Inequações e Valor absoluto

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Inequações

1 Inequações

- Inequações lineares
- Inequações não lineares

2 Valor Absoluto

Propriedades para inequações

$<$, Menor que

$\leq$, Menor que ou igual à

$>$, Maior que

$\geq$, Maior que ou igual à

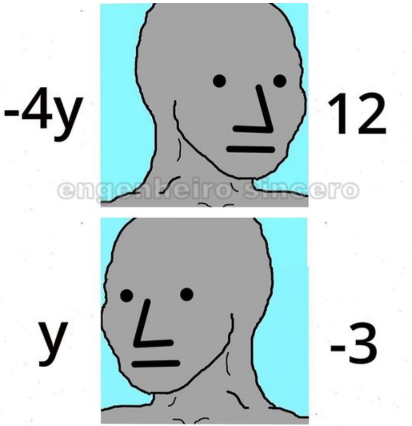
Quando não tem igualdade junto ($<$ ou $>$) chamamos de *desigualdade estrita*.

Propriedades para inequações

- $a > b$ e $b > c \Rightarrow a > c$. (Transitividade)
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c$. (Axioma 2 de Euclides)

Propriedades para inequações

- $a > b$ e $b > c \Rightarrow a > c$. (Transitividade)
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c$. (Axioma 2 de Euclides)
- Se $a > b$, então $\begin{cases} ac > bc, & \text{se } c > 0 \\ ac < bc, & \text{se } c < 0 \end{cases}$.



Propriedades para inequações

- $a > b$ e $b > c \Rightarrow a > c$. (Transitividade)
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c$. (Axioma 2 de Euclides)
- Se $a > b$, então $\begin{cases} ac > bc, & \text{se } c > 0 \\ ac < bc, & \text{se } c < 0 \end{cases}$.

Para resolver uma inequação, seguimos passos semelhantes aos da equação, tomando cuidado ao multiplicar por negativos (última propriedade)

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$.

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$.

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Subtrai 7)}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$.

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Subtrai 7)}$$

$$2x \underbrace{+7 - 7}_{\color{red}{\to 0}} < 5x - 8 - 7$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$.

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Subtrai 7)}$$

$$2x \underbrace{+7 - 7}_{\to 0} < 5x - 8 - 7$$

$$2x < 5x - 15 \qquad \text{(Subtrai } 5x\text{)}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$.

$$\begin{aligned} 2x + 7 &< 5x - 8 & \text{(Subtrai 7)} \\ 2x \underbrace{+7 - 7}_{\color{red}{\to 0}} &< 5x - 8 - 7 & \\ 2x &< 5x - 15 & \text{(Subtrai } 5x\text{)} \\ 2x - 5x &< \underbrace{-5x + 5x}_{\color{red}{\to 0}} - 15 & \end{aligned}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x+7<5x-8$.

$$2x+7<5x-8 \qquad \text{(Subtrai 7)}$$

$$2x\underbrace{+7-7}_{\to 0}<5x-8-7$$

$$2x<5x-15 \qquad \text{(Subtrai } 5x\text{)}$$

$$2x-5x<\underbrace{-5x+5x}_{\to 0}-15$$

$$-3x<-15 \qquad \text{(Divide por } -3\text{)}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$.

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Subtrai 7)}$$

$$2x \underbrace{+7 - 7}_{\to 0} < 5x - 8 - 7$$

$$2x < 5x - 15 \qquad \text{(Subtrai } 5x\text{)}$$

$$2x - 5x < \underbrace{-5x + 5x}_{\to 0} - 15$$

$$-3x < -15 \qquad \text{(Divide por } -3\text{)}$$

$$x > 5$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$. (outro modo)

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$. (outro modo)

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Soma 8)}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$. (outro modo)

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Soma 8)}$$
$$2x + 7 + 8 < 5x \underbrace{-8 + 8}_{\to 0}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$. (outro modo)

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Soma 8)}$$

$$2x + 7 + 8 < 5x \underbrace{-8 + 8}_{\to 0}$$

$$2x + 15 < 5x \qquad \text{(Subtrai } 2x\text{)}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$. (outro modo)

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Soma 8)}$$

$$2x + 7 + 8 < 5x \underbrace{-8 + 8}_{\to 0}$$

$$2x + 15 < 5x \qquad \text{(Subtrai } 2x\text{)}$$

$$\underbrace{-2x + 2x}_{\to 0} + 15 < 5x - 2x$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$. (outro modo)

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Soma 8)}$$

$$2x + 7 + 8 < 5x \underbrace{-8 + 8}_{\to 0}$$

$$2x + 15 < 5x \qquad \text{(Subtrai } 2x\text{)}$$

$$\underbrace{-2x + 2x}_{\to 0} + 15 < 5x - 2x$$

$$15 < 3x \qquad \text{(Divide por 3)}$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$. (outro modo)

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Soma 8)}$$

$$2x + 7 + 8 < 5x \underbrace{-8 + 8}_{\to 0}$$

$$2x + 15 < 5x \qquad \text{(Subtrai } 2x\text{)}$$

$$\underbrace{-2x + 2x}_{\to 0} + 15 < 5x - 2x$$

$$15 < 3x \qquad \text{(Divide por 3)}$$

$$5 < x \equiv x > 5$$

Exemplo

Ex.: Resolva a inequação $2x + 7 < 5x - 8$. (outro modo)

$$2x + 7 < 5x - 8 \qquad \text{(Soma 8)}$$

$$2x + 7 + 8 < 5x \underbrace{-8 + 8}_{\to 0}$$

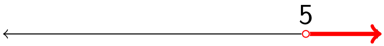
$$2x + 15 < 5x \qquad \text{(Subtrai } 2x\text{)}$$

$$\underbrace{-2x + 2x}_{\to 0} + 15 < 5x - 2x$$

$$15 < 3x \qquad \text{(Divide por 3)}$$

$$5 < x \equiv x > 5$$

Resposta: $(5, \infty)$ $\quad \{x \in \mathbb{R} | 5 < x\}$



Inequação Dupla

Para tratarmos com uma inequação dupla, é necessário que as operações sejam efetuadas em todos os membros da inequação, de forma a deixar a variável x em apenas um dos membros.

Inequação Dupla

Para tratarmos com uma inequação dupla, é necessário que as operações sejam efetuadas em todos os membros da inequação, de forma a deixar a variável x em apenas um dos membros.

Ex.: Resolva a inequação $-6 < 3 - 7x \leq 8$.

Inequação Dupla

Para tratarmos com uma inequação dupla, é necessário que as operações sejam efetuadas em todos os membros da inequação, de forma a deixar a variável x em apenas um dos membros.

Ex.: Resolva a inequação $-6 < 3 - 7x \leq 8$.

$$-6 < 3 - 7x \leq 8 \qquad \text{Subtr.3}$$
$$-9 < -7x \leq 5$$

Inequação Dupla

Para tratarmos com uma inequação dupla, é necessário que as operações sejam efetuadas em todos os membros da inequação, de forma a deixar a variável x em apenas um dos membros.

Ex.: Resolva a inequação $-6 < 3 - 7x \leq 8$.

$$\begin{aligned} -6 < 3 - 7x &\leq 8 && \text{Subtr.3} \\ -9 < -7x &\leq 5 && \\ \frac{9}{7} > x &\geq \frac{-5}{7} && \text{Div.} -7 \end{aligned}$$

Inequação Dupla

Para tratarmos com uma inequação dupla, é necessário que as operações sejam efetuadas em todos os membros da inequação, de forma a deixar a variável x em apenas um dos membros.
Ex.: Resolva a inequação $-6 < 3 - 7x \leq 8$.

$$-6 < 3 - 7x \leq 8 \qquad \text{Subtr.3}$$

$$-9 < -7x \leq 5$$

$$\frac{9}{7} > x \geq \frac{-5}{7} \qquad \text{Div.} - 7$$

$$\text{Solução: } \left[\frac{-5}{7}, \frac{9}{7}\right)$$

1 Inequações

- Inequações lineares
- Inequações não lineares

2 Valor Absoluto

Inequações não lineares

Quando é possível fatorar um dos lados de uma inequação não linear em fatores lineares, é preciso fazer o *estudo de sinais*. Se um tal fator jamais é zero em um intervalo, então é positivo ou negativo em todo o intervalo

Inequações não lineares

Quando é possível fatorar um dos lados de uma inequação não linear em fatores lineares, é preciso fazer o *estudo de sinais*. Se um tal fator jamais é zero em um intervalo, então é positivo ou negativo em todo o intervalo

Passos

i. Determine os pontos nos quais cada fator é 0. Esses são chamados de *pontos críticos*.
ii. Desenhe uma reta numerada e exiba os pontos críticos.
iii. Determine o sinal de cada fator em cada intervalo; então, usando leis de multiplicação ou divisão, verifique o sinal de toda a expressão do lado esquerdo da inequação.
iv. Escreva o conjunto solução.

Inequações não lineares

Exemplo I

Resolva $x^2 + x - 2 < 0$

Inequações não lineares

Exemplo I

Resolva $x^2 + x - 2 < 0$

i. Pontos Críticos: Fatorando, temos $(x-1)(x+2) < 0$. Os pontos críticos são -2 e 1.

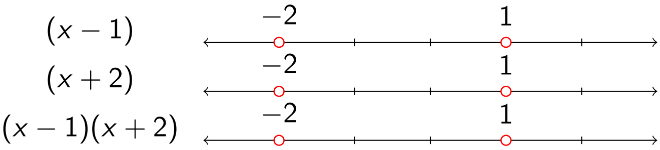
Inequações não lineares

Exemplo I

Resolva $x^2 + x - 2 < 0$

i. Pontos Críticos: Fatorando, temos $(x-1)(x+2) < 0$. Os pontos críticos são -2 e 1.

ii. Reta numerada: Faça uma para cada fator e uma para o produto, marcando os pontos críticos.



Inequações não lineares

Exemplo I

Resolva $x^2 + x - 2 < 0$

i. Pontos Críticos: Fatorando, temos $(x-1)(x+2) < 0$. Os pontos críticos são -2 e 1.

ii. Reta numerada: Faça uma para cada fator e uma para o produto, marcando os pontos críticos.

iii. Determine o sinal de cada fator em cada intervalo; então, usando leis de multiplicação ou divisão, verifique o sinal de toda a expressão do lado esquerdo da inequação.

		-2		1	
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$
$(x+2)$	$-$		$+$		$+$
$(x-1)(x+2)$	$+$		$-$		$+$

Inequações não lineares

Exemplo I

Resolva $x^2 + x - 2 < 0$

i. Pontos Críticos: Fatorando, temos $(x-1)(x+2) < 0$. Os pontos críticos são -2 e 1.

ii. Reta numerada: Faça uma para cada fator e uma para o produto, marcando os pontos críticos.

iii. Determine o sinal de cada fator em cada intervalo; então, usando leis de multiplicação ou divisão, verifique o sinal de toda a expressão do lado esquerdo da inequação.

		-2		1	
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$
$(x+2)$	$-$		$+$		$+$
$(x-1)(x+2)$	$+$		$-$		$+$

iv. Conjunto solução: Os valores negativos estão no intervalo $(-2, 1)$. Como não tem igualdade, o intervalo é aberto.

Inequações não lineares
Exemplo II

Resolva $x^3 \leq x^2 + 6x$

Inequações não lineares

Exemplo II

Resolva $x^3 \leq x^2 + 6x$

i. Fatorando:

$$\begin{aligned} x^3 &\leq x^2 + 6x & & \\ x^3 - x^2 - 6x &\leq 0 & & \text{Subtr.}(x^2 + 6x) \\ x\left(x^2 - x - 6\right) &\leq 0 & & x \text{ em evidência} \\ x(x-3)(x+2) &\leq 0 & & \text{Fatorando} \end{aligned}$$

Pontos críticos -2, 0, 3.

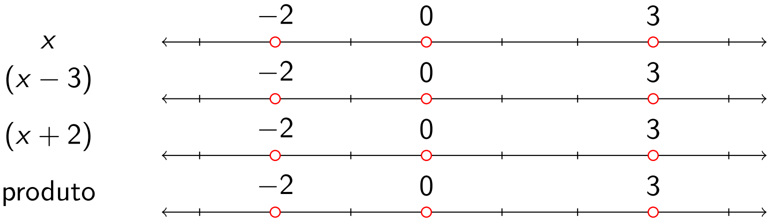
Inequações não lineares

Exemplo II

Resolva $x^3 \leq x^2 + 6x$

i. Pontos críticos -2, 0, 3.

ii. Retas



Inequações não lineares

Exemplo II

Resolva $x^3 \leq x^2 + 6x$

i. Pontos críticos -2, 0, 3.

ii. Retas

iii. Sinais

		-2		0		3	
x	$-$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$
$(x-3)$	$-$	$\circ$	$-$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
$(x+2)$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$
produto	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

Inequações não lineares

Exemplo II

Resolva $x^3 \leq x^2 + 6x$

i. Pontos críticos -2, 0, 3.

ii. Retas

iii. Sinais

iv. Conjunto: Como queremos $x\,(x-3)\,(x+2) \leq 0$, pegamos os valores negativos e os pontos críticos. Por isso intervalo fechado.

Em notação $(-\infty, -2] \cup [0, 3]$.

Resolva $\dfrac{2x}{x-3} \geq 3$.
Note que não é correto multiplicar ambos os lados por $x-3$, pois não se sabe qual é o sinal deste fator.

Resolva $\dfrac{2x}{x-3} \geq 3$.

i. Fatorando:

$$\frac{2x}{x-3} - 3 \geq 0 \qquad \text{Subtr. } 3$$

$$\frac{2x}{x-3} - \frac{3(x-3)}{x-3} \geq 0 \qquad \text{Soma Frações}$$

$$\frac{2x-3x+9}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{-x+9}{x-3} \geq 0$$

Pontos críticos: 3 e 9.

Inequações não lineares

Exemplo III

Resolva $\dfrac{2x}{x-3} \geq 3.$ $\left[\text{ou então } \dfrac{-x+9}{x-3} \geq 0\right]$

i. Pontos críticos: 3 e 9.

ii. Retas

iii. Sinais

$(-x+9)$	$+$	3	$+$	$+$	9	$-$
$(x-3)$	$-$	3	$+$	$+$	9	$+$
quociente	$-$	3	$+$	$+$	9	$-$

Inequações não lineares

Exemplo III

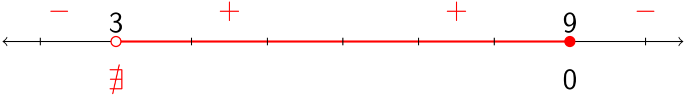
Resolva $\dfrac{2x}{x-3} \geq 3$. $\left[\text{ou então } \dfrac{-x+9}{x-3} \geq 0\right]$

i. Pontos críticos: 3 e 9.

ii. Retas

iii. Sinais

iv. Conjunto: Queremos os valores positivos e os pontos críticos. Por isso intervalo fechado. Mas $x \neq 3$, pois não existe divisão por zero!



Em notação $(3, 9]$.

Valor Absoluto

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Propriedades

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- **Importante:** $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdade Triangular)

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Propriedades

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- **Importante:** $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdade Triangular)

Expressões com módulo

$$|f(x)| = a \implies \begin{cases} f(x) = a, & \text{e} \\ f(x) = -a \end{cases}$$

Valor absoluto

Exemplo I - Equação

Ex.: Resolva a equação $|2x+3| = 7$.

R. :

$$
\begin{aligned}
|2x+3| = 7 & \qquad \text{(“Abrir o Módulo”)} \\
\Rightarrow \begin{cases} 2x+3 = 7 \\ 2x+3 = -7 \end{cases} & \qquad \text{(Subtrai 3 em cada eq.)} \\
\Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2x = -10 \end{cases} & \qquad \text{(Divide por 2)} \\
\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases} &
\end{aligned}
$$

■

Valor absoluto

Inequações

$$|f(x)| < a \Rightarrow \begin{cases} f(x) < a \quad \text{e} \\ f(x) > -a \end{cases} \qquad |f(x)| > a \Rightarrow \begin{cases} f(x) > a \quad \text{ou} \\ f(x) < -a \end{cases}$$

Obs.: $|f(x)| < a$ pode ser escrito como $-a < f(x) < a$.

Ex.: Resolva a inequação $|-4x+2| < 10$.

R. :

$$|-4x+2| < 10 \qquad \text{(“Abrir o Módulo”)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x+2 < 10 & \text{e} \\ -4x+2 > -10 \end{cases} \qquad \text{(Subtrai 2 em cada ineq.)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x < 8 & \text{e} \\ -4x > -12 \end{cases} \qquad \text{(Divide por } -4\text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -2 & \text{e} \\ x < 3 \end{cases}$$

■

Ex.: Resolva a inequação $|-4x+2| < 10$.

R. :

Outra forma:

$$\begin{aligned} |-4x+2| &< 10 && \text{("Abrir o Módulo")} \\ -10 < -4x+2 &< 10 && \text{(Subtrai 2)} \\ -12 < -4x &< 8 && \text{(Divide por } -4) \\ 3 > x &> -2 \end{aligned}$$

Conjunto Solução: $(-2, 3)$.

Ex.: Resolva a inequação $|-3x-4|>5$.

R. :

$$|-3x-4|>5 \qquad \text{("Abrir o Módulo")}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x-4>5 & \text{ou} \\ -3x-4<-5 \end{cases} \qquad \text{(Soma 4 em cada ineq.)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x>9 & \text{ou} \\ -3x<-1 \end{cases} \qquad \text{(Divide por } -3\text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<-3 & \text{ou} \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Para esta inequação não é permitida a outra forma de escrita.

Até a próxima!!!