Gráficos, Funções Polinomiais

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Polinomiais Lineares - 1º Grau

Funções Polinomiais Lineares

$$f(x) = ax + b$$

Funções Polinomiais Lineares

$$f(x) = ax + b$$

Classificação das funções

Constante: $f(x) = b$. Ex.: $f(x) = \dfrac{2}{3}$.

Linear: $f(x) = ax$. Ex.: $f(x) = \dfrac{x}{3}$.

Afim: $f(x) = ax + b$. Ex.: $f(x) = \dfrac{x+2}{3}$.

Funções Polinomiais Lineares

$$f(x) = ax + b$$

Classificação das funções

Constante: $f(x) = b$. Ex.: $f(x) = \frac{2}{3}$.

Linear: $f(x) = ax$. Ex.: $f(x) = \frac{x}{3}$.

Afim: $f(x) = ax + b$. Ex.: $f(x) = \frac{x+2}{3}$.

Coeficientes e gráfico

a: Coeficiente angular. Define a inclinação da reta.

b: Coeficiente linear. Indica onde a função corta o eixo y. Também chamado de **termo independente**.

$$f(x) = ax + b$$

O gráfico da função linear é uma **reta**. Para fazer seu esboço, basta marcar dois pontos. São pontos "fáceis" para marcar:

- $x = 0 \Rightarrow y = b$;
- $x = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow y = 0$ e;
- $x = 1 \Rightarrow y = a + b$.

O ponto $\left(\dfrac{-b}{a}, 0\right)$ é a raiz da função. Note que a função não terá uma raiz se $a = 0$.

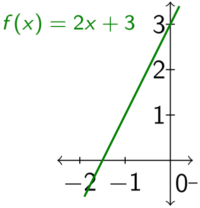
Taxa de Variação e Comportamento

Taxa de Variação: A principal característica da função linear é ter sua taxa de variação *constante*. Dados dois valores distintos x_1 e x_2, tem-se que $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$. Fazendo $y_1 - y_2$ temos $y_1 - y_2 = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2) \Rightarrow a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, isto é, a taxa de variação é o Coeficiente angular.

Comportamento: A função poderá ser

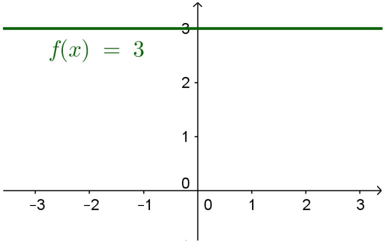
Crescente: se $a > 0$

$$f(x) = 2x + 3$$



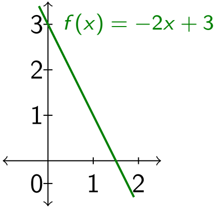
Constante: se $a = 0$

$$f(x) = 3$$



Decrescente: se $a < 0$

$$f(x) = -2x + 3$$

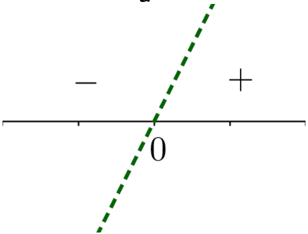


Estudo de sinais

A função constante tem seu sinal igual ao sinal do termo b e, portanto, dispensa estudo. Para os outros casos, temos:

Se f é crescente, os valores de x menores do que a raiz tem imagem *negativa* e os valores maiores terão imagem *positiva*.

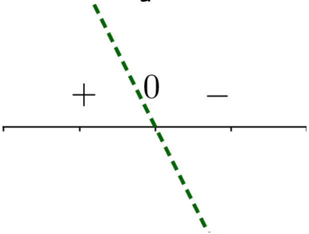
Isto é: $x < \dfrac{-b}{a} \Rightarrow f(x) < 0$.



Função Crescente

Se f é decrescente, os valores de x menores do que a raiz tem imagem *positiva* e os valores maiores terão imagem *negativa*.

Isto é: $x < \dfrac{-b}{a} \Rightarrow f(x) > 0$.



Função Decrescente

Passos para o estudo de sinais

Passos:

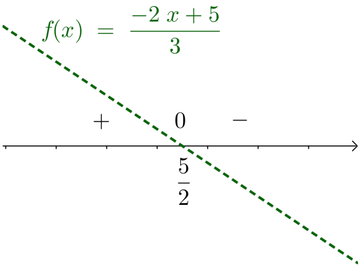
i) Traça uma reta para o termo a se estudar o sinal;

ii) Marca a raiz do termo;

iii) Analisa o comportamento da função (Crescente ou Decrescente);

iv) Atribui os sinais de acordo com o comportamento.

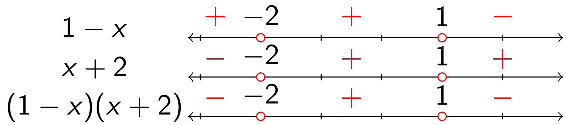
Exemplo:



Para a função $f(x) = \dfrac{-2x+5}{3}$, vemos que a raiz é $\dfrac{5}{2}$. Como a função é *decrescente*, os valores de x menores do que $\dfrac{5}{2}$ tem imagem positiva, enquanto os maiores terão imagem negativa. Caso se queira calcular $\dfrac{-2x+5}{3} \leq 0$ temos, pelo estudo de sinais apresentado, que $\dfrac{-2x+5}{3} \leq 0 \Rightarrow x \in \left[\dfrac{5}{2}, \infty\right)$.

Inequação Produto - Inequação quociente

Para determinar o sinal de um produto ou de um quociente, precisamos ver os sinais de cada parcela e efetuar “jogo de sinais” nos possíveis intervalos.



Queremos $(1 - x)(x + 2) \geq 0$. Para tanto, fazemos o estudo de sinais de cada termo e, nos intervalos formados – a saber, $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, \infty)$ – é feito o cálculo do sinal do produto de acordo com os sinais de cada termo. Pelo estudo apresentado, o intervalo procurado é $[-2, 1]$.

Inequação Produto - Inequação quociente

Para determinar o sinal de um produto ou de um quociente, precisamos ver os sinais de cada parcela e efetuar "jogo de sinais" nos possíveis intervalos.

Para $\dfrac{(1-2x)(5x-3)}{2x-3} \geq 0$, precisamos fazer o estudo do numerador, que é um produto, para depois fazer estudo do numerador com o denominador. Note que no ponto onde o denominador é zero, a divisão não existe. O intervalo procurado é $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{2}\right)$.

		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{2}$	
$1-2x$	$+$		$-$		$-$		$-$
$5x-3$	$-$		$-$		$+$		$+$
num.	$-$		$+$		$-$		$-$
$2x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$
quoc.	$+$		$-$		$+$		$-$
		0		0		$\nexists$	

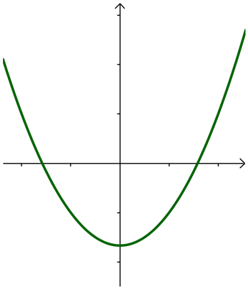
Polinomiais Quadráticas

Polinomiais Quadráticas

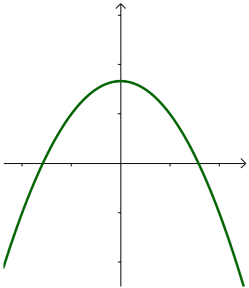
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Coeficientes: Concavidade, Corte no eixo y O gráfico da função é uma **parábola**. O coeficiente a, necessariamente não-nulo, definirá a concavidade da função. Da mesma forma que a função linear, o termo independente c marca o ponto onde a função corta o eixo y. As concavidades possíveis são:

Para Cima: se $a > 0$



Para Baixo: se $a < 0$



Zeros

Podemos deduzir uma fórmula para obtenção dos zeros de uma quadrática através do *completamento de quadrados*: Trata-se de uma técnica em que valores são somados e subtraídos em uma equação de forma a não alterá-la e se obter um Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) "$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$".

$ax^2 + bx + c = 0$ (Multiplica por $4a$)

Zeros

Podemos deduzir uma fórmula para obtenção dos zeros de uma quadrática através do *completamento de quadrados*: Trata-se de uma técnica em que valores são somados e subtraídos em uma equação de forma a não alterá-la e se obter um Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) "$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$".

$ax^2 + bx + c = 0$ (Multiplica por $4a$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - b^2$)

Zeros

Podemos deduzir uma fórmula para obtenção dos zeros de uma quadrática através do *completamento de quadrados*: Trata-se de uma técnica em que valores são somados e subtraídos em uma equação de forma a não alterá-la e se obter um Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) "$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$".

$ax^2 + bx + c = 0$ (Multiplica por $4a$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - b^2$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Fatora TQP)

Zeros

Podemos deduzir uma fórmula para obtenção dos zeros de uma quadrática através do *completamento de quadrados*: Trata-se de uma técnica em que valores são somados e subtraídos em uma equação de forma a não alterá-la e se obter um Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) "$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$".

$ax^2 + bx + c = 0$ (Multiplica por $4a$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - b^2$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Fatora TQP)
$\Rightarrow (2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - 4ac$)

Zeros

Podemos deduzir uma fórmula para obtenção dos zeros de uma quadrática através do *completamento de quadrados*: Trata-se de uma técnica em que valores são somados e subtraídos em uma equação de forma a não alterá-la e se obter um Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) "$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$".

$ax^2 + bx + c = 0$ (Multiplica por $4a$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - b^2$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Fatora TQP)
$\Rightarrow (2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - 4ac$)

$\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ (Extrai raiz)

Zeros

Podemos deduzir uma fórmula para obtenção dos zeros de uma quadrática através do *completamento de quadrados*: Trata-se de uma técnica em que valores são somados e subtraídos em uma equação de forma a não alterá-la e se obter um Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) "$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$".

$ax^2 + bx + c = 0$ (Multiplica por $4a$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - b^2$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Fatora TQP)
$\Rightarrow (2ax+b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - 4ac$)
$\Rightarrow (2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$ (Extrai raiz)
$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ (Subtrai b)

Zeros

Podemos deduzir uma fórmula para obtenção dos zeros de uma quadrática através do *completamento de quadrados*: Trata-se de uma técnica em que valores são somados e subtraídos em uma equação de forma a não alterá-la e se obter um Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) "$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$".

$ax^2 + bx + c = 0$ (Multiplica por $4a$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - b^2$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Fatora TQP)
$\Rightarrow (2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - 4ac$)
$\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ (Extrai raiz)
$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ (Subtrai b)
$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ ($\div 2a$)

Zeros

Podemos deduzir uma fórmula para obtenção dos zeros de uma quadrática através do *completamento de quadrados*: Trata-se de uma técnica em que valores são somados e subtraídos em uma equação de forma a não alterá-la e se obter um Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) "$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$".

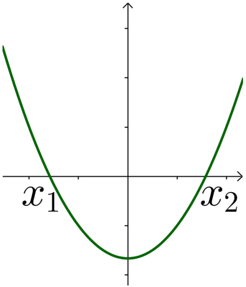
$ax^2 + bx + c = 0$ (Multiplica por $4a$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - b^2$)
$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Fatora TQP)
$\Rightarrow (2ax+b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ (Soma $b^2 - 4ac$)
$\Rightarrow (2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$ (Extrai raiz)
$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$ (Subtrai b)
$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2-4ac}$ ($\div 2a$)

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

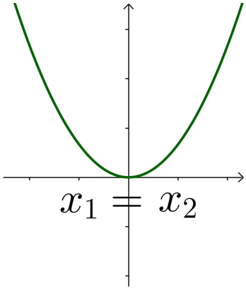
Existência de Raízes

Esta fórmula é conhecida como **Fórmula Quadrática**, sendo seu raciocínio usado desde a Babilônia antiga. A existência de raízes reais da quadrática depende do sinal do binômio $b^2 - 4ac$, denotado por Δ.

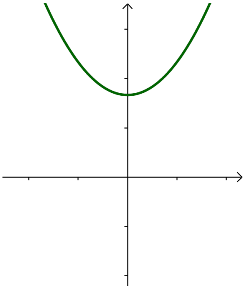
- Para $\Delta > 0$ existem duas raízes reais distintas x_1 e x_2.



- Para $\Delta = 0$ as duas raízes são um mesmo número $x_1 = x_2$.



- Para $\Delta < 0$ **não existem** raízes reais.

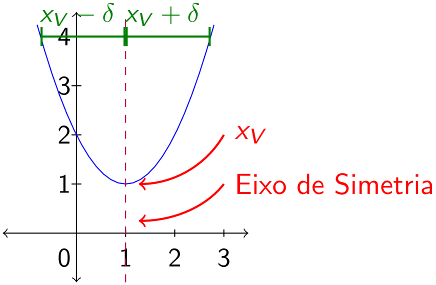


Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

O *eixo de simetria* de uma parábola é uma reta vertical que contém o vértice da parábola. Se x_V for a abscissa deste eixo e δ um valor positivo qualquer $(\neq 0)$, temos que $f(x_V + \delta) = f(x_V - \delta)$.

Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

O *eixo de simetria* de uma parábola é uma reta vertical que contém o vértice da parábola. Se x_V for a abscissa deste eixo e δ um valor positivo qualquer ($\neq 0$), temos que $f(x_V + \delta) = f(x_V - \delta)$.

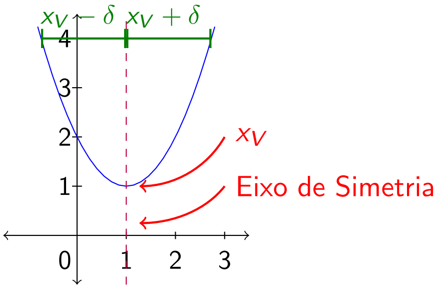


Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

O *eixo de simetria* de uma parábola é uma reta vertical que contém o vértice da parábola. Se x_V for a abscissa deste eixo e δ um valor positivo qualquer ($\neq 0$), temos que $f(x_V + \delta) = f(x_V - \delta)$.

Assim:

$$a(x_V + \delta)^2 + b(x_V + \delta)\cancel{+c} = a(x_V - \delta)^2 + b(x_V - \delta)\cancel{+c}$$

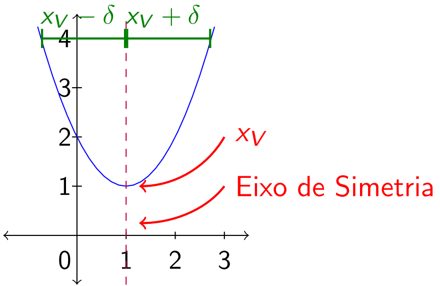


Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

O *eixo de simetria* de uma parábola é uma reta vertical que contém o vértice da parábola. Se x_V for a abscissa deste eixo e δ um valor positivo qualquer ($\neq 0$), temos que $f(x_V + \delta) = f(x_V - \delta)$.

Assim:

$a(x_V + \delta)^2 + b(x_V + \delta) \cancel{+c} = a(x_V - \delta)^2 + b(x_V - \delta) \cancel{+c}$
$\Rightarrow a(x_V)^2 + 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V + b\delta =$
$a(x_V)^2 - 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V - b\delta$, (distributivas)



Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

O *eixo de simetria* de uma parábola é uma reta vertical que contém o vértice da parábola. Se x_V for a abscissa deste eixo e δ um valor positivo qualquer ($\neq 0$), temos que $f(x_V + \delta) = f(x_V - \delta)$.

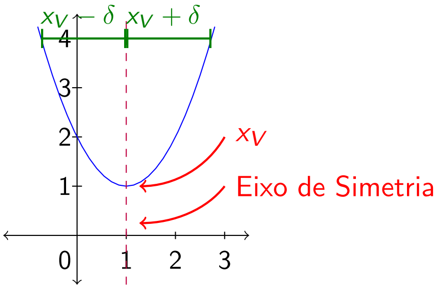
Assim:

$a(x_V + \delta)^2 + b(x_V + \delta)\cancel{+c} = a(x_V - \delta)^2 + b(x_V - \delta)\cancel{+c}$

$\Rightarrow a(x_V)^2 + 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V + b\delta =$

$a(x_V)^2 - 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V - b\delta$, (distributivas)

$\Rightarrow 2a\delta x_V + b\delta = -2a\delta x_V - b\delta$, (cancelando iguais)



Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

O *eixo de simetria* de uma parábola é uma reta vertical que contém o vértice da parábola. Se x_V for a abscissa deste eixo e δ um valor positivo qualquer ($\neq 0$), temos que $f(x_V + \delta) = f(x_V - \delta)$.

Assim:

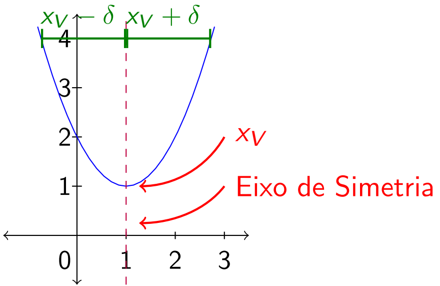
$a(x_V + \delta)^2 + b(x_V + \delta)\cancel{+c} = a(x_V - \delta)^2 + b(x_V - \delta)\cancel{+c}$

$\Rightarrow a(x_V)^2 + 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V + b\delta =$

$a(x_V)^2 - 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V - b\delta$, (distributivas)

$\Rightarrow 2a\delta x_V + b\delta = -2a\delta x_V - b\delta$, (cancelando iguais)

$\Rightarrow 2ax_V + b = -2ax_V - b$ (dividindo por δ)

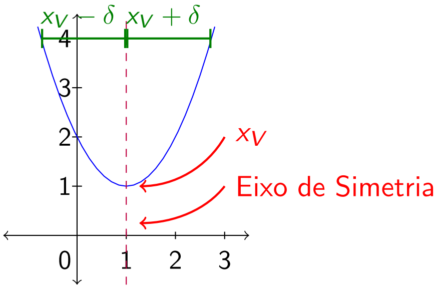


Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

O *eixo de simetria* de uma parábola é uma reta vertical que contém o vértice da parábola. Se x_V for a abscissa deste eixo e δ um valor positivo qualquer ($\neq 0$), temos que $f(x_V+\delta) = f(x_V-\delta)$.

Assim:

$a(x_V+\delta)^2 + b(x_V+\delta)\cancel{+c} = a(x_V-\delta)^2 + b(x_V-\delta)\cancel{+c}$
$\Rightarrow a(x_V)^2 + 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V + b\delta =$
$a(x_V)^2 - 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V - b\delta$, (distributivas)
$\Rightarrow 2a\delta x_V + b\delta = -2a\delta x_V - b\delta$, (cancelando iguais)
$\Rightarrow 2ax_V + b = -2ax_V - b$ (dividindo por δ)
$\Rightarrow 4ax_V = -2b$ (somando $2ax_V - b$)



O *eixo de simetria* de uma parábola é uma reta vertical que contém o vértice da parábola. Se x_V for a abscissa deste eixo e δ um valor positivo qualquer ($\neq 0$), temos que $f(x_V+\delta) = f(x_V-\delta)$.

Assim:

$a(x_V+\delta)^2 + b(x_V+\delta)\cancel{+c} = a(x_V-\delta)^2 + b(x_V-\delta)\cancel{+c}$

$\Rightarrow a(x_V)^2 + 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V + b\delta =$

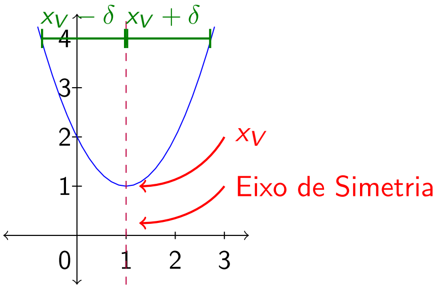
$a(x_V)^2 - 2a\delta x_V + a\delta^2 + bx_V - b\delta$, (distributivas)

$\Rightarrow 2a\delta x_V + b\delta = -2a\delta x_V - b\delta$, (cancelando iguais)

$\Rightarrow 2ax_V + b = -2ax_V - b$ (dividindo por δ)

$\Rightarrow 4ax_V = -2b$ (somando $2ax_V - b$)

$\Rightarrow x_V = \dfrac{-b}{2a}$. (dividindo por $4a$ e simplificando)



Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

Se considerar as raízes x_1 e x_2 tem-se $f(x_1) = f(x_2) = 0$ e $x_V = \frac{x_1+x_2}{2}$ média aritmética, pela simetria.

Substituindo $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ nesta média, também obtém-se $x_V = \dfrac{-b}{2a}$.

Para achar y_V, podemos calcular $f(x_V)$.

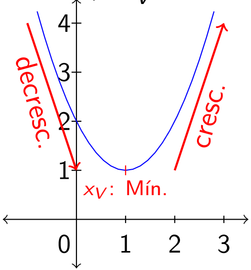
$$
\begin{aligned}
y_V = f(x_V) = a(x_V)^2 + b(x_V) + c &= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \\
&= a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}
$$

Eixo de Simetria - Vértice - Máximo e Mínimo - Comportamento

Se $a > 0$, a concavidade é *para cima* e o vértice da parábola será **ponto de mínimo**.
Caso contrário, sendo $a < 0$, a concavidade é *para baixo* e o vértice da parábola será **ponto de máximo**. O comportamento da função também depende da concavidade:

- Para $a > 0$, a função será

Decrescente se $x < x_V$ e
Crescente se $x > x_V$.



- Para $a < 0$, a função será

Crescente se $x < x_V$ e
Decrescente se $x > x_V$.

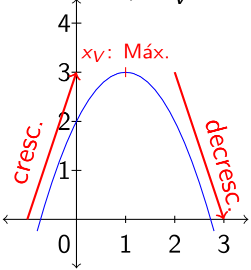


Imagem da função e Estudo de Sinais

A imagem da função será $[y_V, \infty)$ para $a > 0$ e $(-\infty, y_V]$ para $a < 0$.

Estudo de sinais Para estudo de sinais de uma parábola precisa-se levar em conta a concavidade da parábola e a existência de raízes.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	Negativo entre as raízes Positivo fora das raízes	Positivo entre as raízes Negativo fora das raízes
$\Delta = 0$	Positivo, exceto a raiz	Negativo, exceto a raiz
$\Delta < 0$	Todo domínio Positivo	Todo domínio Negativo

Faz-se de forma semelhante ao da função de 1º grau, levando em conta a tabela acima.

Inequação Produto - Inequação quociente

Exemplo: Para $\dfrac{6x^2-7x-5}{7x-4} \geq 0$, fazemos o estudo da parábola que está no numerador e da reta do denominador. A parábola tem concavidade para cima ($a = 6$) e duas raízes: $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{5}{3}$. Portanto, entre as raízes o sinal é negativo e fora delas o sinal é positivo. Já a reta tem raiz $\dfrac{4}{7}$ e é crescente. O intervalo procurado é $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{7}\right) \cup \left[\dfrac{5}{3}, \infty\right)$.

		$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{7}$		$\frac{5}{3}$	
$6x^2-7x-5$	$+$		$-$		$-$		$+$
$7x-4$	$-$		$-$		$+$		$+$
quoc.	$-$		$+$		$-$		$+$
		0		$\nexists$		0	

Até a próxima!!!