Conjuntos

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definições e Conceitos

“Definição”:

Chamamos *conjunto* uma coleção de elementos (objetos) que estejam em uma lista ou que tenham alguma propriedade específica em comum como lei de formação do conjunto. Toda a Matemática atual está formulada na linguagem de conjuntos.

“Definição”:

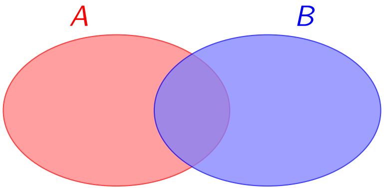
Chamamos *conjunto* uma coleção de elementos (objetos) que estejam em uma lista ou que tenham alguma propriedade específica em comum como lei de formação do conjunto. Toda a Matemática atual está formulada na linguagem de conjuntos.

Exemplos:

- A={carro, moto, avião, foguete};
- B={2,4,6,8,10,...}={naturais pares}

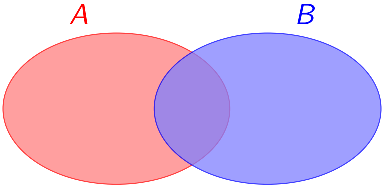
Representação

Conjuntos são representados por letras *MAIÚSCULAS* do alfabeto latino, podendo seus elementos serem listados entre chaves “{” e “}” ou em diagramas como os diagramas de Venn (ou Venn-Euler).



Representação

Conjuntos são representados por letras *MAIÚSCULAS* do alfabeto latino, podendo seus elementos serem listados entre chaves "{" e "}" ou em diagramas como os diagramas de Venn (ou Venn-Euler).



Nunca utilize C={conjunto dos pares}. As chaves já dizem que se trata de um conjunto. O correto é C={pares}. Os elementos dos conjuntos são representados genericamente por letras *minúsculas*.

Pertinência

A principal relação entre um conjunto e elementos é a *pertinência* ou seja, quando o elemento **está** ou **não está** dentre os elementos de um conjunto.

- Se x é um elemento do conjunto A dizemos que x *pertence ao conjunto A* utilizando a notação $x \in A$.
- Caso contrário, dizemos que x **não** *pertence ao conjunto A* com notação $x \notin A$.

Pertinência

A principal relação entre um conjunto e elementos é a *pertinência* ou seja, quando o elemento **está** ou **não está** dentre os elementos de um conjunto.

- Se x é um elemento do conjunto A dizemos que x *pertence ao conjunto* A utilizando a notação $x \in A$.
- Caso contrário, dizemos que x **não** *pertence ao conjunto* A com notação $x \notin A$.

Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos "o objeto x goza da propriedade P" ou "o objeto y satisfaz a condição C", podemos escrever $x \in P$ ou $y \in C$, onde P={objetos que gozam a propriedade P} e C={objetos que satisfazem a condição C}.

Tipos especiais

Existem três tipos especiais de conjuntos:

Tipos especiais

Existem três tipos especiais de conjuntos:

- *Conjunto Universo:* É o conjunto que contém todos os possíveis elementos de um determinado contexto.
  Ex.: Em estudo relativo a alunos do *campus*, o conjunto universo terá como elementos todos os alunos do *campus*.

Tipos especiais

Existem três tipos especiais de conjuntos:

- *Conjunto Universo:* É o conjunto que contém todos os possíveis elementos de um determinado contexto.
  Ex.: Em estudo relativo a alunos do *campus*, o conjunto universo terá como elementos todos os alunos do *campus*.
- *Conjunto Vazio:* É o conjunto que não tem nenhum elemento.
  É representado por $\{\}$ ou $\emptyset$.
  Ex.: O conjunto de todos os naturais que são pares e ímpares ao mesmo tempo.

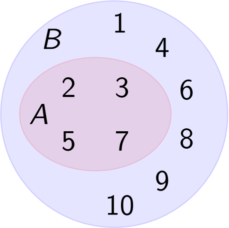
Tipos especiais

Existem três tipos especiais de conjuntos:

- *Conjunto Universo:* É o conjunto que contém todos os possíveis elementos de um determinado contexto.
  Ex.: Em estudo relativo a alunos do *campus*, o conjunto universo terá como elementos todos os alunos do *campus*.
- *Conjunto Vazio:* É o conjunto que não tem nenhum elemento.
  É representado por $\{\}$ ou $\emptyset$.
  Ex.: O conjunto de todos os naturais que são pares e ímpares ao mesmo tempo.
- *Conjunto Unitário:* É o conjunto que contém apenas um elemento.
  Ex.: Em geometria uma reta é um conjunto específico de pontos (embora esta não seja uma definição formal de reta). Assim, duas retas concorrentes tem como interseção um único ponto, ou seja, um conjunto unitário.

Subconjuntos e Igualdade de Conjuntos

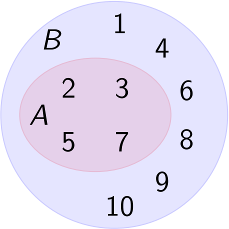
Consideremos dois conjuntos A e B. Se todos os elementos do conjunto A também forem elementos do conjunto B dizemos que A é **subconjunto** de B, ou ainda que A *está contido* em B, representando por $A \subset B$. Também pode-se dizer que B *contém* A, representando por $B \supset A$.



Ex.: A=$\{2,3,5,7\}$ e B=$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, vemos que todos os elementos de A também são elementos de B. assim, $A \subset B$.
Se algum elemento de A não for elemento de B, dizemos que A *não está contido* em B, representando por $A \not\subset B$.

Subconjuntos e Igualdade de Conjuntos

Consideremos dois conjuntos A e B. Se todos os elementos do conjunto A também forem elementos do conjunto B dizemos que A é **subconjunto** de B, ou ainda que A *está contido* em B, representando por $A \subset B$. Também pode-se dizer que B *contém* A, representando por $B \supset A$.



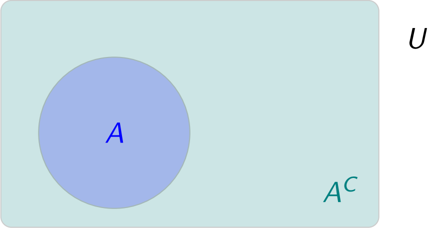
Ex.: A=$\{2,3,5,7\}$ e B=$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, vemos que todos os elementos de A também são elementos de B. assim, $A \subset B$.
Se algum elemento de A não for elemento de B, dizemos que A *não está contido* em B, representando por $A \not\subset B$.

Se, dados dois conjuntos, pudermos dizer que $A \subset B$ (todos os elementos de A são elementos de B) e $B \subset A$ (todos os elementos de B são elementos de A), então temos a **igualdade** dos conjuntos, representando por $A = B$.

Conjunto complementar

Dentro de um contexto onde é fixado um conjunto universo U, dado um conjunto A, necessariamente $A \subset U$, pois U contém todos os elementos do contexto, inclusive os elementos de A. Os elementos de U que não pertencerem ao conjunto A formam o *conjunto complementar* de A, denotado por A^C.

Ex.: $U = \mathbb{N} = \{\text{naturais}\}$. Se P$=\{$pares$\}\subset \mathbb{N}$, então P^C$=\{$naturais não pares$\}=\{$ímpares$\}$.

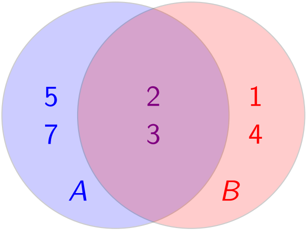


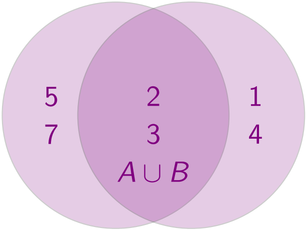
Operações

União $\cup$

Dados os conjuntos A e B, o conjunto união $A \cup B$ (lê-se "A união B") será o conjunto que terá todos os elementos de A e todos os elementos de B, ignoradas as repetições.

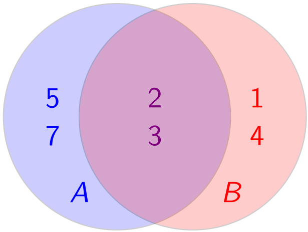
Ex.: Sendo $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ temos $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Os elementos de $A \cup B$ são elementos de A **ou** são elementos de B.

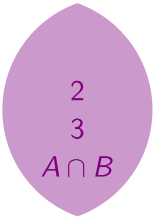




Interseção $\cap$

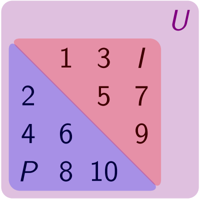
Dados os conjuntos A e B, o conjunto interseção $A \cap B$ (lê-se "A inter B") será o conjunto que terá todos os elementos de A que também forem elementos de B, ignoradas as repetições.
Ex.: Sendo $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ temos $A \cap B = \{2, 3\}$. Os elementos de $A \cap B$ são elementos de A **e** são elementos de B





Interseção $\cap$

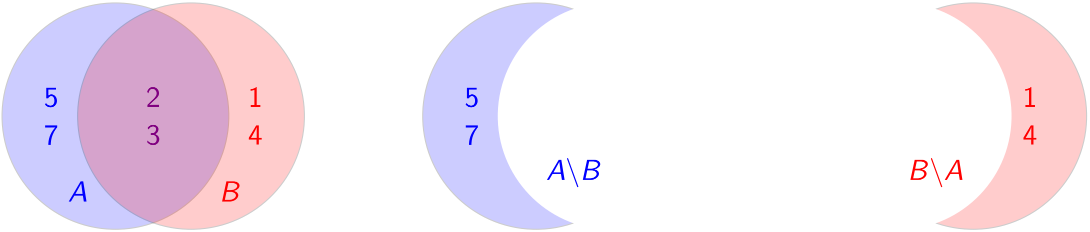
Dois conjuntos A e B são ditos **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$.
Ex.: Para algum universo U com $A \subset U$ temos que A e A^C são disjuntos, pois é impossível que algum $x \in U$ possa, ao mesmo tempo, $x \in A$ e $x \notin A$. Assim, $A \cap A^C = \emptyset$. No exemplo abaixo, $U = \{\text{naturais de 1 a 10}\}$, sendo $P = \{\text{pares em } U\}$ e $I = \{\text{ímpares em } U\}$. Como não há número par e ímpar ao mesmo tempo, $P \cap I = \emptyset$.



Diferença $\setminus$

Dados os conjuntos A e B, o conjunto diferença $A \setminus B$ ou $A - B$ (lê-se "A menos B") será o conjunto que terá todos os elementos de A que não forem elementos de B, ignoradas as repetições.

Ex.: Sendo $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ temos $A \setminus B = \{5, 7\}$ e $B \setminus A = \{1, 4\}$



Cardinalidade de um Conjunto

Um conjunto A é chamado *finito* ou com número $n \in \mathbb{N}$ de elementos quando é possível estabelecer uma correspondência entre cada um dos naturais menores ou iguais a n com um, e somente um, elemento do conjunto. Em outras palavras, quando é possível "contar" os elementos de um conjunto até um determinado valor n. O número n é chamado *cardinal de um conjunto*, podendo ser representado por $\#\text{A}$ ou $n(A)$.
Ex.: $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$. Associando $a \leftrightarrow 1$, $b \leftrightarrow 2$, ... , $j \leftrightarrow 10$ obtemos $\#A = 10$ ou $n(A) = 10$.

Cardinalidade da União

Dados dois conjuntos finitos A e B, temos que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

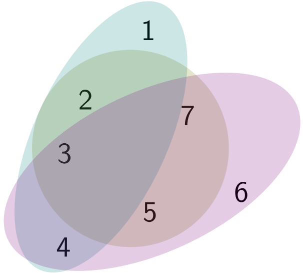
Ex.: $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos $n(A) = 4$, $n(B) = 4$. Vimos que $A \cap B = \{2, 3\}$ e, portanto, $n(A \cap B) = 2$. Assim, $n(A \cup B) = 4 + 4 - 2 = 6$, o que é fato pois $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Cardinalidade da União

Para 3 conjuntos A, B, C temos

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Ex.: $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
Como são poucos elementos, é fácil calcular
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Por outro lado, se tivéssemos apenas
$n(A) = n(B) = 4$, $n(C) = 5$,
$n(A \cap B) = n(B \cap C) = 2$, $n(A \cap C) = 3$ e
$n(A \cap B \cap C) = 1$



então $n(A \cup B \cup C) = 4 + 4 + 5 - 2 - 2 - 3 + 1 = 7$

Conjuntos e Lógica

Relação com Lógica

A linguagem de conjuntos é uma das formas que permite o trabalho com raciocínio lógico. Abaixo seguem as correspondências entre conjuntos e lógica:

Conjuntos	*Lógica*	*Notação Conjuntos*	*Notação Lógica*
$\cup$ - União	$\vee$ - Ou	$A \cup B$	$A \vee B$
$\cap$ - Interseção	$\wedge$ - E	$A \cap B$	$A \wedge B$
^{C} - Complementar	$\neg$ - Não	A^C	$\neg A$
$\subset$ - Inclusão	$\Rightarrow$ - Implica (Se ... então ...)	$A \subset B$	$A \Rightarrow B$
$=$ - Igualdade	$\Leftrightarrow$ - Equivalência (... se, e somente se, ...)	$A = B$	$A \Leftrightarrow B$

Quantificadores

As expressões "Para todo" e "Para algum" são chamadas de *quantificadores*, tendo as seguintes representações

- **Universal:** Símbolo $\forall$ representa as expressões "Para todo", "Para qualquer", "Qualquer que seja", e similares.
- **Existencial:** Símbolo $\exists$ representa as expressões "Existe algum", "para algum". É possível especificar com o símbolo $\exists!$ a expressão "Existe um único" .

Exemplos: Considerando $F = \{f|f$ é filósofo$\}$, $M = \{m|m$ é matemático$\}$, $C = \{c|c$ é cientista$\}$, $P = \{p|p$ é professor$\}$. (Obs.: O símbolo "|" significa "tal que")

Frase	Lógica	Conjuntos
Todos os Matemáticos são Cientistas	$m \Rightarrow c$	$M \subset C$
Alguns matemáticos são professores	$\exists m \wedge p$	$M \cap P \neq \emptyset$
Todos os filósofos são cientistas ou professores	$f \Rightarrow c \vee p$	$F \subset (C \cup P)$
Nem todo professor é cientista	$\neg(p \Rightarrow c)$ ou $p \wedge \neg c$	$P \not\subset C$

Operações Lógicas

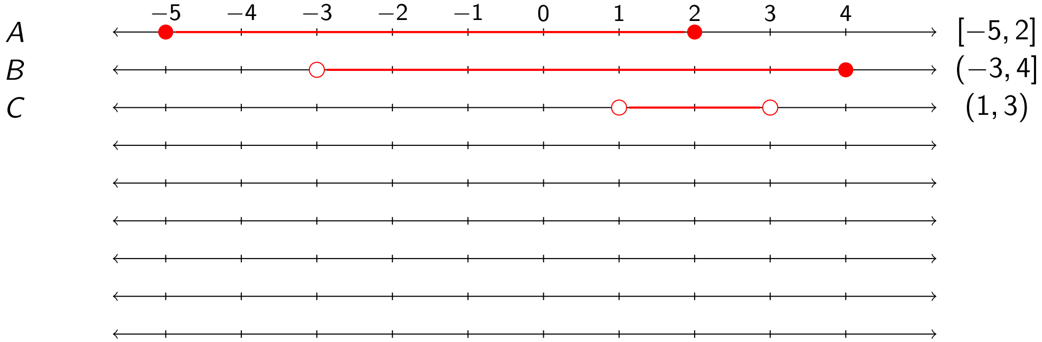
Nome	Lógica	Conjuntos
Comutatividade	$A \vee B = B \vee A$ e $A \wedge B = B \wedge A$	$A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$
Associatividade	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ e $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributividade	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ e $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Leis de "De Morgan"	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
Contrapositiva	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	$A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$
Negação da Negação	$\neg(\neg A) = A$	$(A^C)^C = A$

Intervalos

Intervalos são subconjuntos de números reais. As operações de união e interseção de intervalos são feitas de modo *semelhante* ao estudo de sinais de inequações.

Cuidado para não confundir

Ex.: $A = [-5, 2]$, $B = (-3, 4]$, $C = (1, 3)$. Encontrar $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \backslash C$.

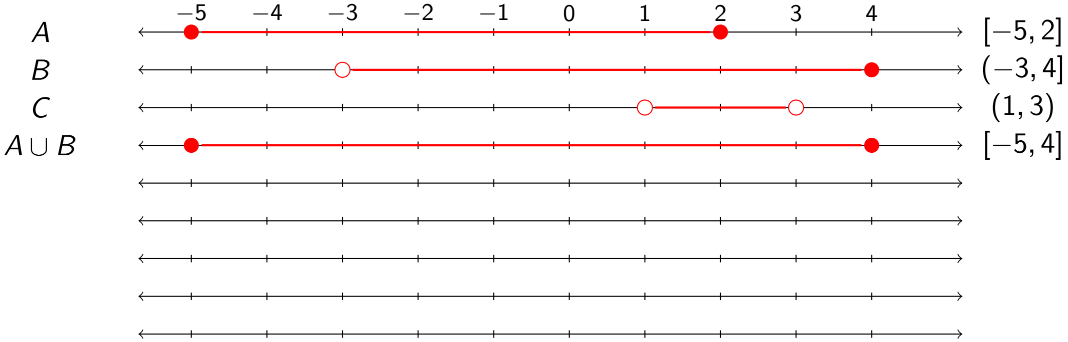


Intervalos

Intervalos são subconjuntos de números reais. As operações de união e interseção de intervalos são feitas de modo *semelhante* ao estudo de sinais de inequações.

Cuidado para não confundir

Ex.: $A = [-5, 2]$, $B = (-3, 4]$, $C = (1, 3)$. Encontrar $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \backslash C$.

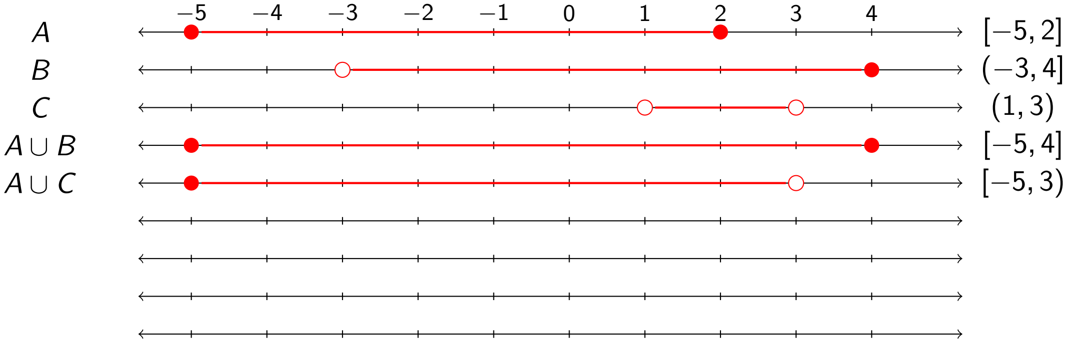


Intervalos

Intervalos são subconjuntos de números reais. As operações de união e interseção de intervalos são feitas de modo *semelhante* ao estudo de sinais de inequações.

Cuidado para não confundir

Ex.: $A = [-5, 2]$, $B = (-3, 4]$, $C = (1, 3)$. Encontrar $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \backslash C$.

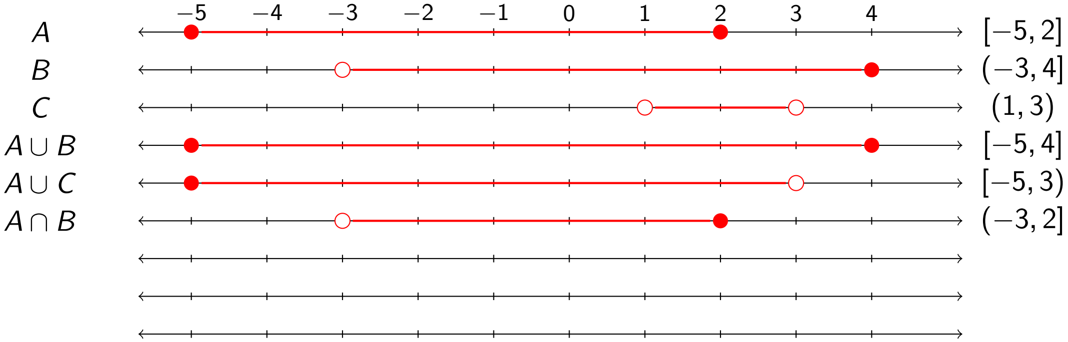


Intervalos

Intervalos são subconjuntos de números reais. As operações de união e interseção de intervalos são feitas de modo *semelhante* ao estudo de sinais de inequações.

Cuidado para não confundir

Ex.: $A = [-5, 2]$, $B = (-3, 4]$, $C = (1, 3)$. Encontrar $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \backslash C$.

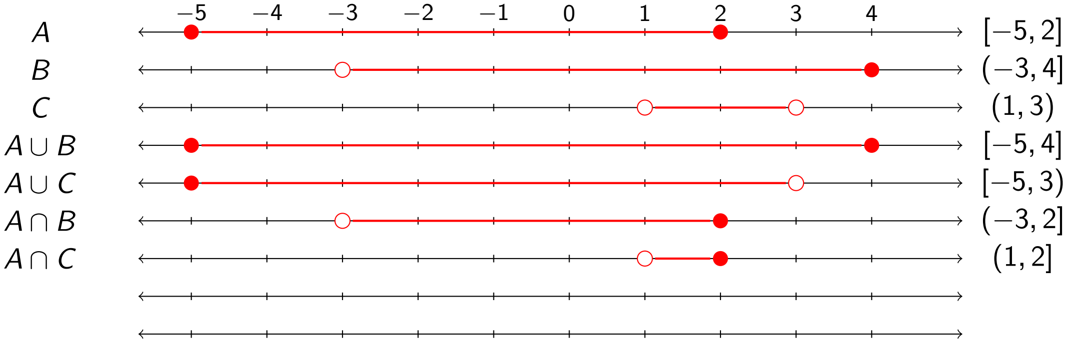


Intervalos

Intervalos são subconjuntos de números reais. As operações de união e interseção de intervalos são feitas de modo *semelhante* ao estudo de sinais de inequações.

Cuidado para não confundir

Ex.: $A = [-5, 2]$, $B = (-3, 4]$, $C = (1, 3)$. Encontrar $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \setminus C$.

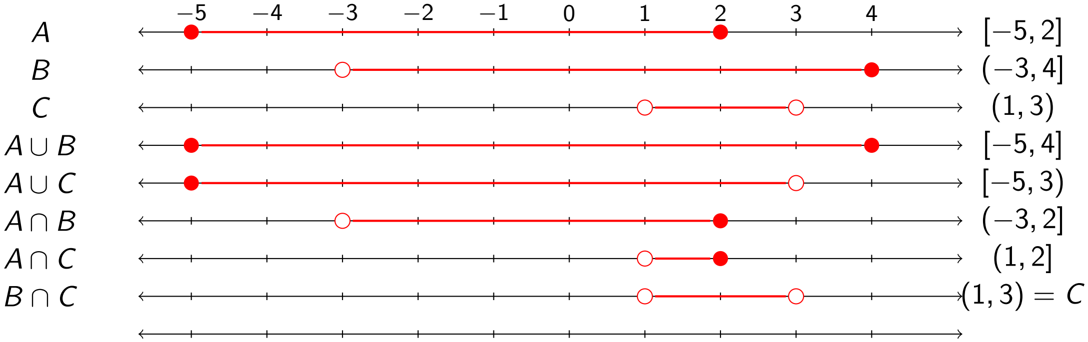


Intervalos

Intervalos são subconjuntos de números reais. As operações de união e interseção de intervalos são feitas de modo *semelhante* ao estudo de sinais de inequações.

Cuidado para não confundir

Ex.: $A = [-5, 2]$, $B = (-3, 4]$, $C = (1, 3)$. Encontrar $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \backslash C$.

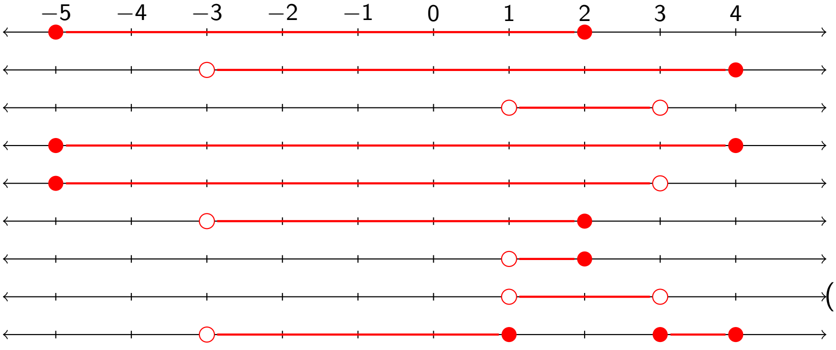


Intervalos

Intervalos são subconjuntos de números reais. As operações de união e interseção de intervalos são feitas de modo *semelhante* ao estudo de sinais de inequações.

Cuidado para não confundir

Ex.: $A = [-5, 2]$, $B = (-3, 4]$, $C = (1, 3)$. Encontrar $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \backslash C$.



A	$[-5, 2]$
B	$(-3, 4]$
C	$(1, 3)$
$A \cup B$	$[-5, 4]$
$A \cup C$	$[-5, 3)$
$A \cap B$	$(-3, 2]$
$A \cap C$	$(1, 2]$
$B \cap C$	$(1, 3) = C$
$B \backslash C$	$(-3, 1] \cup [3, 4]$

Até a próxima!!!