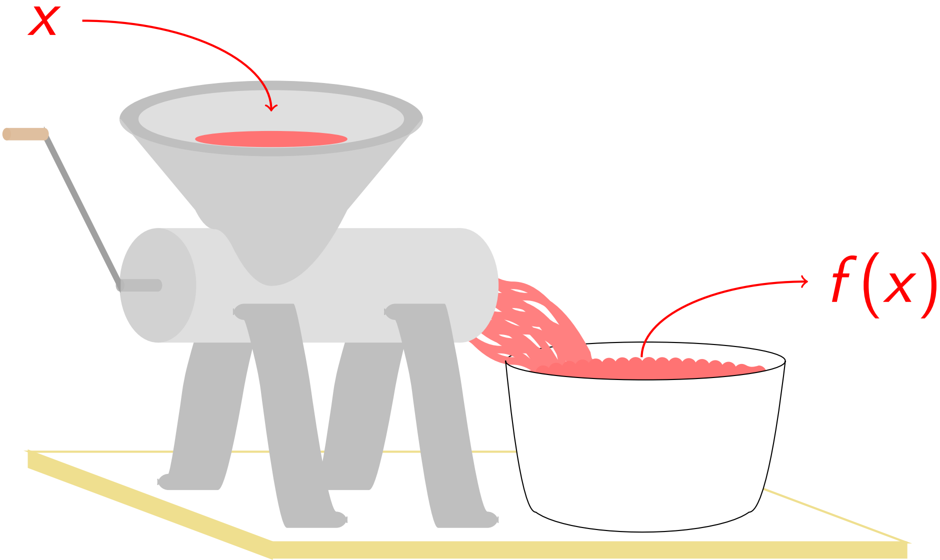
Conceitos de Funções

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná


x
$f(x)$

Conceitos

Conceitos de Função

Função: Dados $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, e uma regra que nos diga como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ *função* é a aplicação desta regra nos elementos de A.

Para ser função é preciso que:

Conceitos de Função

Função: Dados $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, e uma regra que nos diga como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ *função* é a aplicação desta regra nos elementos de A.

Para ser função é preciso que:

- Todo $x \in A$ seja associado a algum $y \in B$.

Conceitos de Função

Função: Dados $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, e uma regra que nos diga como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ *função* é a aplicação desta regra nos elementos de A.

Para ser função é preciso que:

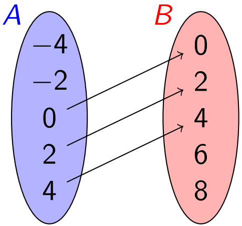
- Todo $x \in A$ seja associado a algum $y \in B$.
- Nenhum $x \in A$ seja associado a mais do que um $y \in B$.

Conceitos de Função

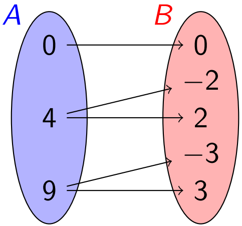
Função: Dados $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, e uma regra que nos diga como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ *função* é a aplicação desta regra nos elementos de A.

Para ser função é preciso que:

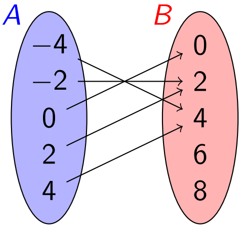
- Todo $x \in A$ seja associado a algum $y \in B$.
- Nenhum $x \in A$ seja associado a mais do que um $y \in B$.



$$f : A \to B$$
$$x \to x$$



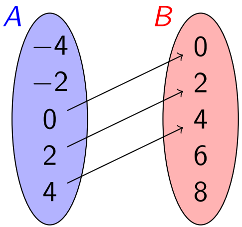
$$f : A \to B$$
$$x \to \sqrt{x}$$



$$f : A \to B$$
$$x \to |x|$$

Quais diagramas acima representam funções? Quais não? Por quê?

Conceitos

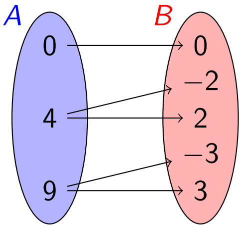


$$f : A \to B$$
$$x \to x$$

Este diagrama **não** representa função, pois dois elementos do domínio não tem valor associado no Contradomínio.

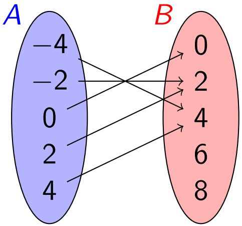
Conceitos

Este diagrama **não** representa função, pois os elementos 4 e 9 tem mais do que um valor associado no Contradomínio.



$$f : A \to B$$
$$x \to \sqrt{x}$$

Conceitos



$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to |x| \end{aligned}$$

Este diagrama representa uma função.

Conceitos

Domínio de uma função é o conjunto dos elementos nos quais a função é aplicada. Variável representativa comum: x.

Conceitos

Domínio de uma função é o conjunto dos elementos nos quais a função é aplicada. Variável representativa comum: x.

Contradomínio de uma função é o conjunto de todos os possíveis resultados obtidos quando a função é aplicada. Contém todos os elementos que poderão ser associados a um elemento do Domínio. Variável representativa comum: y.

Conceitos

Domínio de uma função é o conjunto dos elementos nos quais a função é aplicada. Variável representativa comum: x.

Contradomínio de uma função é o conjunto de todos os possíveis resultados obtidos quando a função é aplicada. Contém todos os elementos que poderão ser associados a um elemento do Domínio. Variável representativa comum: y.

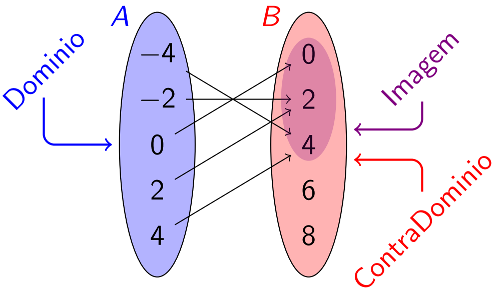
Imagem de uma função é o conjunto dos resultados efetivamente obtidos quando a função é aplicada. Notação representativa comum: $f(x)$.

Conceitos

$$f : A \to B$$

$$f(x) = |x|$$

No exemplo, a função está definida de A em B. Portanto, A é o seu domínio, B é o seu contradomínio. O subconjunto de B dos elementos efetivamente associados a algum elemento de A é a Imagem.



Conceitos

Quando não estão especificados quais são os conjuntos domínio e contradomínio de uma função:

Conceitos

Quando não estão especificados quais são os conjuntos domínio e contradomínio de uma função:

- Contradomínio: $B = \mathbb{R}$

Conceitos

Quando não estão especificados quais são os conjuntos domínio e contradomínio de uma função:

- Contradomínio: $B = \mathbb{R}$
- Domínio: o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de forma que possa ser aplicada a regra em todos os elementos de A, caracterizando uma função.

Conceitos

Quando não estão especificados quais são os conjuntos domínio e contradomínio de uma função:

- Contradomínio: $B = \mathbb{R}$
- Domínio: o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de forma que possa ser aplicada a regra em todos os elementos de A, caracterizando uma função.

Exemplos: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Esta função não é definida para $x = 0$. Logo, Domínio $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Conceitos

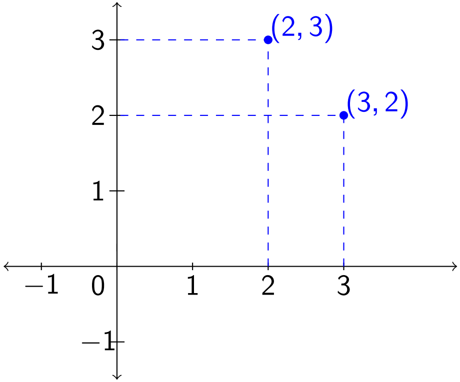
Quando não estão especificados quais são os conjuntos domínio e contradomínio de uma função:

- Contradomínio: $B = \mathbb{R}$
- Domínio: o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de forma que possa ser aplicada a regra em todos os elementos de A, caracterizando uma função.

Exemplos: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Esta função não é definida para $x = 0$. Logo, Domínio $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$f(x) = \sqrt{x}$. Esta função não é definida para $x < 0$. Logo, Domínio $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ que são os números reais não-negativos.

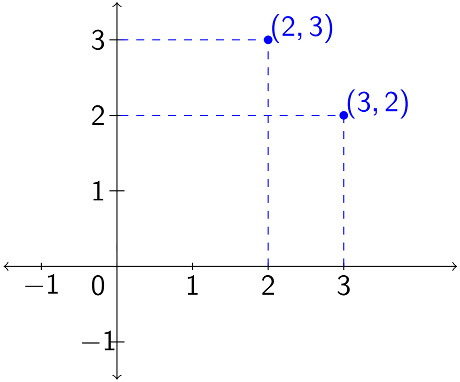
Coordenadas Cartesianas

Sistema de eixos ortogonais: Dois eixos perpendiculares Ox e Oy, que se intersectam no ponto O, formam um Sistema de Eixos Ortogonais. Um plano com estes eixos é chamado de *plano Cartesiano*. Um par ordenado (x, y) pode ser representado geometricamente como sendo um ponto do plano cartesiano, distando "x unidades" de O na direção de Ox e "y unidades" de O na direção do eixo Oy.



Coordenadas Cartesianas

Sistema de eixos ortogonais: Dois eixos perpendiculares Ox e Oy, que se intersectam no ponto O, formam um Sistema de Eixos Ortogonais. Um plano com estes eixos é chamado de *plano Cartesiano*. Um par ordenado (x, y) pode ser representado geometricamente como sendo um ponto do plano cartesiano, distando "x unidades" de O na direção de Ox e "y unidades" de O na direção do eixo Oy.



Note que a ordem dos elementos é importante. $(2, 3) \neq (3, 2)$. A primeira coordenada é chamada de **abscissa** e a segunda coordenada é chamada de **ordenada**.

Coordenadas Cartesianas

No plano cartesiano, a distância entre dois pontos é calculada usando o Teorema de Pitágoras. A consequência da aplicação deste teorema em dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é a seguinte fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Gráfico de uma função

Gráfico de uma função é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$. Para fazermos um esboço do gráfico, escolhemos um número suficiente de pontos (dependendo do tipo da função) e ligamos estes pontos.

Para uma função cujo único expoente em variável é 1, dois pontos são suficientes para o esboço do gráfico.

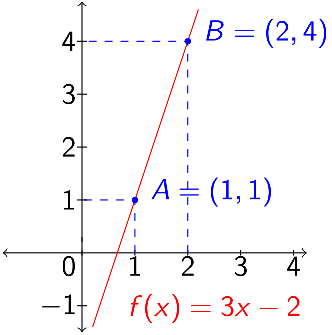


Gráfico de uma função

Gráfico de uma função é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$. Para fazermos um esboço do gráfico, escolhemos um número suficiente de pontos (dependendo do tipo da função) e ligamos estes pontos.

No caso de uma função quadrática como a da imagem abaixo, apenas dois pontos não são suficientes para um esboço do gráfico.

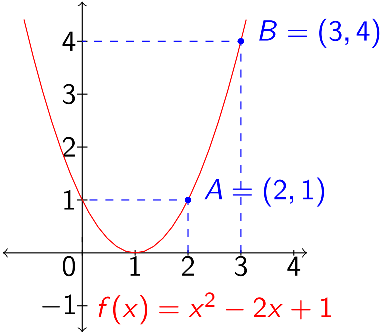


Gráfico de uma função

Gráfico de uma função é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$. Para fazermos um esboço do gráfico, escolhemos um número suficiente de pontos (dependendo do tipo da função) e ligamos estes pontos.

Com auxílio do gráfico, podemos determinar no plano cartesiano os conjuntos domínio e imagem.

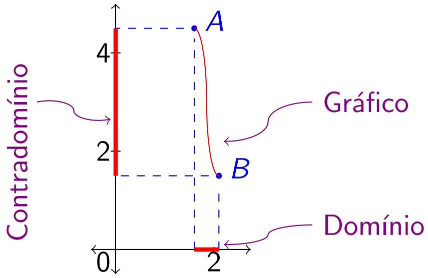
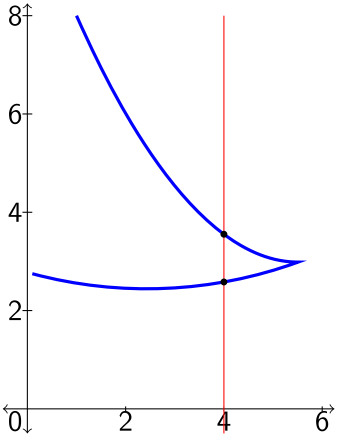


Gráfico de uma função

Para verificar se uma curva no plano cartesiano representa uma função é preciso verificar se qualquer reta vertical corta a curva apenas uma vez. Quando uma reta vertical corta a curva duas vezes (ou mais) cada coordenada y dos pontos de interseção é um elemento da imagem ao qual foi associado um único valor do domínio. Como um mesmo valor do domínio não pode ser associado a dois elementos distintos da imagem, não é uma função.



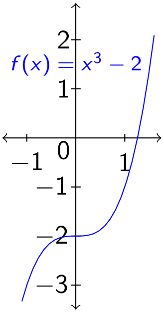
Classificação da Função: Crescimento

Com auxílio do gráfico também podemos notar comportamentos característicos da função em determinados intervalos e pontos do domínio com imagens importantes.

Classificação da Função: Crescimento

Com auxílio do gráfico também podemos notar comportamentos característicos da função em determinados intervalos e pontos do domínio com imagens importantes.

- Uma função será **crescente** em um intervalo $[a, b]$ se dados quaisquer $x_1 \in [a, b]$ e $x_2 \in [a, b]$, sendo $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$. A curva que representa o gráfico apontará para o sentido positivo do eixo do contradomínio (cresce).

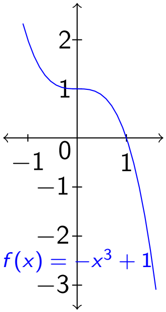


Exemplo de função crescente

Classificação da Função: Crescimento

Com auxílio do gráfico também podemos notar comportamentos característicos da função em determinados intervalos e pontos do domínio com imagens importantes.

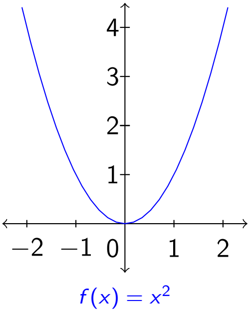
- Uma função será **crescente** em um intervalo $[a, b]$ se dados quaisquer $x_1 \in [a, b]$ e $x_2 \in [a, b]$, sendo $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$. A curva que representa o gráfico apontará para o sentido positivo do eixo do contradomínio (cresce).
- Uma função será **decrescente** em um intervalo $[a, b]$ se dados quaisquer $x_1 \in [a, b]$ e $x_2 \in [a, b]$, sendo $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$. A curva que representa o gráfico apontará para o sentido negativo do eixo do contradomínio (decresce).



Exemplo de função decrescente

Classificação da Função: Paridade

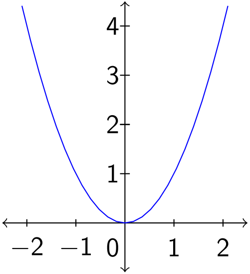
- Uma função é chamada de **par** se $f(x) = f(-x)$ para qualquer x do domínio. O gráfico da função é simétrico em relação ao eixo x. Exemplo: $f(x) = x^2$.



Função Par

Classificação da Função: Paridade

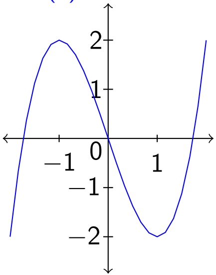
- Uma função é chamada de **par** se $f(x) = f(-x)$ para qualquer x do domínio. O gráfico da função é simétrico em relação ao eixo x. Exemplo: $f(x) = x^2$.
- Uma função é chamada de **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para qualquer x do domínio. O gráfico da função é simétrico em relação à origem. Exemplo: $f(x) = x^3 - 3x$.



$f(x) = x^2$

Função Par

$f(x) = x^3 - 3x$

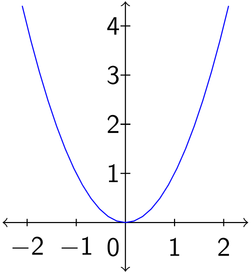


Função Ímpar

Pontos Críticos

Pontos de mudança de comportamento de uma função são chamados **pontos críticos**.

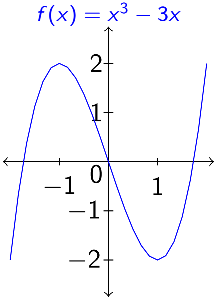
O ponto onde uma função deixa de ser *decrescente* e passa a ser *crescente* é conhecido como **ponto de mínimo local**, pois qualquer número que esteja bastante próximo a ele será maior do que ele. Na figura ao lado, 0 é ponto de mínimo da função $f(x) = x^2$.



$f(x) = x^2$

Pontos Críticos

O ponto onde uma função deixa de ser *crescente* e passa a ser *decrescente* é conhecido como **ponto de máximo local**, pois qualquer número que esteja bastante próximo a ele será menor do que ele. A função $f(x) = x^3 - 3x$ apresenta um ponto de máximo local no intervalo $(-1; 0)$ e um ponto de mínimo local no intervalo $(0; 1)$



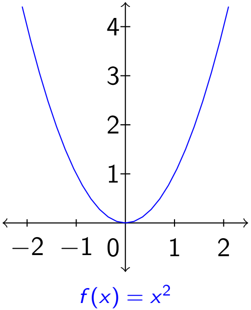
Zeros da função

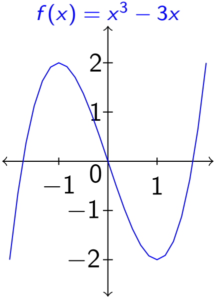
O ponto onde uma função corta (ou tangencia) o eixo x, são pontos da forma $(x, 0)$, ou seja, pontos da forma $f(x) = 0$. Estes pontos são chamados **zeros da função**.

Zeros da função

O ponto onde uma função corta (ou tangencia) o eixo x, são pontos da forma $(x, 0)$, ou seja, pontos da forma $f(x) = 0$. Estes pontos são chamados **zeros da função**.

Note que $f(x) = x^2$ apenas tangencia uma vez o eixo x, enquanto $f(x) = x^3 - 3x$ corta o eixo em três locais diferentes.





Injetividade e Sobrejetividade

Função Injetiva

Uma função de domínio A e contradomínio B é chamada **injetiva** (ou **injetora**) se ela transforma elementos diferentes de A em elementos diferentes de B. Podemos escrever esta afirmação de duas formas lógicas:

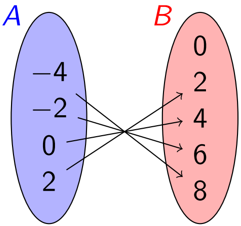
- Direta: Se $x_1 \in A$; $x_2 \in A$ e $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$
- Contrapositiva: Se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

Função Injetiva: Exemplos

Formas de compreender a injetividade visualmente:

Função Injetiva: Exemplos

Formas de compreender a injetividade visualmente:
No diagrama, não há elemento de B que seja imagem de mais de um elemento de A.

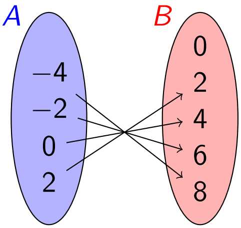


$$f : A \to B$$
$$x \to 4 - x$$

Função Injetiva: Exemplos

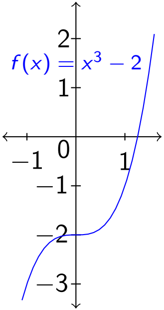
Formas de compreender a injetividade visualmente:

No diagrama, não há elemento de B que seja imagem de mais de um elemento de A.



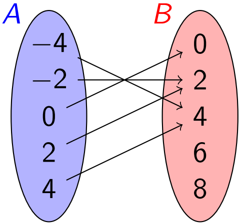
$$f : A \to B$$
$$x \to 4 - x$$

No gráfico, qualquer linha horizontal traçada cortará o gráfico apenas uma vez.



Exemplos de função não injetiva

A função $f : A \to B$, $x \to |x|$ não é injetiva pois temos os elementos 2 e 4 da imagem da função, que correspondem cada um a dois elementos diferentes no domínio. Temos, por exemplo, $-2 \neq 2$ e $f(-2) = 2 = f(2)$.

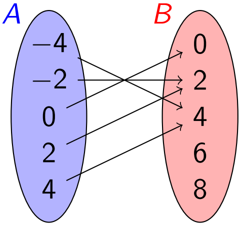


$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to |x| \end{aligned}$$

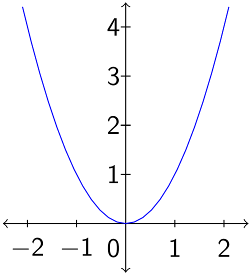
Exemplos de função não injetiva

A função $f : A \to B$, $x \to |x|$ não é injetiva pois temos os elementos 2 e 4 da imagem da função, que correspondem cada um a dois elementos diferentes no domínio. Temos, por exemplo, $-2 \neq 2$ e $f(-2) = 2 = f(2)$.

Note que qualquer número negativo $-a$, não-nulo, é diferente de seu oposto positivo a. Porém, $f(-a) = a^2 = f(a)$. Não é injetiva em todo domínio.



$$f : A \to B$$
$$x \to |x|$$



$f(x) = x^2$

As funções citadas passam a ser injetivas fazendo restrições no domínio. Por quê?

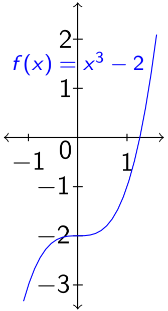
Função Sobrejetiva

Uma função de domínio A e contradomínio B é chamada **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) se para qualquer elemento $y \in B$ encontramos algum elemento $x \in A$. de forma que $f(x) = y$. Isso equivale a dizer que a função é sobrejetiva se B (o contradomínio) for igual a imagem da função.

Função Sobrejetiva

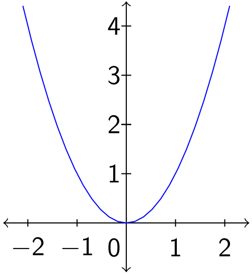
Uma função de domínio A e contradomínio B é chamada **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) se para qualquer elemento $y \in B$ encontramos algum elemento $x \in A$. de forma que $f(x) = y$. Isso equivale a dizer que a função é sobrejetiva se B (o contradomínio) for igual a imagem da função.
Exemplos:

Para qualquer número real y existe um número real x tal que $y = x^3 - 2$. Visualmente, a imagem da função no plano cartesiano se estende por todo o contradomínio.



Função Sobrejetiva

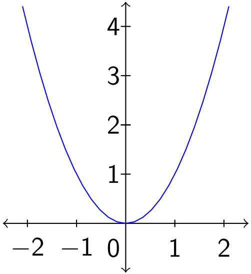
A função $f(x) = x^2$ pode ser considerada sobrejetora se o seu contradomínio for $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$



$f(x) = x^2$

Exemplos de Função não Sobrejetiva

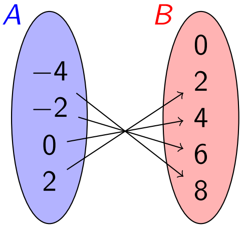
Sem fazer a restrição anteriormente comentada, deixando o contradomínio como $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva por existirem elementos negativos no contradomínio, para os quais não existe x real que elevado ao quadrado seja negativo.



$f(x) = x^2$

Exemplos de Função não Sobrejetiva

A função ao lado não é sobrejetiva pois o elemento $0 \in B$ e não há nenhum $x \in A$ tal que $f(x) = 0$. 0 não é Imagem de nenhum $x \in A$. A Imagem desta f é diferente do contradomínio.



$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to 4 - x \end{aligned}$$

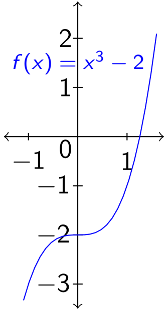
Função Bijetiva

Uma função de domínio A e contradomínio B é chamada **bijetiva** (ou **bijetora**) se for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Função Bijetiva

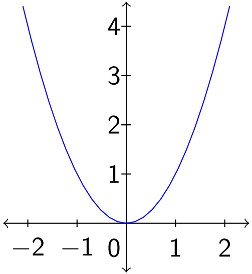
Uma função de domínio A e contradomínio B é chamada **bijetiva** (ou **bijetora**) se for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Para qualquer número real y existe um número real x tal que $y = x^3 - 2$. E para todo número real x existe apenas um número real y tal que $y = x^3 - 2$.



Função Bijetiva

Quais são as restrições necessárias para que a função $f(x) = x^2$ seja bijetiva?



$f(x) = x^2$

Função Bijetiva

Quando existe uma função bijetiva de domínio A e contradomínio B, dizemos que existe uma **correspondência biunívoca** entre os conjuntos A e B, ou seja, para cada elemento de A e associado um, e somente um, elemento de B, e vice-versa.

Função Bijetiva

Quando existe uma função bijetiva de domínio A e contradomínio B, dizemos que existe uma **correspondência biunívoca** entre os conjuntos A e B, ou seja, para cada elemento de A e associado um, e somente um, elemento de B, e vice-versa.
Dois conjuntos em correspondência biunívoca tem o mesmo **número cardinal**. Grosso modo, é dizer que os conjuntos tem a mesma quantidade de elementos.

Resumo

Injetividade e Sobrejetividade

- Injetiva: Para quaisquer x_1, x_2 do domínio, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$

Resumo

Injetividade e Sobrejetividade

- Injetiva: Para quaisquer x_1, x_2 do domínio, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$
- Sobrejetiva: Imagem $=$ Contradomínio

Resumo

Injetividade e Sobrejetividade

- Injetiva: Para quaisquer x_1, x_2 do domínio, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$
- Sobrejetiva: Imagem $=$ Contradomínio
- Bijetiva (ou correspondência biunívoca): Injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Função Composta

Função Composta

Um exemplo possível para função é a máquina de moer carne. Seu domínio são os tipos possíveis de se moer (partes específicas do animal), e sua imagem é o tipo/qualidade de carne moída obtida.

Função Composta

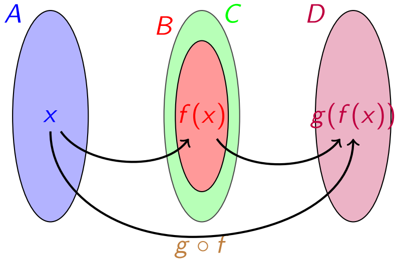
Um exemplo possível para função é a máquina de moer carne. Seu domínio são os tipos possíveis de se moer (partes específicas do animal), e sua imagem é o tipo/qualidade de carne moída obtida. Se, junto com esta máquina de moer carne trabalhar uma máquina de prensar hambúrguer, podemos moer toda carne primeiro e depois prensar o hambúrguer. Porém, podemos acoplar uma máquina à outra, fazendo com que o produto de uma das máquinas (carne moída) seja diretamente processado pela outra (prensagem do hambúrguer).

Função Composta

A ideia de compor funções segue pelo mesmo caminho. Sejam duas funções f e g, $f : A \to B$ e $g : C \to D$, a função composta de g com f é calculada como $g(f(x))$, com $x \in A$ e denotada por $g \circ f(x)$. Mas veja que os elementos nos quais a g será aplicada são os elementos da Imagem de f. Para que a g fique bem definida, e nenhum dos termos da Imagem de f fique fora do domínio da g, precisamos exigir que $Im(f) \subset C$. Alguns casos aparece $B \subset C$ ou ainda $B = C$. Porém, garantindo $Im(f) \subset C$, não haverão problemas.

Função Composta

A ideia de compor funções segue pelo mesmo caminho. Sejam duas funções f e g, $f : A \to B$ e $g : C \to D$, a função composta de g com f é calculada como $g(f(x))$, com $x \in A$ e denotada por $g \circ f(x)$. Mas veja que os elementos nos quais a g será aplicada são os elementos da Imagem de f. Para que a g fique bem definida, e nenhum dos termos da Imagem de f fique fora do domínio da g, precisamos exigir que $Im(f) \subset C$. Alguns casos aparece $B \subset C$ ou ainda $B = C$. Porém, garantindo $Im(f) \subset C$, não haverão problemas.



Função Composta

A ideia de compor funções segue pelo mesmo caminho. Sejam duas funções f e g, $f : A \to B$ e $g : C \to D$, a função composta de g com f é calculada como $g(f(x))$, com $x \in A$ e denotada por $g \circ f(x)$. Mas veja que os elementos nos quais a g será aplicada são os elementos da Imagem de f. Para que a g fique bem definida, e nenhum dos termos da Imagem de f fique fora do domínio da g, precisamos exigir que $Im(f) \subset C$. Alguns casos aparece $B \subset C$ ou ainda $B = C$. Porém, garantindo $Im(f) \subset C$, não haverão problemas.

Exemplo de função composta $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{x+7}{2}$. $Im(f)$ são todos os reais, exceto o zero. Como o Domínio de g são todos os reais, não há problemas.

$$g \circ f(x) = \frac{f(x)+7}{2} = \frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)+7}{2} = \frac{\dfrac{1+7x}{x}}{2} = \frac{1+7x}{2x}$$

Função Composta

A ideia de compor funções segue pelo mesmo caminho. Sejam duas funções f e g, $f : A \to B$ e $g : C \to D$, a função composta de g com f é calculada como $g(f(x))$, com $x \in A$ e denotada por $g \circ f(x)$. Mas veja que os elementos nos quais a g será aplicada são os elementos da Imagem de f. Para que a g fique bem definida, e nenhum dos termos da Imagem de f fique fora do domínio da g, precisamos exigir que $Im(f) \subset C$. Alguns casos aparece $B \subset C$ ou ainda $B = C$. Porém, garantindo $Im(f) \subset C$, não haverão problemas.

Exemplo de função composta $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{x+7}{2}$. $Im(f)$ são todos os reais, exceto o zero. Como o Domínio de g são todos os reais, não há problemas.

$$g \circ f(x) = \frac{f(x)+7}{2} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)+7}{2} = \frac{\frac{1+7x}{x}}{2} = \frac{1+7x}{2x}$$

Veja que não é possível fazer ao contrário sem restrições aos conjuntos, pois a $Im(g)$ são todos os reais, e o Domínio de f não contém todos os reais.

Função Inversa

Função Inversa

Vamos usar como metáfora de função uma cafeteira. A cafeteira "transforma" a água colocada (domínio) em café (imagem). Agora, pensemos em uma máquina que desfaça este processo, transformando o café em água. Uma "anti-cafeteira" ou "descafeteira" (um destilador). Ao compor estas duas máquinas meu domínio inicial (domínio da cafeteira) será água e minha imagem final (imagem da outra máquina) também será água. Também poderia compor ao contrário, tendo café como meu domínio inicial (domínio da outra máquina) e café como minha imagem final (talvez seria uma recicladora de café....)

Função Inversa

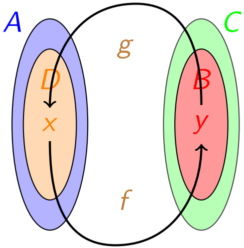
Uma função $g : C \to D$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas, $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. E necessário que seja possível fazer $g \circ f(x)$ e $f \circ g(x)$. Aplicando a composição de funções temos $g \circ f(x) = x$. Neste caso

$$Im(f) \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{C} = \textbf{Domínio}(g) \text{ e } Im(g) \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{A} = \textbf{Domínio}(f).$$

Função Inversa

Uma função $g : C \to D$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas, $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. E necessário que seja possível fazer $g \circ f(x)$ e $f \circ g(x)$. Aplicando a composição de funções temos $g \circ f(x) = x$. Neste caso

$$Im(f) \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{C} = \textbf{Domínio}(g) \text{ e } Im(g) \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{A} = \textbf{Domínio}(f).$$



Função Inversa

Uma função $g : C \to D$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas, $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. E necessário que seja possível fazer $g \circ f(x)$ e $f \circ g(x)$. Aplicando a composição de funções temos $g \circ f(x) = x$. Neste caso

$$Im(f) \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{C} = \textbf{Domínio}(g) \text{ e } Im(g) \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{A} = \textbf{Domínio}(f).$$

Como f e g são correspondências biunívocas entre os conjuntos A, B e C, D respectivamente, temos que A e B tem o mesmo número cardinal. C e D também tem o mesmo número cardinal.

$$n(A) = n(B) \text{ e } n(C) = n(D)$$

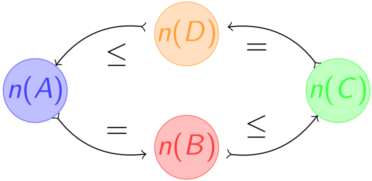
Função Inversa

Uma função $g : C \to D$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas, $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. E necessário que seja possível fazer $g \circ f(x)$ e $f \circ g(x)$. Aplicando a composição de funções temos $g \circ f(x) = x$. Neste caso

$$Im(f) \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{C} = \textbf{Domínio}(g) \text{ e } Im(g) \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{A} = \textbf{Domínio}(f).$$

Como f e g são correspondências biunívocas entre os conjuntos A, B e C, D respectivamente, temos que A e B tem o mesmo número cardinal. C e D também tem o mesmo número cardinal.

Como $B \subset C$, o número cardinal de B precisa ser *menor do que ou igual ao* número cardinal de C. Da mesma forma, o número cardinal de D precisa ser *menor do que ou igual ao* número cardinal de A, pois $D \subset A$.



$$n(B) \leq n(C) \text{ e } n(D) \leq n(A)$$

$$n(B) \leq n(C) = n(D) \leq n(A) = n(B)$$

Função Inversa

Uma função $g : C \to D$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas, $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. E necessário que seja possível fazer $g \circ f(x)$ e $f \circ g(x)$. Aplicando a composição de funções temos $g \circ f(x) = x$. Neste caso

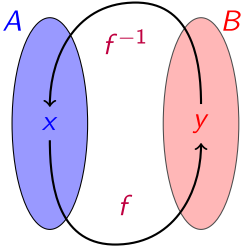
$$Im(f) \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{C} = \textbf{Domínio}(g) \text{ e } Im(g) \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{A} = \textbf{Domínio}(f).$$

Como f e g são correspondências biunívocas entre os conjuntos A, B e C, D respectivamente, temos que A e B tem o mesmo número cardinal. C e D também tem o mesmo número cardinal.
Como $B \subset C$, o número cardinal de B precisa ser *menor do que ou igual ao* número cardinal de C. Da mesma forma, o número cardinal de D precisa ser *menor do que ou igual ao* número cardinal de A, pois $D \subset A$.
Assim, os quatro conjuntos precisam ter **o mesmo número cardinal**. Agora, D precisa conter todos os elementos de A e os dois conjuntos tem a mesma quantidade de elementos. Necessariamente $A = D$. Da mesma forma, $B = C$.

Função Inversa

Assim, podemos reescrever:

Uma função $g : B \to A$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas e $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. Muitas vezes denotamos a inversa como $f^{-1}(x)$.



Função Inversa

Assim, podemos reescrever:

Uma função $g : B \to A$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas e $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. Muitas vezes denotamos a inversa como $f^{-1}(x)$.

Forma de se achar a inversa de uma função:

- Escrevemos $f(x)$ como $y = f(x)$ (onde $f(x)$ é a expressão polinomial em x)

Função Inversa

Assim, podemos reescrever:

Uma função $g : B \to A$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas e $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. Muitas vezes denotamos a inversa como $f^{-1}(x)$.

Forma de se achar a inversa de uma função:

- Escrevemos $f(x)$ como $y = f(x)$ (onde $f(x)$ é a expressão polinomial em x)
- Trocamos o y por x e os x por y.

Função Inversa

Assim, podemos reescrever:

Uma função $g : B \to A$ é chamada **inversa** de uma função $f : A \to B$ se, sendo ambas bijetivas e $f(a) = b$ então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. Muitas vezes denotamos a inversa como $f^{-1}(x)$.

Forma de se achar a inversa de uma função:

- Escrevemos $f(x)$ como $y = f(x)$ (onde $f(x)$ é a expressão polinomial em x)
- Trocamos o y por x e os x por y.
- Isolamos o y, obtendo a expressão de $f^{-1}(x)$.

Exemplo:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \to & x^2 \end{array}$$

Com estes conjuntos como domínio e contradomínio esta função se torna bijetiva. Segue abaixo o cálculo da inversa.

$$y = x^2 \Rightarrow (\text{P1})\ x = y^2 \Rightarrow (\text{P2})\ y = \sqrt{x}$$

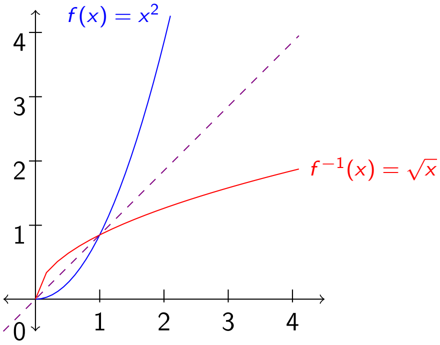
Onde P1 é a troca de x por y e P2 é isolar y.
Esta inversa fica formalmente escrita como

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \to & \sqrt{x} \end{array}$$

Note como é importante que o Contradomínio da f não contenha números negativos. Caso contivesse, ele seria o domínio da inversa, fazendo com que não houvesse uma função, por não abranger todos os elementos do domínio.

Gráfico

O gráfico da função inversa é *simétrico* ao gráfico da função original, sendo o eixo de simetria a reta $y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares (onde x e y tem o mesmo sinal).



Até a próxima!!!