Função Exponencial

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definição

Um **modelo matemático** é uma forma de *representar* matematicamente uma realidade para que, resolvendo o modelo, se obtenha uma solução da situação prática.
Quando a situação envolve uma variação *constante*, temos uma **Função Linear**.
Exemplo: Para cada passageiro, uma empresa cobra uma tarifa de R$ 5,00. Qual será a receita para uma viagem com 30 passageiros?
R.: $30 \cdot R\$5{,}00 = R\$150{,}00$. Dado um valor x de passageiros, a receita obtida é $f(x) = 5x$.

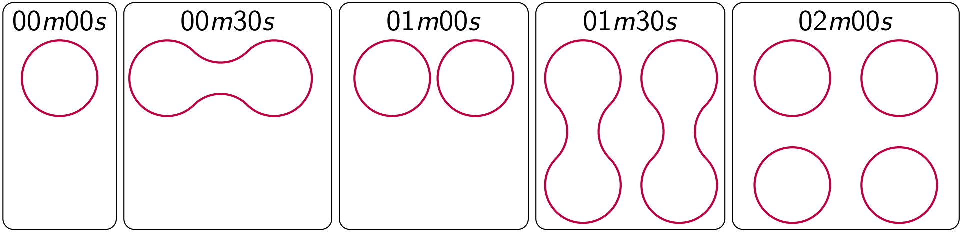
Funções e Modelagem

Um **modelo matemático** é uma forma de *representar* matematicamente uma realidade para que, resolvendo o modelo, se obtenha uma solução da situação prática.
Quando a situação envolve uma variação *de uma variação constante*, temos uma **Quadrática**.
Exemplo: Uma bola chutada em um ângulo de 45°, chega à altura máxima de 6 metros em 3 segundos, voltando ao chão em 6 segundos. Encontre uma equação que represente esse deslocamento.
R.: A bola sobe até 6 metros e volta a cair. A trajetória é de parábola. Temos $x_V = 3$, $y_V = 6$, $f(0) = 0$ e $f(6) = 0$. Do x_V: $3 = -\frac{b}{2a} \implies b = -6a$.
De $f(0) = 0 \implies c = 0$. De y_V: $6 = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a} \implies 24a = -b^2$.
Substituindo, $24a = -(-6a)^2 \implies 24a = -36a^2 \implies a = 0$ ou $a = -\frac{24}{36} = -\frac{2}{3}$. Com isso, $b = -6\left(-\frac{2}{3}\right) = 4$. A expressão $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + 4x = \dfrac{-2x^2 + 12x}{3}$. Note que temos uma velocidade com variação constante, e a velocidade é a variação do deslocamento.

Funções e Modelagem

Quando a situação envolve uma variação *proporcional*, não conseguimos expressar apenas com os polinômios.

Exemplo: Uma colônia de bactérias dobra de tamanho a cada minuto. Encontrar a função deste crescimento



Funções e Modelagem

Tabulando os resultados, considerando apenas os instantes inteiros, sendo P_0 a população inicial:

Tempo	0	1	2	3	$\cdots$
Nº Bactérias	P_0	$2P_0$	$4P_0$	$8P_0$	$\cdots$

$$f(x) = 2^x \cdot P_0$$

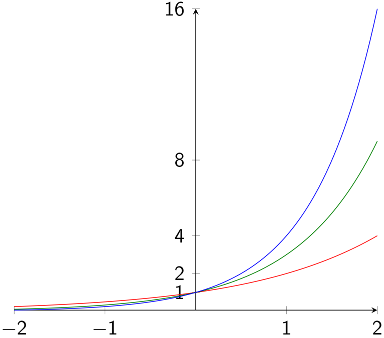
A função que expressa uma variação proporcional é a **função exponencial**, onde a variável está no expoente. O formato geral das funções exponenciais é dado por

$$y = y_0 \cdot a^x + b, \quad \text{com } 0 < a \neq 1$$

- Para $a = 1$, a função fica constante $y = y_0 + b$
- Para $a = 0$, a função fica $\begin{cases} y = b, & \text{se } x > 0 \\ \text{indet.} & \text{se } x = 0 \\ \nexists, & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- Para $a < 0$, a função não seria definida $\forall x = \frac{m}{n}$ com n par considerando números reais .

Comportamento

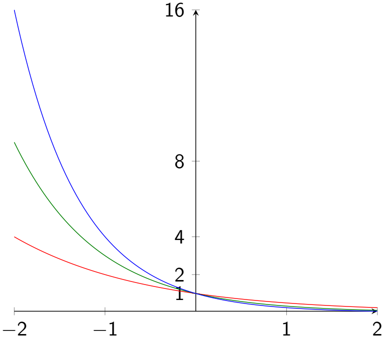
Crescente, $a > 1$



$f(x) = 2^x$ $f(x) = 3^x$

$f(x) = 4^x$

Decrescente, $0 < a < 1$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Resolução

Para resolver uma equação exponencial, buscamos escrever a equação como $a^x = a^b$ e, como a função exponencial é injetiva, temos que "se as bases são iguais, os expoentes também serão" e $x = b$.

Ex.: $5^{x+1} - 5^x = 12500$

R. :

$$\begin{aligned}
5^{x+1} - 5^x &= 12500 \\
5^x \cdot 5 - 5^x &= 5^5 \cdot 2^2 && \text{(Prop. exp e fatorando 12500)} \\
5^x (5-1) &= 5^5 \cdot 2^2 && (5^x \text{ em evidência}) \\
5^x \cdot \cancel{4} &= 5^5 \cdot \cancel{4} && \text{(Div. por 4)}
\end{aligned}$$

$$5^x = 5^5 \implies x = 5$$

■

Aplicações

Aplicações

Uma aplicação financeira tem rendimento líquido (ou seja, descontando inflação e impostos) de 0,5% ao mês. Com uso de calculadora (para aproximação):

a) Quanto tempo leva para duplicar um capital?
b) Qual a relação entre o tempo obtido no item anterior e o tempo para duplicar o capital se a taxa fosse de 1% ao mês?

R. : Definindo conceitos, temos **Capital (C)** a quantia inicial, **Montante (M)** resultado obtido, **Tempo (t)** tempo, **Taxa (i)** percentual aplicado por tempo.

Aplicações

Uma aplicação financeira tem rendimento líquido (ou seja, descontando inflação e impostos) de 0,5% ao mês. Com uso de calculadora (para aproximação):

a) Quanto tempo leva para duplicar um capital?

b) Qual a relação entre o tempo obtido no item anterior e o tempo para duplicar o capital se a taxa fosse de 1% ao mês?

R. : Capital **(C)**; Montante **(M)**; Tempo **(t)**; Taxa **(i).**

a) Tabulando, para identificar a função:

Tempo	Montante
0	C
1	$C + i \cdot C = C(1 + i)$

Aplicações

Uma aplicação financeira tem rendimento líquido (ou seja, descontando inflação e impostos) de 0,5% ao mês. Com uso de calculadora (para aproximação):

a) Quanto tempo leva para duplicar um capital?

b) Qual a relação entre o tempo obtido no item anterior e o tempo para duplicar o capital se a taxa fosse de 1% ao mês?

R. : Capital **(C)**; Montante **(M)**; Tempo **(t)**; Taxa **(i).**

a) Tabulando, para identificar a função:

Tempo	Montante	Tempo	Montante
0	C	2	$C(1+i)+i\cdot C(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$
1	$C+i\cdot C = C(1+i)$	3	$C(1+i)^2+i\cdot C(1+i)^2 = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	t	$C(1+i)^t$	

Aplicações

Uma aplicação financeira tem rendimento líquido (ou seja, descontando inflação e impostos) de 0,5% ao mês. Com uso de calculadora (para aproximação):

a) Quanto tempo leva para duplicar um capital?
b) Qual a relação entre o tempo obtido no item anterior e o tempo para duplicar o capital se a taxa fosse de 1% ao mês?

R. : Capital **(C)**; Montante **(M)**; Tempo **(t)**; Taxa **(i)**. $M = C(1+i)^t$

a) Queremos $M = 2C$. Assim

$$2C = C\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^t \qquad \text{(Dividindo por C)}$$

$$2 = 1{,}005^t$$

Aplicações

Uma aplicação financeira tem rendimento líquido (ou seja, descontando inflação e impostos) de 0,5% ao mês. Com uso de calculadora (para aproximação):

a) Quanto tempo leva para duplicar um capital?

b) Qual a relação entre o tempo obtido no item anterior e o tempo para duplicar o capital se a taxa fosse de 1% ao mês?

R. : Capital **(C)**; Montante **(M)**; Tempo **(t)**; Taxa **(i).** $M = C(1+i)^t$

a) Ainda veremos formas diretas de resolver $2 = 1{,}005^t$. No momento, testando possíveis valores (por isso, calculadora / planilha) temos

t	2	10	$\cdots$	100	$\cdots$	140
$\mathbf{1{,}005^t}$	1,010025	1,051140132	$\cdots$	1,646668492	$\cdots$	2,010243405

Obtemos, por aproximação, $1{,}005^{138} = 1{,}99029074 < 2 < 2{,}000242194 = 1{,}005^{139}$.

Tomamos então, que são necessários **139 meses** para duplicar o capital.

Aplicações

Uma aplicação financeira tem rendimento líquido (ou seja, descontando inflação e impostos) de 0,5% ao mês. Com uso de calculadora (para aproximação):

a) Quanto tempo leva para duplicar um capital?

b) Qual a relação entre o tempo obtido no item anterior e o tempo para duplicar o capital se a taxa fosse de 1% ao mês?

R. : Capital **(C)**; Montante **(M)**; Tempo **(t)**; Taxa **(i)**. $M = C(1+i)^t$

a) $i = 0{,}5\%$ ao mês $\implies$ $t = 139$ meses

b) Resolvendo $2 = 1{,}01^t$ chegamos em

$$1{,}01^{69} = 1{,}986894424 < 2 < 2{,}006763368 = 1{,}01^{70}$$

Relação entre os tempos : $\dfrac{139}{70} \approx 1{,}98571\ldots$

∎

Aplicações

Uma interpretação "ingênua" diria que bastava tempo seria reduzido pela metade, obtendo $t = 70$ (arred. para cima). Porém, isso significaria que dividir a taxa por um valor seria equivalente a multiplicar o tempo pelo mesmo valor. Chamando a taxa de x e o multiplicador de y, temos

$$\left(1 + \frac{x}{100 \cdot y}\right)^t = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{y \cdot t} \qquad \text{(Simplificando } t\text{)}$$

$$1 + \frac{x}{100 \cdot y} = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^y$$

$$x = 0, \forall y \text{ ou } y = 1, \forall x$$

.

Aplicações (2)

Ex.: Um produto desvaloriza 10% ao ano. Em quanto tempo chegará a 59,049% do seu valor original?

R. : Usando o exemplo $M = C(1+i)^t$, com $i = -\frac{10}{100} = -0{,}1$ e $M = 0{,}59049C$.

$$0{,}59049\cancel{C} = \cancel{C}(1-0{,}1)^t \qquad \text{(Divindo por } C\text{)}$$

$$0{,}59049 = 0{,}9^t = \left(\frac{9}{10}\right)^t$$

$$\left(\frac{59049}{1000000}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^t$$

$$\left(\frac{9^5}{10^5}\right) = \frac{9^t}{10^t} \qquad \text{(Fatorando)}$$

$$\therefore t = 5$$

Outras Aplicações

- Decaimento Radioativo

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

sendo

◇ t tempo decorrido;

◇ Q_0 Quantidade inicial;

◇ T Constante de “meia-vida”: Tempo que uma substância radioativa específica leva para diminuir a 50% da massa original.

Outras Aplicações

- Decaimento Radioativo

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

- Equilíbrio Térmico

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

ou "Lei de Resfriamento de Newton", sendo

- ◇ t tempo decorrido;
- ◇ T_m temperatura do meio;
- ◇ T_0 temperatura inicial do objeto;
- ◇ e Constante de Euler $\approx 2{,}7182818182845\ldots$;
- ◇ k Constante específica para cada contexto.

Outras Aplicações

- Decaimento Radioativo

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

- Equilíbrio Térmico

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

- Crescimento Populacional

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

sendo

- ◇ t tempo decorrido;
- ◇ N_0 população inicial;
- ◇ e Constante de Euler $\approx 2{,}7182818182845\ldots$;
- ◇ k Constante específica para cada contexto.

Outras Aplicações

- Decaimento Radioativo

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

- Equilíbrio Térmico

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

- Crescimento Populacional

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

Para solução destes casos, precisamos de outras ferramentas, apresentadas na sequência do curso.

Até a próxima!!!