdot (-18) - 18 = -20700$
$^1/_2$	$= 4 \cdot \left(^1/_2\right)^3 + 7 \cdot \left(^1/_2\right)^2 - 21 \cdot \left(^1/_2\right) - 18 = -26{,}25$	$-^1/_2$	$= 4 \cdot \left(-^1/_2\right)^3 + 7 \cdot \left(-^1/_2\right)^2 - 21 \cdot \left(-^1/_2\right) - 18 = -6{,}25$
$^3/_2$	$= 4 \cdot \left(^3/_2\right)^3 + 7 \cdot \left(^3/_2\right)^2 - 21 \cdot \left(^3/_2\right) - 18 = -20{,}25$	$-^3/_2$	$= 4 \cdot \left(-^3/_2\right)^3 + 7 \cdot \left(-^3/_2\right)^2 - 21 \cdot \left(-^3/_2\right) - 18 = 15{,}75$
$^9/_2$	$= 4 \cdot \left(^9/_2\right)^3 + 7 \cdot \left(^9/_2\right)^2 - 21 \cdot \left(^9/_2\right) - 18 = 393{,}75$	$-^9/_2$	$= 4 \cdot \left(-^9/_2\right)^3 + 7 \cdot \left(-^9/_2\right)^2 - 21 \cdot \left(-^9/_2\right) - 18 = -146{,}25$
$^1/_4$	$= 4 \cdot \left(^1/_4\right)^3 + 7 \cdot \left(^1/_4\right)^2 - 21 \cdot \left(^1/_4\right) - 18 = -22{,}75$	$-^1/_4$	$= 4 \cdot \left(-^1/_4\right)^3 + 7 \cdot \left(-^1/_4\right)^2 - 21 \cdot \left(-^1/_4\right) - 18 = -12{,}375$
$^3/_4$	$= 4 \cdot \left(^3/_4\right)^3 + 7 \cdot \left(^3/_4\right)^2 - 21 \cdot \left(^3/_4\right) - 18 = -28{,}125$	$-^3/_4$	$= 4 \cdot \left(-^3/_4\right)^3 + 7 \cdot \left(-^3/_4\right)^2 - 21 \cdot \left(-^3/_4\right) - 18 = 0$

Verificando os possíveis zeros:

zero	contas	zero	contas
$^9/_4$	$= 4 \cdot \left(^9/_4\right)^3 + 7 \cdot \left(^9/_4\right)^2 - 21 \cdot \left(^9/_4\right) - 18 = 15{,}75$	$-^9/_4$	$= 4 \cdot \left(-^9/_4\right)^3 + 7 \cdot \left(-^9/_4\right)^2 - 21 \cdot \left(-^9/_4\right) - 18 = 19{,}125$

Com isso temos que $4x^3 + 7x^2 - 21x - 18 = 4\,(x-2)\,(x+3)\left(x + \dfrac{3}{4}\right)$. Verificando

$$\begin{aligned} 4\,(x-2)\,(x+3)\left(x+\frac{3}{4}\right) &= (x-2)\,(x+3)\,(4x+3) \\ = \left(x^2+x-6\right)(4x+3) &= 4x^3+4x^2-24x+3x^2+3x-18 \\ &= 4x^3+7x^2-21x-18 \end{aligned}$$

Expressões Radicais

Definição

Expressões Radicais são as que envolvem raízes.

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Definição

Expressões Radicais são as que envolvem raízes.

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \longleftarrow \text{radicando} \quad \text{índice}$$

Definição

Expressões Radicais são as que envolvem raízes.

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \longleftarrow \text{radicando} \quad \text{índice}$$

Propriedades:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \text{se } \sqrt[n]{x} \text{ é definida;} \qquad \sqrt[n]{x^n} = x \qquad \text{se } x \geq 0;$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x \qquad \text{se } n \text{ ímpar e } x < 0; \qquad \sqrt[n]{x^n} = |x| \qquad \text{se } n \text{ par e } x < 0;$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{ab} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Critérios para a forma simples do radical

(1) Nenhum radicando pode conter um fator com um expoente maior ou igual ao índice do radical.

(2) A potência do radicando e o índice do radical jamais podem ter em comum um fator diferente de 1.

Definição

Expressões Radicais são as que envolvem raízes.

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \longleftarrow \text{radicando} \quad \text{índice}$$

Propriedades:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \quad \text{se } \sqrt[n]{x} \text{ é definida;} \qquad \sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{se } x \geq 0;$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{se } n \text{ ímpar e } x < 0; \qquad \sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \text{se } n \text{ par e } x < 0;$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{ab} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Critérios para a forma simples do radical

(1) Nenhum radicando pode conter um fator com um expoente maior ou igual ao índice do radical.

(2) A potência do radicando e o índice do radical jamais podem ter em comum um fator diferente de 1.

(3) Nenhum radical aparece no denominador.

Definição

Expressões Radicais são as que envolvem raízes.

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \longleftarrow \text{radicando} \quad \text{índice}$$

Propriedades:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \quad \text{se } \sqrt[n]{x} \text{ é definida;} \qquad \sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{se } x \geq 0;$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{se } n \text{ ímpar e } x < 0; \qquad \sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \text{se } n \text{ par e } x < 0;$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{ab} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Critérios para a forma simples do radical

(1) Nenhum radicando pode conter um fator com um expoente maior ou igual ao índice do radical.

(2) A potência do radicando e o índice do radical jamais podem ter em comum um fator diferente de 1.

(3) Nenhum radical aparece no denominador.

(4) Nenhuma fração aparece em um radical.

Simplificações

Simplificando as seguintes expressões:

- $\sqrt[3]{16x^3y^5}$

Simplificações

Simplificando as seguintes expressões:

- $\sqrt[3]{16x^3y^5}$ viola a condição (1). Simplifica-se como:

$$\sqrt[3]{16x^3y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3 \cdot 2y^2} = \sqrt[3]{8x^3y^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2} = 2xy \cdot \sqrt[3]{2y^2}$$

Simplificações

Simplificando as seguintes expressões:

- $\sqrt[3]{16x^3y^5}$ viola a condição (1). Simplifica-se como:
$$\sqrt[3]{16x^3y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3 \cdot 2y^2} = \sqrt[3]{8x^3y^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2} = 2xy \cdot \sqrt[3]{2y^2}$$
- $\sqrt[6]{t^3}$

Simplificações

Simplificando as seguintes expressões:

- $\sqrt[3]{16x^3y^5}$ viola a condição (1). Simplifica-se como:
$$\sqrt[3]{16x^3y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3 \cdot 2y^2} = \sqrt[3]{8x^3y^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2} = 2xy \cdot \sqrt[3]{2y^2}$$
- $\sqrt[6]{t^3}$ viola a condição (2). Simplifica-se como:
$$\sqrt[6]{t^3} = \sqrt[2\cdot 3]{t^3} = \sqrt{\sqrt[3]{t^3}} = \sqrt{t} \text{ ou } \sqrt[6]{t^3} = t^{3/6} = t^{1/2} = \sqrt{t}$$

Simplificações

Simplificando as seguintes expressões:

- $\sqrt[3]{16x^3y^5}$ viola a condição (1). Simplifica-se como:
$$\sqrt[3]{16x^3y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3 \cdot 2y^2} = \sqrt[3]{8x^3y^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2} = 2xy \cdot \sqrt[3]{2y^2}$$
- $\sqrt[6]{t^3}$ viola a condição (2). Simplifica-se como:
$$\sqrt[6]{t^3} = \sqrt[2\cdot 3]{t^3} = \sqrt{\sqrt[3]{t^3}} = \sqrt{t} \text{ ou } \sqrt[6]{t^3} = t^{3/6} = t^{1/2} = \sqrt{t}$$
- $\dfrac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}}$

Simplificações

Simplificando as seguintes expressões:

- $\sqrt[3]{16x^3y^5}$ viola a condição (1). Simplifica-se como:
$$\sqrt[3]{16x^3y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3 \cdot 2y^2} = \sqrt[3]{8x^3y^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2} = 2xy \cdot \sqrt[3]{2y^2}$$
- $\sqrt[6]{t^3}$ viola a condição (2). Simplifica-se como:
$$\sqrt[6]{t^3} = \sqrt[2\cdot 3]{t^3} = \sqrt{\sqrt[3]{t^3}} = \sqrt{t} \text{ ou } \sqrt[6]{t^3} = t^{3/6} = t^{1/2} = \sqrt{t}$$
- $\dfrac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}}$ viola a condição (3). Simplifica-se como:
$$\frac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}} = \frac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{3x^3y^2}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{81x^4y^4}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{81x^4y^4}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{3xy} = \frac{4x\sqrt[4]{3x^3y^2}}{y}$$
Este caso é chamado *racionalização* do denominador.

Simplificações

Simplificando as seguintes expressões:

- $\sqrt[3]{16x^3y^5}$ viola a condição (1). Simplifica-se como:
$$\sqrt[3]{16x^3y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3 \cdot 2y^2} = \sqrt[3]{8x^3y^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2} = 2xy \cdot \sqrt[3]{2y^2}$$
- $\sqrt[6]{t^3}$ viola a condição (2). Simplifica-se como:
$$\sqrt[6]{t^3} = \sqrt[2\cdot 3]{t^3} = \sqrt{\sqrt[3]{t^3}} = \sqrt{t} \text{ ou } \sqrt[6]{t^3} = t^{3/6} = t^{1/2} = \sqrt{t}$$
- $\dfrac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}}$ viola a condição (3). Simplifica-se como:
$$\frac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}} = \frac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{3x^3y^2}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{81x^4y^4}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{81x^4y^4}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{3xy} = \frac{4x\sqrt[4]{3x^3y^2}}{y}$$

Este caso é chamado *racionalização* do denominador.

- $\sqrt[4]{\dfrac{3x}{5y^3}}$

Simplificações

Simplificando as seguintes expressões:

- $\sqrt[3]{16x^3y^5}$ viola a condição (1). Simplifica-se como:

$$\sqrt[3]{16x^3y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3 \cdot 2y^2} = \sqrt[3]{8x^3y^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2} = 2xy \cdot \sqrt[3]{2y^2}$$

- $\sqrt[6]{t^3}$ viola a condição (2). Simplifica-se como:

$$\sqrt[6]{t^3} = \sqrt[2\cdot 3]{t^3} = \sqrt{\sqrt[3]{t^3}} = \sqrt{t} \text{ ou } \sqrt[6]{t^3} = t^{3/6} = t^{1/2} = \sqrt{t}$$

- $\dfrac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}}$ viola a condição (3). Simplifica-se como:

$$\frac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}} = \frac{12x^2}{\sqrt[4]{27xy^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{3x^3y^2}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{81x^4y^4}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{\sqrt[4]{81x^4y^4}} = \frac{12x^2\sqrt[4]{3x^3y^2}}{3xy} = \frac{4x\sqrt[4]{3x^3y^2}}{y}$$

Este caso é chamado *racionalização* do denominador.

- $\sqrt[4]{\dfrac{3x}{5y^3}}$ viola a condição (4). Simplifica-se como:

$$\sqrt[4]{\frac{3x}{5y^3}} = \sqrt[4]{\frac{3x}{5y^3} \cdot \frac{5^3y}{5^3y}} = \sqrt[4]{\frac{3x \cdot 5^3y}{5^4y^4}} = \frac{\sqrt[4]{375xy}}{5y}$$

Simplificações

Para um binômio $a + b$ sua **expressão conjugada** é $a - b$.

Simplificações

Para um binômio $a + b$ sua **expressão conjugada** é $a - b$.

Ex. 1: Racionalizar o denominador $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

Simplificações

Para um binômio $a+b$ sua **expressão conjugada** é $a-b$.

Ex. 1: Racionalizar o denominador $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

Multiplique o numerador e o denominador pela expressão conjugada do denominador.

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}=\sqrt{x}+2$$

Simplificações

Para um binômio $a+b$ sua **expressão conjugada** é $a-b$.

Ex. 1: Racionalizar o denominador $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

Multiplique o numerador e o denominador pela expressão conjugada do denominador.

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2} = \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}} = \sqrt{x}+2$$

Ex. 2: Racionalizar o numerador de $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

Simplificações

Para um binômio $a + b$ sua **expressão conjugada** é $a - b$.

Ex. 1: Racionalizar o denominador $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

Multiplique o numerador e o denominador pela expressão conjugada do denominador.

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} = \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}} = \sqrt{x}+2$$

Ex. 2: Racionalizar o numerador de $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

Multiplique o numerador e o denominador pela expressão conjugada do numerador.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{\cancel{x-a}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

Até a próxima!!!