Equações lineares e não lineares

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Equações Lineares

Definições

Definições

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.
Naturalmente, uma *inequação* é a afirmação da **desigualdade** entre duas expressões.

Definições

Definições

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.
Naturalmente, uma *inequação* é a afirmação da **desigualdade** entre duas expressões.

Axiomas de Euclides

Axioma 1: Duas coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si.

Axioma 2: Se parcelas iguais forem adicionadas a quantias iguais, os resultados continuarão sendo iguais.

Axioma 3: Se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais.

Axioma 4: Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais uma à outra.

Axioma 5: O todo é maior que qualquer uma de suas partes.

Resolução de Equações

Uma equação com variáveis não pode ser dita como *Verdadeira* ou *Falsa*, justamente por causa das variáveis. Encontrar os valores das variáveis que tornam uma equação (ou inequação) verdadeira significa resolver a equação.

Resolução de Equações

Uma equação com variáveis não pode ser dita como *Verdadeira* ou *Falsa*, justamente por causa das variáveis. Encontrar os valores das variáveis que tornam uma equação (ou inequação) verdadeira significa resolver a equação.

Uma equação é dita **linear** quando é escrita na forma $ax+b=0$, sendo a chamado de coeficiente *angular* e b coeficiente *linear*. Caso $a \neq 0$, o conjunto solução desta equação é $\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

Resolução de Equações

Uma equação com variáveis não pode ser dita como *Verdadeira* ou *Falsa*, justamente por causa das variáveis. Encontrar os valores das variáveis que tornam uma equação (ou inequação) verdadeira significa resolver a equação.

Uma equação é dita **linear** quando é escrita na forma $ax+b=0$, sendo a chamado de coeficiente *angular* e b coeficiente *linear*. Caso $a \neq 0$, o conjunto solução desta equação é $\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

Equações Equivalentes

Duas equações são ditas **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto de soluções:

Exemplo: $x-5=0$ e $x=5$ são equivalentes, pois tem o mesmo conjunto solução $\{5\}$.
$x^2-25=0$ e $x=5$ **não** são equivalentes, pois os conjuntos solução são $\{-5,5\}$ e $\{5\}$ respectivamente.

Passos

O processo para resolver a equação, isto é, encontrar os valores que a tornam verdadeira, consiste em aplicar operações de transformação da equação em outras equações equivalentes cuja solução seja direta.

Passos

O processo para resolver a equação, isto é, encontrar os valores que a tornam verdadeira, consiste em aplicar operações de transformação da equação em outras equações equivalentes cuja solução seja direta. As principais operações possíveis são:

Adicionar o mesmo número a ambos os lados. Assim, as equações $a = b$ e $a + c = b + c$ são equivalentes.

Subtrair o mesmo número a ambos os lados. Assim, as equações $a = b$ e $a - c = b - c$ são equivalentes.

Multiplicar ambos os lados pelo mesmo número não nulo. Logo, as equações $a = b$ e $a \cdot c = b \cdot c$, $(c \neq 0)$, são equivalentes.

Dividir ambos os lados pelo mesmo número não nulo. Logo, as equações $a = b$ e $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $(c \neq 0)$, são equivalentes.

Simplificar expressões em um dos lados de uma equação.

Passos

O processo para resolver a equação, isto é, encontrar os valores que a tornam verdadeira, consiste em aplicar operações de transformação da equação em outras equações equivalentes cuja solução seja direta. As principais operações possíveis são:

Adicionar o mesmo número a ambos os lados. Assim, as equações $a = b$ e $a + c = b + c$ são equivalentes.

Subtrair o mesmo número a ambos os lados. Assim, as equações $a = b$ e $a - c = b - c$ são equivalentes.

Multiplicar ambos os lados pelo mesmo número não nulo. Logo, as equações $a = b$ e $a \cdot c = b \cdot c$, $(c \neq 0)$, são equivalentes.

Dividir ambos os lados pelo mesmo número não nulo. Logo, as equações $a = b$ e $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $(c \neq 0)$, são equivalentes.

Simplificar expressões em um dos lados de uma equação.

Cuidado com "elevar uma equação" à uma potência par:
Conjunto solução de $x = a$ é $\{a\}$. Conjunto solução de $x^2 = a^2$ é $\{-a, a\}$, pois

$$x^2 = a^2 \implies x^2 - a^2 = 0 \implies (x - a)(x + a) = 0 \implies x = a \text{ ou } x = -a.$$

Exemplo

Ex.: Resolva a equação $x + 15 = 3x + 3$.

Exemplo

Ex.: Resolva a equação $x+15=3x+3$.

$$x+15=3x+3 \qquad \text{(Subtrai 3)}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a equação $x + 15 = 3x + 3$.

$$x + 15 = 3x + 3 \qquad \text{(Subtrai 3)}$$

$$x + 15 - 3 = 3x \underbrace{+3 - 3}_{\rightarrow 0}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a equação $x+15=3x+3$.

$$x+15=3x+3 \qquad \text{(Subtrai 3)}$$

$$x+15-3=3x\underbrace{+3-3}_{\to 0}$$

$$x+12=3x \qquad \text{(Subtrai } x\text{)}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a equação $x + 15 = 3x + 3$.

$$x + 15 = 3x + 3 \qquad \text{(Subtrai 3)}$$

$$x + 15 - 3 = 3x \underbrace{+3 - 3}_{\to 0}$$

$$x + 12 = 3x \qquad \text{(Subtrai } x\text{)}$$

$$\underbrace{-x + x}_{\to 0} + 12 = 3x - x$$

Exemplo

Ex.: Resolva a equação $x + 15 = 3x + 3$.

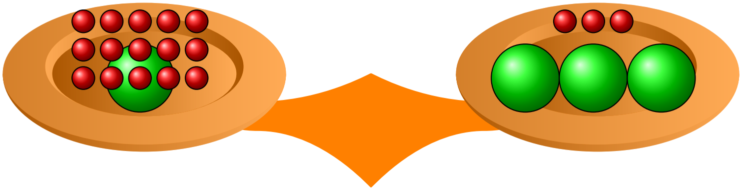
$$
\begin{aligned}
x + 15 &= 3x + 3 && \text{(Subtrai 3)}\\
x + 15 - 3 &= 3x \underbrace{+3 - 3}_{\to 0} && \\
x + 12 &= 3x && \text{(Subtrai } x\text{)}\\
\underbrace{-x + x}_{\to 0} + 12 &= 3x - x && \\
12 &= 2x && \text{(Divide por 2)}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ex.: Resolva a equação $x + 15 = 3x + 3$.

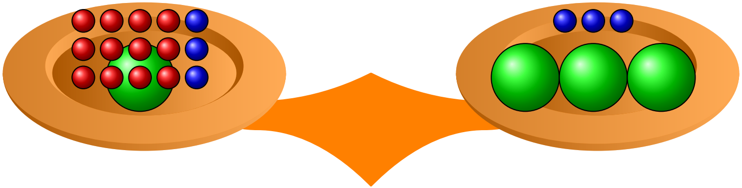
$$
\begin{aligned}
x + 15 &= 3x + 3 && \text{(Subtrai 3)}\\
x + 15 - 3 &= 3x \underbrace{+3 - 3}_{\to 0} \\
x + 12 &= 3x && \text{(Subtrai } x\text{)}\\
\underbrace{-x + x}_{\to 0} + 12 &= 3x - x \\
12 &= 2x && \text{(Divide por 2)}\\
6 &= x
\end{aligned}
$$

Exemplo



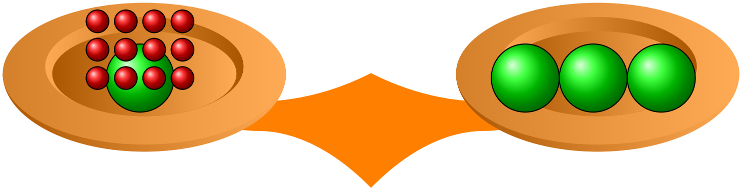
$$x + 15 = 3x + 3$$

Exemplo



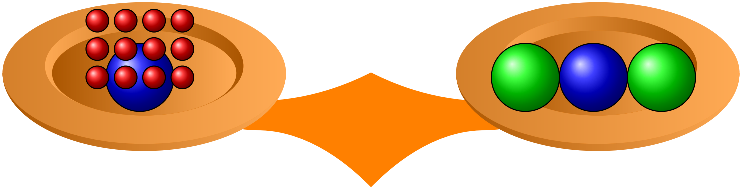
$$x + 15 - 3 = 3x \underbrace{+3 - 3}_{\to 0}$$

Exemplo



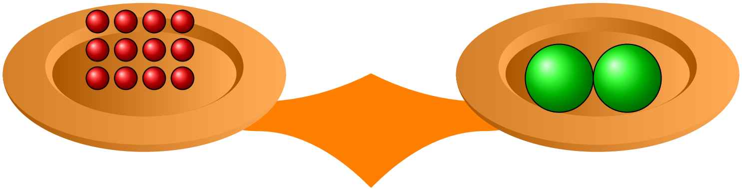
$$x + 12 = 3x$$

Exemplo



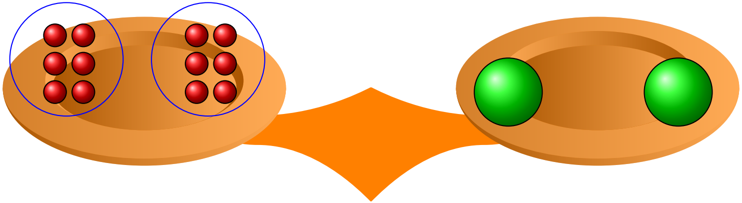
$$\underbrace{-x+x}_{\rightarrow 0}+12=3x-x$$

Exemplo



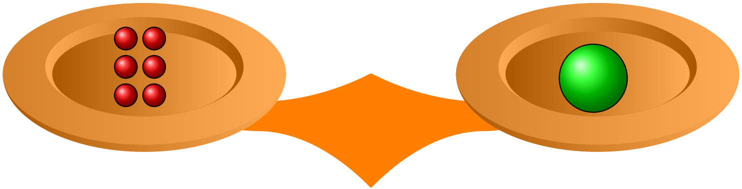
$$12 = 2x$$

Exemplo



$$12 = 2x$$

Exemplo



$$6 = x$$

Equações não lineares

Equações não lineares

Equações que não podem ser escritas como lineares, são ditas **não lineares**. Um primeiro exemplo de equações não lineares são as **quadráticas**, escritas com $ax^2 + bx + c = 0$, sendo necessariamente $a \neq 0$.

Equações não lineares

Equações que não podem ser escritas como lineares, são ditas **não lineares**. Um primeiro exemplo de equações não lineares são as **quadráticas**, escritas com $ax^2 + bx + c = 0$, sendo necessariamente $a \neq 0$.
Métodos de solução de equações quadráticas:

Fatoração

Extração de Raiz

Completar Quadrados

Método Po Shen Lo

Fórmula Quadrática

Fatoração

Se o polinômio tiver fatores lineares com coeficientes racionais, é possível aplicar a fatoração de polinômios e, em seguida, usar o fator zero.

Fatoração

Se o polinômio tiver fatores lineares com coeficientes racionais, é possível aplicar a fatoração de polinômios e, em seguida, usar o fator zero.

Ex.: Resolver $4x^2 - 4x - 3 = 0$ por fatoração. **R.:** Listando os fatores racionais,

$$\frac{\text{Fatores de } -3}{\text{Fatores de } 4} = \frac{\{\pm 1, \pm 3\}}{\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}} = \left\{\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}\right\}$$

Verificando os possíveis zeros:

contas	**contas**	**contas**
$1 \to 4\cdot 1^2 - 4\cdot 1 - 3 = -3$	$-1 \to 4\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) - 3 = 5$	$3 \to 4\cdot 3^2 - 4\cdot 3 - 3 = 21$
$-3 \to 4\cdot(-3)^2 - 4\cdot(-3) - 3 = 45$	${}^1/_2 \to 4\cdot\left({}^1/_2\right)^2 - 4\cdot{}^1/_2 - 3 = -4$	$-{}^1/_2 \to 4\cdot\left(-{}^1/_2\right)^2 - 4\cdot\left(-{}^1/_2\right) - 3 = 0$
${}^3/_2 \to 4\cdot\left({}^3/_2\right)^2 - 4\cdot{}^3/_2 - 3 = 0$	$-{}^3/_2 \to 4\cdot\left(-{}^3/_2\right)^2 - 4\cdot\left(-{}^3/_2\right) - 3 = 12$	${}^1/_4 \to 4\cdot\left({}^1/_4\right)^2 - 4\cdot{}^1/_4 - 3 = -{}^{15}/_4$
$-{}^1/_4 \to 4\cdot\left(-{}^1/_4\right)^2 - 4\cdot\left(-{}^1/_4\right) - 3 = -{}^7/_4$	${}^3/_4 \to 4\cdot\left({}^3/_4\right)^2 - 4\cdot{}^3/_4 - 3 = -{}^{15}/_4$	$-{}^3/_4 \to 4\cdot\left(-{}^3/_4\right)^2 - 4\cdot\left(-{}^3/_4\right) - 3 = {}^9/_4$

Assim, $4x^2 - 4x - 3 = 4\left(x + {}^1/_2\right)\left(x - {}^3/_2\right) = 0$ significa $x + {}^1/_2 = 0$ ou $x - {}^3/_2 = 0$.

Conjunto solução: $\left\{-{}^1/_2, {}^3/_2\right\}$.

Fatoração

Ex.: Resolver $x^2 - x - 12 = 0$ por fatoração
R.: Uma fatoração comum da equação quadrática, chamada de "soma e produto", sendo a quadrática escrita como $x^2 - Sx + P = 0$.
Para o caso em tela, queremos dois valores tais que sua soma seja 1 e produto -12.
Como o produto é negativo, sabemos que as raízes terão sinais trocados.
Possíveis pares de raízes: $\{1,-12\}$, $\{2,-6\}$, $\{3,-4\}$, $\{4,-3\}$, $\{6,-2\}$, $\{12,-1\}$.
As respectivas somas são $-11, -4, -1, 1, 4, 11$. Logo, nosso par de raízes é $\{4,-3\}$.
Verificação: $4^2 - 4 - 12 = 16 - 16 = 0$ e $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$.

Extração de Raiz

Para os casos em que o coeficiente b é nulo e for possível escrever $ax^2 - c = 0$ com $c > 0$, podemos reescrever $x^2 - \frac{c}{a} = 0 \implies x^2 - \left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 = 0$. Assim, usando a diferença de dois quadrados, $\left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) = 0$ e, pelo fator zero, $x - \sqrt{\frac{c}{a}} = 0$ ou $x + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0$. Assim, o conjunto solução é $\left\{-\sqrt{\frac{c}{a}}, +\sqrt{\frac{c}{a}}\right\}$. Para $c < 0$, não há solução em $\mathbb{R}$.

Extração de Raiz

Para os casos em que o coeficiente b é nulo e for possível escrever $ax^2 - c = 0$ com $c > 0$, podemos reescrever $x^2 - \dfrac{c}{a} = 0 \implies x^2 - \left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)^2 = 0$. Assim, usando a diferença de dois quadrados, $\left(x - \sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\dfrac{c}{a}}\right) = 0$ e, pelo fator zero, $x - \sqrt{\dfrac{c}{a}} = 0$ ou $x + \sqrt{\dfrac{c}{a}} = 0$. Assim, o conjunto solução é $\left\{-\sqrt{\dfrac{c}{a}}, +\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right\}$. Para $c < 0$, não há solução em $\mathbb{R}$.

Ex.: Resolver $4x^2 - 25 = 0$.

R.: $4x^2 - 25 = 0 \implies x^2 - \dfrac{25}{4} = 0 \implies \left(x - \dfrac{5}{2}\right)\left(x + \dfrac{5}{2}\right) = 0$. Solução $\left\{\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{2}\right\}$.

Extração de Raiz

Para os casos em que o coeficiente b é nulo e for possível escrever $ax^2 - c = 0$ com $c > 0$, podemos reescrever $x^2 - \frac{c}{a} = 0 \implies x^2 - \left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 = 0$. Assim, usando a diferença de dois quadrados, $\left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) = 0$ e, pelo fator zero, $x - \sqrt{\frac{c}{a}} = 0$ ou $x + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0$. Assim, o conjunto solução é $\left\{-\sqrt{\frac{c}{a}}, +\sqrt{\frac{c}{a}}\right\}$. Para $c < 0$, não há solução em $\mathbb{R}$.

Ex.: Resolver $4x^2 - 25 = 0$.

R.: $4x^2 - 25 = 0 \implies x^2 - \frac{25}{4} = 0 \implies \left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = 0$. Solução $\left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$.

Ex. 2: Resolver $x^2 + 9 = 0$.

R.: Note que, para escrever como $ax^2 - c = 0$ ficaria $x^2 - (-9) = 0$, o que não permite escrever $x^2 - \left(\sqrt{-9}\right)^2 = 0$ pois $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$. Esta equação não tem solução real.

Completar Quadrados

O método de completar quadrados busca reescrever a equação quadrática na forma do trinômio quadrado perfeito.

Completar Quadrados

O método de completar quadrados busca reescrever a equação quadrática na forma do trinômio quadrado perfeito.
Passos:

i) Reescreva a equação como $x^2 + px = q$

ii) Adicione $p^2/4$ à equação. Fica $x^2 + px + p^2/4 = q + p^2/4$

iii) O lado esquerdo da equação é $(x + p/2)^2$. Assim, $(x + p/2)^2 = q + p^2/4$ pode ser resolvido pela extração de raiz.

Completar Quadrados

Ex.: Resolver $2x^2 - 16x + 24 = 0$ pelo completamento de quadrado:

R.:

i) Reescrita: $x^2 - 8x = -12$

ii) $p = -8$. Logo ${p^2}/{4} = {(-8)^2}/{4} = {64}/{4} = 16$.
Assim, $x^2 - 8x + 16 = -12 + 16 = 4$

iii) Pelo quadrado da diferença, $(x-4)^2 = 4$.

Podemos concluir:

$$(x-4)^2 - 2^2 = 0 \qquad \left(\text{Subtrair } 4 = 2^2\right)$$

$$(x-4+2)(x-4-2) = 0 \qquad (\text{Diferença de quadrados})$$

$$(x-2) = 0 \text{ ou } (x-6) = 0 \qquad (\text{Fator Zero})$$

$\therefore x = 2$ ou $x = 6$. Conjunto Solução $\{2, 6\}$.

Método Po-Shen Lo

O método pulicado pelo Professor Po-Shen Lo da Carnegie Mellon University (Pittsburgh, Pensilvânia) trabalha com uma elaboração da fatoração soma e produto.

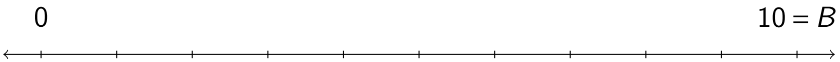
Método Po-Shen Lo

O método pulicado pelo Professor Po-Shen Lo da Carnegie Mellon University (Pittsburgh, Pensilvânia) trabalha com uma elaboração da fatoração soma e produto.

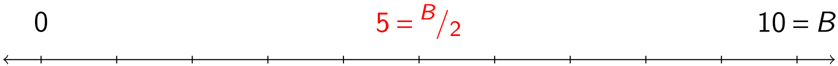
Localização das raízes

- Se for possível obter dois números r e s tais que $r+s=-B$ e $rs=C$, então $x^2+Bx+C=(x-r)(x-s)$, e $\{r,s\}$ será o conjunto solução de $x^2+Bx+C=0$. ("soma e produto")
- Para que dois números somem $-B$, eles são da forma $-{}^{B}/_{2}+u$ ou $-{}^{B}/_{2}-u$.

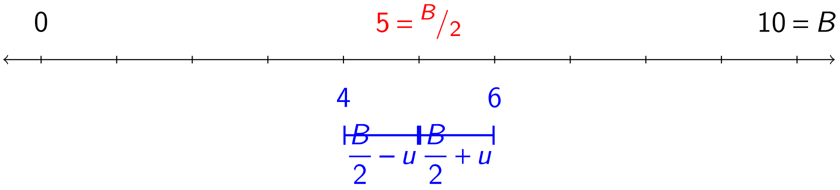
Método Po-Shen Lo



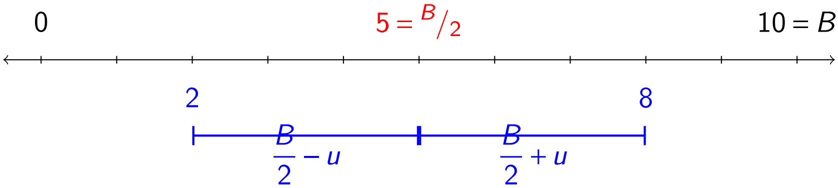
Método Po-Shen Lo



Método Po-Shen Lo



Método Po-Shen Lo



Método Po-Shen Lo

O método pulicado pelo Professor Po-Shen Lo da Carnegie Mellon University (Pittsburgh, Pensilvânia) trabalha com uma elaboração da fatoração soma e produto.

Localização das raízes

- Se for possível obter dois números r e s tais que $r + s = -B$ e $rs = C$, então $x^2 + Bx + C = (x - r)(x - s)$, e $\{r, s\}$ será o conjunto solução de $x^2 + Bx + C = 0$. ("soma e produto")
- Para que dois números somem $-B$, eles são da forma $-{}^{B}/_{2} + u$ ou $-{}^{B}/_{2} - u$.
- Se o produto deles é C, então $\left(-{}^{B}/_{2} + u\right)\left(-{}^{B}/_{2} - u\right) = C \implies {}^{B^2}/_{4} - u^2 = C$
- Obtendo u válido de raiz quadrada, $-{}^{B}/_{2} + u$ ou $-{}^{B}/_{2} - u$ são as raízes.

Artigo - https://arxiv.org/abs/1910.06709;
Site - https://www.poshenloh.com/quadraticdetail/

Método Po-Shen Lo

Ex.: Resolver $x^2 - 7x + 12 = 0$ pelo método Po-Shen Lo.
Pela fatoração de soma e produto $(x^2 - Sx + P)$, queremos dois números que somem 7 com produto 12.

Dois números quaisquer somam 7, então são da forma $\frac{7}{2} \pm u$, para algum u.

Fazendo o produto $\left(\frac{7}{2} + u\right)\left(\frac{7}{2} - u\right) = 12 \implies \frac{49}{4} - u^2 = 12 \implies \frac{49}{4} - 12 = u^2$

$\implies \frac{49 - 48}{4} = u^2 \implies \frac{1}{4} = u^2 \implies u = \pm\frac{1}{2}$.

Então, os números procurados são $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ e $\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Fórmula Quadrática

Fórmula Quadrática

Mas não é Bháskara???

Fórmula Quadrática

Mas não é Bháskara???

Bháskara - Séc. XII. Trabalho com números negativos (raízes falsas).

Mas não é Bháskara???

Bháskara - Séc. XII. Trabalho com números negativos (raízes falsas).

Histórico de formas de resolução:

- Babilônia (2000 a 1600 a.C) - Registros cuneiformes

Mas não é Bháskara???

Bháskara - Séc. XII. Trabalho com números negativos (raízes falsas).

Histórico de formas de resolução:

- Babilônia (2000 a 1600 a.C) - Registros cuneiformes
- Chineses (??? - 100 d.C) - Solução de problemas práticos

Fórmula Quadrática

Mas não é Bháskara???

Bháskara - Séc. XII. Trabalho com números negativos (raízes falsas).

Histórico de formas de resolução:

- Babilônia (2000 a 1600 a.C) - Registros cuneiformes
- Chineses (??? - 100 d.C) - Solução de problemas práticos
- Gregos - Diofanto (250 d.C) - Soma, produto, média.

Fórmula Quadrática

Mas não é Bháskara???

Bháskara - Séc. XII. Trabalho com números negativos (raízes falsas).

Histórico de formas de resolução:

- Babilônia (2000 a 1600 a.C) - Registros cuneiformes
- Chineses (??? - 100 d.C) - Solução de problemas práticos
- Gregos - Diofanto (250 d.C) - Soma, produto, média.
- Índia - Brahmagupta (628 d.C) encontra uma raiz. Sridhara (900 d.C) deriva um método de resolução.

Mas não é Bháskara???

Bháskara - Séc. XII. Trabalho com números negativos (raízes falsas).

Histórico de formas de resolução:

- Babilônia (2000 a 1600 a.C) - Registros cuneiformes
- Chineses (??? - 100 d.C) - Solução de problemas práticos
- Gregos - Diofanto (250 d.C) - Soma, produto, média.
- Índia - Brahmagupta (628 d.C) encontra uma raiz. Sridhara (900 d.C) deriva um método de resolução.
- Persas (atualmente Turqia, Arábia) - al-Khwarizmi (825 d.C) - resoluções com abstração, separando diversos casos por não reconhecer as raízes negativas ou nulas.

Fórmula Quadrática

Mas não é Bháskara???

Bháskara - Séc. XII. Trabalho com números negativos (raízes falsas).

Histórico de formas de resolução:

- Babilônia (2000 a 1600 a.C) - Registros cuneiformes
- Chineses (??? - 100 d.C) - Solução de problemas práticos
- Gregos - Diofanto (250 d.C) - Soma, produto, média.
- Índia - Brahmagupta (628 d.C) encontra uma raiz. Sridhara (900 d.C) deriva um método de resolução.
- Persas (atualmente Turqia, Arábia) - al-Khwarizmi (825 d.C) - resoluções com abstração, separando diversos casos por não reconhecer as raízes negativas ou nulas.
- Europa Ocidental - Renascença. Viète. Notação moderna de "fórmula".

Sugestões de Leitura:

- A Simple Proof of the Quadratic Formula. Po-Shen Loh (2019). https://arxiv.org/pdf/1910.06709.pdf
- A equação quadrática e as contribuições de Bhaskara. Eduardo Gomes Guedes (2019). https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/66582

Dedução da Fórmula pelo Método Po-Shen Lo

Dedução da Fórmula pelo Método Po-Shen Lo

Está posto como exercício a dedução pelo Completamento de Quadrados

Dedução da Fórmula pelo Método Po-Shen Lo

Está posto como exercício a dedução pelo Completamento de Quadrados

Temos a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Como o Po-Shen Lo trabalha com $x^2 + Bx + C = 0$, dividimos a equação inicial por a, obtendo $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Dedução da Fórmula pelo Método Po-Shen Lo

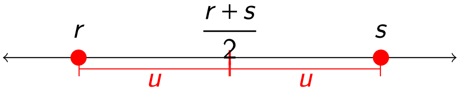
Está posto como exercício a dedução pelo Completamento de Quadrados

Temos a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Como o Po-Shen Lo trabalha com $x^2 + Bx + C = 0$, dividimos a equação inicial por a, obtendo $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Vamos buscar dois números r, s tais que $r + s = -\frac{b}{a}$ e $rs = \frac{c}{a}$.

A média entre r e s é $\frac{1}{2} \cdot (r+s) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b}{2a}$.

Note-se que, se r for a média menos u, necessariamente s será a média mais u. Se $r = s$ então $u = 0$.



Fórmula Quadrática

Dedução

Queremos calcular u, sabendo que $\left(\frac{-b}{2a}+u\right)\left(\frac{-b}{2a}-u\right)=\frac{c}{a}$.

Fórmula Quadrática

Dedução

Queremos calcular u, sabendo que $\left(\dfrac{-b}{2a}+u\right)\left(\dfrac{-b}{2a}-u\right)=\dfrac{c}{a}$.

Como é produto de soma e diferença, temos $\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2-u^2=\dfrac{c}{a}$.

Fórmula Quadrática

Dedução

Queremos calcular u, sabendo que $\left(\frac{-b}{2a}+u\right)\left(\frac{-b}{2a}-u\right)=\frac{c}{a}$.

Como é produto de soma e diferença, temos $\left(\frac{-b}{2a}\right)^2-u^2=\frac{c}{a}$.

Logo $u^2=\left(\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Fórmula Quadrática

Dedução

Queremos calcular u, sabendo que $\left(\frac{-b}{2a}+u\right)\left(\frac{-b}{2a}-u\right)=\frac{c}{a}$.

Como é produto de soma e diferença, temos $\left(\frac{-b}{2a}\right)^2-u^2=\frac{c}{a}$.

Logo $u^2=\left(\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Assim, extraindo a raiz, $u=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$. Portanto, as raízes da quadrática são

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Equações contendo Radicais

Em geral

A equação $a = b$ nem sempre é equivalente à equação $a^n = b^n$!

- Se n é ímpar, elas têm as mesmas soluções reais, e são equivalentes.
- se n é par, todas as soluções de $a = b$ estão presentes entre as soluções de $a^n = b^n$.

Equações contendo Radicais

Em geral

A equação $a = b$ nem sempre é equivalente à equação $a^n = b^n$!

- Se n é ímpar, elas têm as mesmas soluções reais, e são equivalentes.
- se n é par, todas as soluções de $a = b$ estão presentes entre as soluções de $a^n = b^n$.

Portanto, ao elevar ambos os membros de uma equação contendo radicais a uma potência ímpar, obtemos as soluções. Já se a potência for par, é necessário avaliar se as soluções obtidas satisfazem à equação original.

Equações contendo Radicais

Exemplo I

Resolver $\sqrt{x+2} = x - 4$.

Exemplo I

Resolver $\sqrt{x+2} = x - 4$.

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = (x-4)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

Equações contendo Radicais

Exemplo I

Resolver $\sqrt{x+2} = x - 4$.

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = (x-4)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$x + 2 = x^2 - 8x + 16$$

Equações contendo Radicais

Exemplo I

Resolver $\sqrt{x+2} = x-4$.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= (x-4)^2 && \text{Elevando ao quadrado} \\ x+2 &= x^2-8x+16 && \\ 0 &= x^2-9x+14 && \text{subt. } (x+2) \end{aligned}$$

Equações contendo Radicais

Exemplo I

Resolver $\sqrt{x+2} = x-4$.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= (x-4)^2 && \text{Elevando ao quadrado} \\
x+2 &= x^2-8x+16 && \\
0 &= x^2-9x+14 && \text{subt. } (x+2) \\
0 &= (x-2)(x-7) && \text{fatorando}
\end{aligned}
$$

Equações contendo Radicais

Exemplo I

Resolver $\sqrt{x+2} = x - 4$.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= (x-4)^2 && \text{Elevando ao quadrado} \\
x + 2 &= x^2 - 8x + 16 && \\
0 &= x^2 - 9x + 14 && \text{subt. } (x+2) \\
0 &= (x-2)(x-7) && \text{fatorando} \\
\therefore x = 2 \text{ ou } x &= 7 &&
\end{aligned}$$

Resolver $\sqrt{x+2} = x - 4$.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= (x-4)^2 && \text{Elevando ao quadrado} \\
x + 2 &= x^2 - 8x + 16 && \\
0 &= x^2 - 9x + 14 && \text{subt. } (x+2) \\
0 &= (x-2)(x-7) && \text{fatorando} \\
\therefore x &= 2 \text{ ou } x = 7 &&
\end{aligned}
$$

Agora, é preciso testar as soluções encontradas:

Equações contendo Radicais

Exemplo I

Resolver $\sqrt{x+2} = x - 4$.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= (x-4)^2 && \text{Elevando ao quadrado} \\
x+2 &= x^2 - 8x + 16 && \\
0 &= x^2 - 9x + 14 && \text{subt. } (x+2) \\
0 &= (x-2)(x-7) && \text{fatorando} \\
\therefore x = 2 &\text{ ou } x = 7 &&
\end{aligned}$$

Agora, é preciso testar as soluções encontradas:

- $x = 2 \implies \sqrt{2+2} = 2 - 4 \implies \sqrt{4} = -2.$ Não serve.

Equações contendo Radicais

Exemplo I

Resolver $\sqrt{x+2} = x - 4$.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= (x-4)^2 && \text{Elevando ao quadrado} \\
x+2 &= x^2 - 8x + 16 && \\
0 &= x^2 - 9x + 14 && \text{subt. } (x+2) \\
0 &= (x-2)(x-7) && \text{fatorando} \\
\therefore x = 2 &\text{ ou } x = 7 &&
\end{aligned}
$$

Agora, é preciso testar as soluções encontradas:

- $x = 2 \implies \sqrt{2+2} = 2-4 \implies \sqrt{4} = -2.$ Não serve.
- $x = 7 \implies \sqrt{7+2} = 7-4 \implies \sqrt{9} = 3.$ $x = 7$ é a única solução.

Equações contendo Radicais

Exemplo II

Resolva $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} + 1$.

Equações contendo Radicais

Exemplo II

Resolva $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} + 1$.

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + 1\right)^2$$

Elevando ao quadrado

Resolva $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} + 1$.

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + 1\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$2x = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1$$

$$x - 2 = 2\sqrt{x+1} \qquad \text{Subtr. } (x+2)$$

Equações contendo Radicais

Exemplo II

Resolva $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} + 1$.

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + 1\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$2x = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1$$

$$x - 2 = 2\sqrt{x+1} \qquad \text{Subtr. } (x+2)$$

$$(x-2)^2 = \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

Equações contendo Radicais

Exemplo II

Resolva $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} + 1$.

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}+1\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$2x = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1$$

$$x - 2 = 2\sqrt{x+1} \qquad \text{Subtr. } (x+2)$$

$$(x-2)^2 = \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4\,(x+1)$$

Equações contendo Radicais

Exemplo II

Resolva $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} + 1$.

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + 1\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$2x = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1$$

$$x - 2 = 2\sqrt{x+1} \qquad \text{Subtr. } (x+2)$$

$$(x-2)^2 = \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4(x+1)$$

$$x^2 - 8x = 0 \qquad \text{Subtr.} 4(x+1)$$

Exemplo II

Resolva $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} + 1$.

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}+1\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$2x = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1$$

$$x - 2 = 2\sqrt{x+1} \qquad \text{Subtr. } (x+2)$$

$$(x-2)^2 = \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4(x+1)$$

$$x^2 - 8x = 0 \qquad \text{Subtr.} 4(x+1)$$

$$x(x-8) = 0 \qquad \text{Fatorando}$$

Equações contendo Radicais

Exemplo II

Resolva $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} + 1$.

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + 1\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$2x = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1$$

$$x - 2 = 2\sqrt{x+1} \qquad \text{Subtr. } (x+2)$$

$$(x-2)^2 = \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \qquad \text{Elevando ao quadrado}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4(x+1)$$

$$x^2 - 8x = 0 \qquad \text{Subtr.} 4(x+1)$$

$$x(x-8) = 0 \qquad \text{Fatorando}$$

$$\therefore x = 0 \text{ ou } x = 8$$

Testando:

- $x = 8 \implies \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{8+1} + 1 \implies \sqrt{16} = \sqrt{9} + 1 \implies 4 = 3 + 1.$ Ok.
- $x = 0 \implies \sqrt{2 \cdot 0} = \sqrt{0+1} + 1 \implies \sqrt{0} = \sqrt{1} + 1 \implies 0 = 1 + 1 = 2.$ Não serve.

Bons Estudos!!!