Limite

JLC062 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Introdução

1 Introdução
- Noção Intuitiva
- Problemas de tangente e velocidade
- Limites Laterais
- Propriedades
- Continuidade
- Limites Infinitos e Limites NO Infinito
  - Limites Infinitos
  - Limite NO Infinito

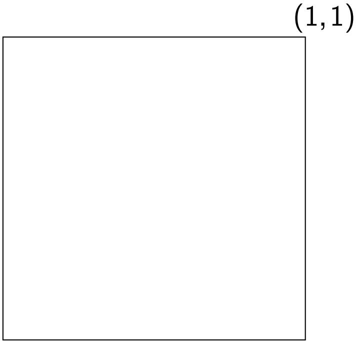
2 Teorema do Confronto

3 Modos de Calcular Limites

4 Teorema do Valor Intermediário

Atividade

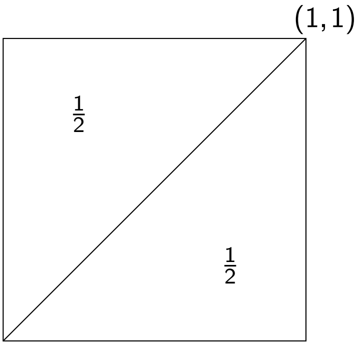
Passo 1) Recorte um Quadrado



Atividade

Passo 1) Recorte um Quadrado

Passo 2) Cortar em 2 triângulos iguais

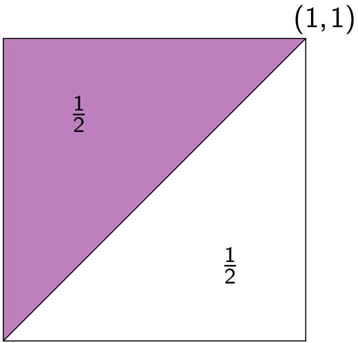


Atividade

Passo 1) Recorte um Quadrado

Passo 2) Cortar em 2 triângulos iguais

Passo 3) Separe (pinte) um triângulo e, com o não pintado, volte ao passo 2

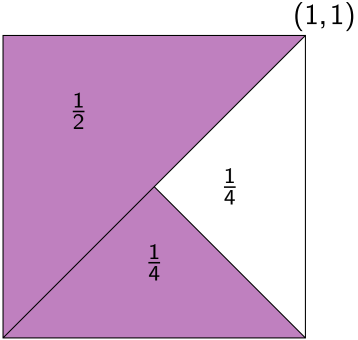


Atividade

Passo 1) Recorte um Quadrado

Passo 2) Cortar em 2 triângulos iguais

Passo 3) Separe (pinte) um triângulo e, com o não pintado, volte ao passo 2

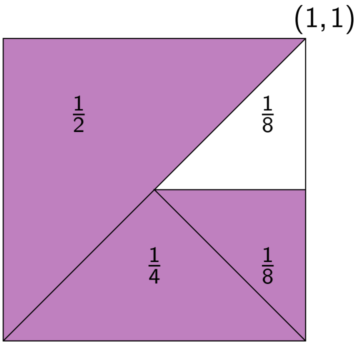


Atividade

Passo 1) Recorte um Quadrado

Passo 2) Cortar em 2 triângulos iguais

Passo 3) Separe (pinte) um triângulo e, com o não pintado, volte ao passo 2

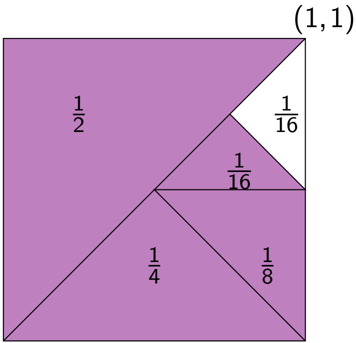


Atividade

Passo 1) Recorte um Quadrado

Passo 2) Cortar em 2 triângulos iguais

Passo 3) Separe (pinte) um triângulo e, com o não pintado, volte ao passo 2

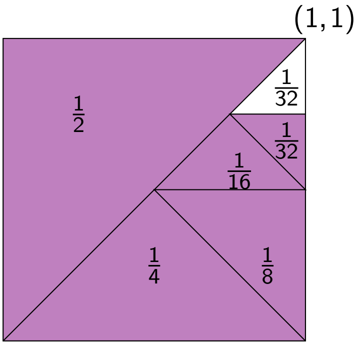


Atividade

Passo 1) Recorte um Quadrado

Passo 2) Cortar em 2 triângulos iguais

Passo 3) Separe (pinte) um triângulo e, com o não pintado, volte ao passo 2



Note que é possível continuar cortando indefinidamente, embora fisicamente o tamanho fique muito pequeno, sendo difícil o corte, mas idealmente a quantidade de cortes é infinita.

Atividade

Porém, a soma das áreas dos triângulos sombreados, embora sempre aumente, nunca ultrapassará 1, que é a área do quadrado. Evolução das áreas pintadas:

$1^{\underline{o}}$ corte: $\frac{1}{2}$

Atividade

Porém, a soma das áreas dos triângulos sombreados, embora sempre aumente, nunca ultrapassará 1, que é a área do quadrado. Evolução das áreas pintadas:

1º corte: $\frac{1}{2}$

2º corte: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Atividade

Porém, a soma das áreas dos triângulos sombreados, embora sempre aumente, nunca ultrapassará 1, que é a área do quadrado. Evolução das áreas pintadas:

1º corte: $\frac{1}{2}$

2º corte: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3º corte: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Atividade

Porém, a soma das áreas dos triângulos sombreados, embora sempre aumente, nunca ultrapassará 1, que é a área do quadrado. Evolução das áreas pintadas:

1º corte: $\frac{1}{2}$

2º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

4º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

Atividade

Porém, a soma das áreas dos triângulos sombreados, embora sempre aumente, nunca ultrapassará 1, que é a área do quadrado. Evolução das áreas pintadas:

1º corte: $\frac{1}{2}$

2º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

4º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

5º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

Atividade

Porém, a soma das áreas dos triângulos sombreados, embora sempre aumente, nunca ultrapassará 1, que é a área do quadrado. Evolução das áreas pintadas:

1º corte: $\frac{1}{2}$

2º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

4º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

5º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=1$$

Atividade

Porém, a soma das áreas dos triângulos sombreados, embora sempre aumente, nunca ultrapassará 1, que é a área do quadrado. Evolução das áreas pintadas:

1º corte: $\frac{1}{2}$

2º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

4º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

5º corte: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=1$$

Já a área não pintada fica cada vez menor mas, teoricamente, nunca chega a zero pois, qualquer que seja o número, sempre tem uma metade que será maior que zero.

1 Introdução
- Noção Intuitiva
- Problemas de tangente e velocidade
- Limites Laterais
- Propriedades
- Continuidade
- Limites Infinitos e Limites NO Infinito
  - Limites Infinitos
  - Limite NO Infinito

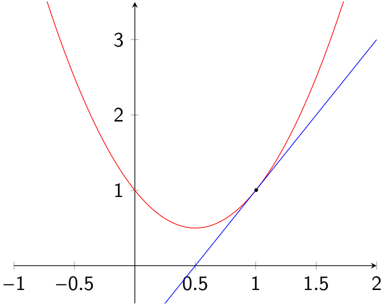
2 Teorema do Confronto

3 Modos de Calcular Limites

4 Teorema do Valor Intermediário

Reta Tangente

Uma reta **tangente** à uma curva em um ponto apenas "toca" a função neste ponto, tendo a mesma direção que a curva tem no ponto de tangência.



Reta Tangente

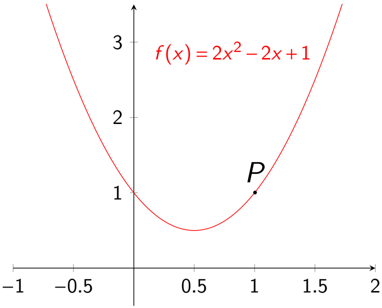
Exercício

Encontrar uma equação da reta tangente à parábola $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ no ponto $P = (1,1)$.

R. : Para encontrar uma inclinação de uma reta, precisamos de **2 pontos** mas, no caso, temos apenas um. Tomemos pontos $Q = (x, f(x))$ próximos de P (mas sempre diferentes deste) tais que sejam possíveis construir retas **secantes** (reta que secciona, corta, uma curva) a fim de aproximar qual deve ser a inclinação da reta tangente.

A inclinação da reta que passa por P e Q tem, como inclinação,

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{(2x^2 - 2x + 1) - 1}{x - 1}$$



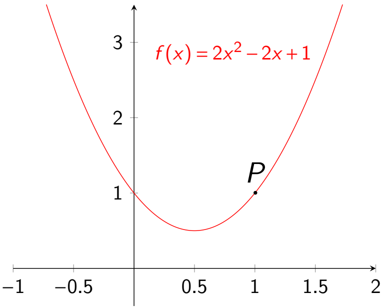
Reta Tangente

Exercício

Encontrar uma equação da reta tangente à parábola $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ no ponto $P = (1, 1)$.

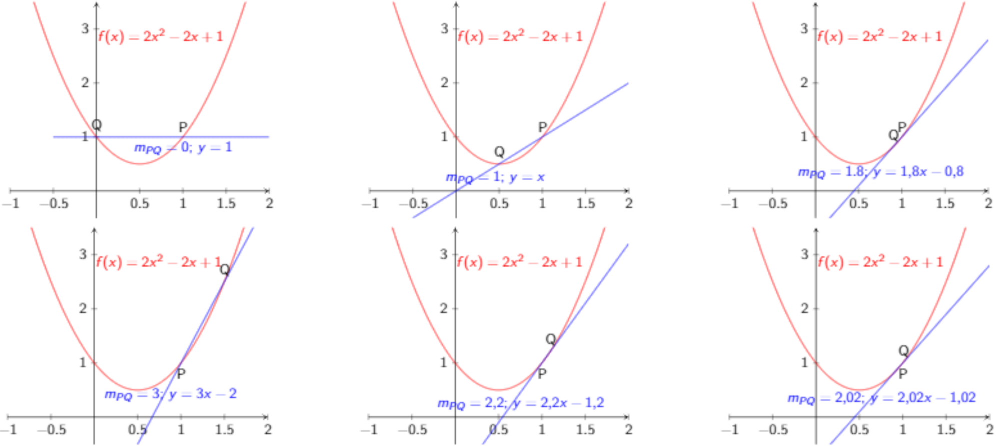
R. : Calculando a inclinação m_{PQ} para alguns pontos à esquerda (do menor para P) e alguns à direita (do maiores para P) temos

Pela Esquerda			Pela Direita		
x	y	m_{PQ}	x	y	m_{PQ}
0	1	0	2	5	4
0,5	0,5	1	1,5	2,5	3
0,9	0,82	1,8	1,1	1,22	2,2
0,99	0,9802	1,98	1,01	1,0202	2,02
0,999	0,9980	1,9980	1,001	1,0020	2,0020



Reta Tangente

Exercício



O coeficiente angular m_{PQ} se aproxima de 2, enquanto o termo independente se aproxima de -1. $y = 2x - 1$.

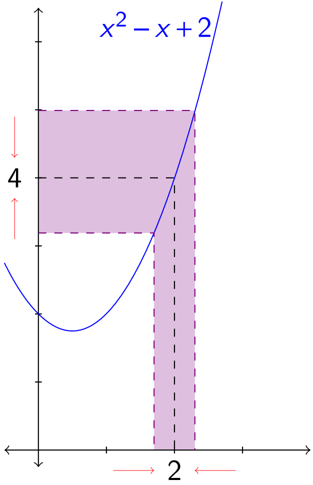
Velocidade

Suponha que uma bola seja solta, a partir do alto de uma torre, $450m$ acima do solo. Estimar a velocidade da bola após 5 segundos.
R: Dos estudos de Galileu, tem-se que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda (desprezando a resistência do ar). A equação de deslocamento $s(t)$ para t em segundos, fica $s(t) = 4{,}9t^2$.
A velocidade é a razão de variação do deslocamento por variação do tempo. No exemplo, não há um intervalo de tempo. Porém, de modo semelhante ao exemplo anterior, podemos usar valores próximos de $5s$ para estimar a velocidade.

		$\longrightarrow$				$\longleftarrow$			
t	(s)	4	4,5	4,9	4,99	5,01	5,1	5,5	6
$s(t)$	(m)	78,4	99,225	117,649	122,0105	122,9905	127,449	148,225	176,4
$\frac{s(t)-s(5)}{t-5}$	(m/s)	44,1	46,55	48,51	48,95	49,05	49,49	51,45	53,9

Assim, estimamos a velocidade em $t = 5s$ de $49m/s$.

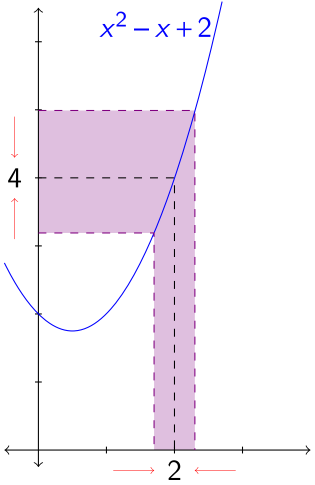
O Limite de uma função



Analisamos a função $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. Podemos ver que para valores de x próximos de 2, o valor de $f(x)$ é próximo de 4. Veja abaixo:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	2	3	8
1,5	2,75	2,5	5,75
1,9	3,71	2,1	4,31
1,95	3,8525	2,05	4,1525
1,99	3,9701	2,01	4,0301

O Limite de uma função



O que podemos concluir é que, se quisermos encontrar valores de $f(x)$ tão próximos de 4 (não importa o quanto próximos), basta escolher valores de x suficientemente próximos de 2.

Definição

Se $f(x)$ é definida para valores próximos de a (não necessariamente definida em a) e, para um valor L na imagem, pudermos tornar valores de $f(x)$ o quanto quisermos próximos de L tomando x suficientemente próximo de a, tanto pela esquerda quanto pela direita, **então dizemos que** *o limite* de $f(x)$ é L quando x tende a a, sendo denotado por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

O Limite de uma função

Definição Formal

A definição formal de limites traduz o que expressamos em palavras da seguinte forma:

- Valores de $f(x)$ próximos de L, com uma distância arbitrária ε fica $\left|f(x)-L\right| < \varepsilon$
- Valores de x próximos de a, com uma distância δ e $x \neq a$ fica $0 < |x-a| < \delta$.

Se, para qualquer $\varepsilon > 0$ (ou seja, qualquer distância na imagem) for possível encontrar um $\delta > 0$ (ou seja, é possível determinar um intervalo no domínio) de modo que os valores de x no intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ tem imagem dentro do intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, então o limite de $f(x)$ é L quando x tende a a.
Simbolicamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{def}{\equiv} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,\Big|\, 0 < |x-a| < \delta \implies \left|f(x)-L\right| < \varepsilon$$

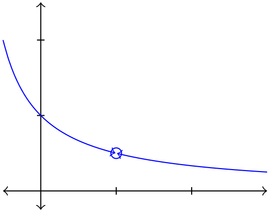
Aproximações Laterais

Exemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

R.: Note-se que a função $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ não é definida para $x=1$, além de ambas funções (numerador e denominador) tendem a 0 para $x \to 1$. Porém, o valor do limite é calculado em valores *próximos* a 1, mas não necessariamente em 1. Calculando para valores próximos:

$\longrightarrow$		$\longleftarrow$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,5	0,6667	1,5	0,4
0,9	0,5263	1,1	0,4762
0,99	0,5025	1,01	0,4975
0,999	0,5003	1,001	0,4998



Mesmo que fosse definido um valor para $f(1)$, os valores próximos de 1 no domínio tem imagem próxima de $^1/_2$.

Logo $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

Aproximações Laterais

Exemplo 2

Calcular $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

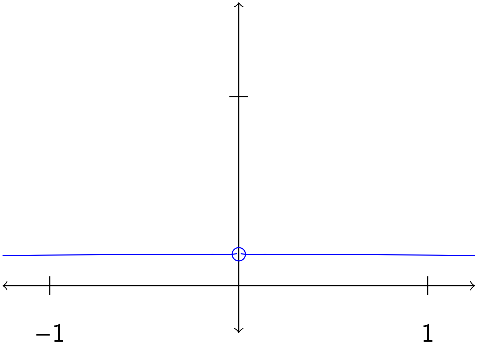
Aqui, tanto para valores negativos quanto positivos de t, pelo fato de aparecerem como t^2, terão o mesmo valor.

t	± 1	$\pm 0{,}1$	$\pm 0{,}01$	$\pm 0{,}001$	$\pm 10^{-4}$	$\pm 10^{-5}$	$\pm 10^{-6}$	$\pm 10^{-7}$
$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$	0,162278	0,16662	0,166666	0,166667	0,166667	0,166667	0,166533	0,177636

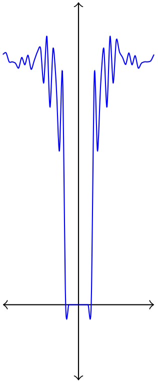
Para valores entre -10^{-6} e 10^{-6} começam a dar "resultados estranhos". Isso acontece porque as limitações do cálculo eletrônico não conseguem distinguir t^2 de 0 para valores muito pequenos.

Aproximações Laterais

Exemplo 2



Domínio [−1,5, 1,5]



Domínio [−0,05, 0,05], zoom 8x.

Aproximações Laterais

Exemplo 3

Calcular $\lim_{x\to 0} \text{sen } \dfrac{\pi}{x}$.

Tomando valores de x na sequência $1, {}^1/_2, {}^1/_3, {}^1/_4 \ldots$ temos

$$f(1) = \text{sen } \frac{\pi}{1} = \text{sen } \pi = 0 \qquad f\left({}^1/_2\right) = \text{sen } \frac{\pi}{{}^1/_2} = \text{sen } 2\pi = 0$$

$$f\left({}^1/_3\right) = \text{sen } \frac{\pi}{{}^1/_3} = \text{sen } 3\pi = 0 \qquad f\left({}^1/_4\right) = \text{sen } \frac{\pi}{{}^1/_4} = \text{sen } 4\pi = 0$$

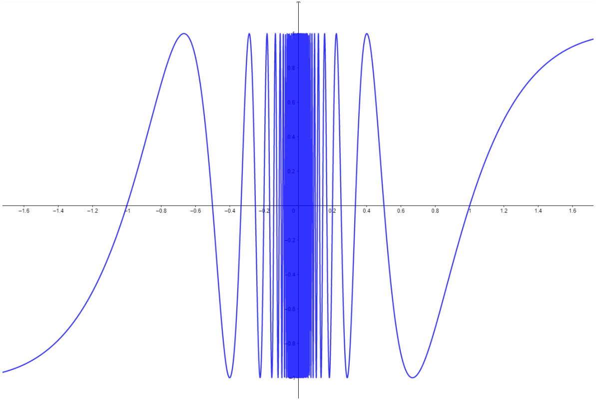
$$f\left({}^1/_5\right) = \text{sen } \frac{\pi}{{}^1/_5} = \text{sen } 5\pi = 0 \qquad f\left({}^1/_6\right) = \text{sen } \frac{\pi}{{}^1/_6} = \text{sen } 6\pi = 0$$

O mesmo ocorre para $f(0,1) = \text{sen } 10\pi = 0$ e $f(0,01) = \text{sen } 100\pi = 0$. Seria $\lim_{x\to 0} \text{sen } \dfrac{\pi}{x} = 0???$

Aproximações Laterais

Exemplo 3

A resposta é **Não**. Com outras sequências, são obtidos outros valores. Essa função, especificamente, pode assumir qualquer valor entre -1 e 1, dependendo da sequência escolhida.



- O limite é o valor L no contradomínio ao qual se aproximam imagens $f(x)$ de valores x do domínio próximo de a.
- Em alguns casos, o valor obtido pelas aproximações pode ser enganoso, seja pela característica da função, seja por limitações eletrônicas de cálculo.

Portanto

As aproximações numéricas podem dar uma ideia do valor do limite, mas existem casos em que os valores das aproximações podem não ser o real valor do limite.

1 Introdução
- Noção Intuitiva
- Problemas de tangente e velocidade
- Limites Laterais
- Propriedades
- Continuidade
- Limites Infinitos e Limites NO Infinito
  - Limites Infinitos
  - Limite NO Infinito

2 Teorema do Confronto

3 Modos de Calcular Limites

4 Teorema do Valor Intermediário

Limites Laterais

Calcular $\lim_{t\to 0} H(t)$, sendo $H(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$.

Esta é a função *Heavside*, em homenagem ao Engenheiro Elétrico Oliver Heavside, que representa quando um circuito está desligado $(H(t) = 0)$ ou ligado $(H(t) = 1)$.

Se $t \to 0$ pela esquerda (negativos), $H(t) \to 0$. Já se $t \to 0$ pela direita (positivos), $H(t) \to 1$.

Representamos:

Limite pela Esquerda: $\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0$ e,

Limite pela Direita: $\lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$ e,

Como as aproximações por um lado e por outro não chegam no mesmo valor, dizemos que

$$\nexists \lim_{t\to 0} H(t)$$

Limites Laterais

De forma mais abrangente,

- o **limite à esquerda de** $f(x)$ **quando** x **tende a** a, denotado por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, é L se pudermos tornar valores de $f(x)$ o quanto quisermos próximos de L tomando x suficientemente próximos de a, mas **menores** que a.
- o **limite à direita de** $f(x)$ **quando** x **tende a** a, denotado por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, é L se pudermos tornar valores de $f(x)$ o quanto quisermos próximos de L tomando x suficientemente próximos de a, mas **maiores** que a.

Com isso, podemos dizer que

$$\textit{Existe } \lim_{x \to a} f(x) \textit{ quando existirem ambos } \lim_{x \to a^-} f(x), \ \lim_{x \to a^+} f(x) \textit{ com } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

1 Introdução
- Noção Intuitiva
- Problemas de tangente e velocidade
- Limites Laterais
- Propriedades
- Continuidade
- Limites Infinitos e Limites NO Infinito
  - Limites Infinitos
  - Limite NO Infinito

2 Teorema do Confronto

3 Modos de Calcular Limites

4 Teorema do Valor Intermediário

Propriedades

Considerando que existam $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$, temos:

Soma de Limites: $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

Propriedades

Considerando que existam $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$, temos:

Soma de Limites: $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

Produto de Limites: $\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

Propriedades

Considerando que existam $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, temos:

Soma de Limites: $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

Produto de Limites: $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

Quociente de Limites: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ desde que $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Propriedades

Considerando que existam $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, temos:

Soma de Limites: $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

Produto de Limites: $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

Quociente de Limites: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ desde que $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Limites diretos: $\lim_{x\to a} c = c$ e $\lim_{x\to a} x = a$

Propriedades

Considerando que existam $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, temos:

Soma de Limites: $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

Produto de Limites: $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

Quociente de Limites: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ desde que $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Limites diretos: $\lim_{x\to a} c = c$ e $\lim_{x\to a} x = a$

Propriedade de Potências: $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

.

Propriedades

Considerando que existam $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, temos:

Soma de Limites: $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

Produto de Limites: $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

Quociente de Limites: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ desde que $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Limites diretos: $\lim_{x\to a} c = c$ e $\lim_{x\to a} x = a$

Propriedade de Potências: $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

Demais: $\lim_{x\to a} x^n = a^n$;

.

Propriedades

Considerando que existam $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, temos:

Soma de Limites: $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Produto de Limites: $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Quociente de Limites: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ desde que $g(x) \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Limites diretos: $\lim\limits_{x\to a} c = c$ e $\lim\limits_{x\to a} x = a$

Propriedade de Potências: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

Demais: $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$; $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (se $\exists \sqrt[n]{a}$); .

Propriedades

Considerando que existam $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, temos:

Soma de Limites: $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

Produto de Limites: $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

Quociente de Limites: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ desde que $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Limites diretos: $\lim_{x\to a} c = c$ e $\lim_{x\to a} x = a$

Propriedade de Potências: $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

Demais: $\lim_{x\to a} x^n = a^n$; $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (se $\exists \sqrt[n]{a}$); $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ (se $\exists \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$).

1 Introdução
- Noção Intuitiva
- Problemas de tangente e velocidade
- Limites Laterais
- Propriedades
- Continuidade
- Limites Infinitos e Limites NO Infinito
  - Limites Infinitos
  - Limite NO Infinito

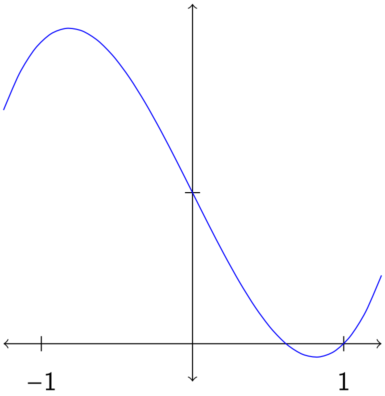
2 Teorema do Confronto

3 Modos de Calcular Limites

4 Teorema do Valor Intermediário

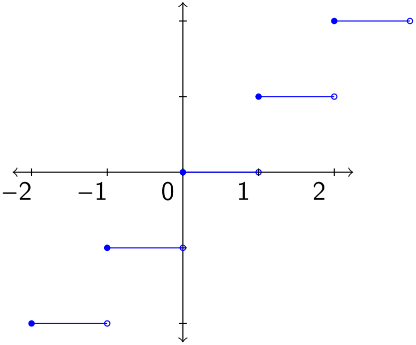
Continuidade

Noções intuitivas

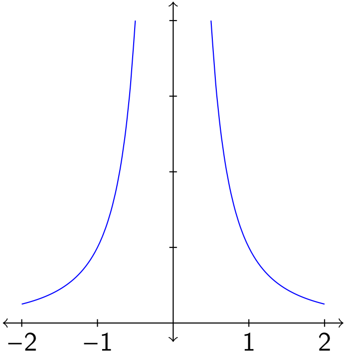


Intuitivamente, uma função contínua é aquela cujo gráfico é feito "sem tirar o lápis do papel", ou em "traço único".

Pontos de descontinuidade são saltos ou situações onde a função não é definida.



$f(x) = \lfloor x \rfloor$



$f(x) = {}^{1}/_{x^2}$

Continuidade

Definição

Uma função é **Contínua** em a se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

São funções contínuas[1]:

- Polinômios
- Radicais
- Trigonométricas Inversas
- Exponenciais
- Logaritmos
- Racionais
- Trigonométricas

Ex: Calcular $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 7}{2x+4}$.
Como a função é definida em $x = 3$, razão de dois polinômios é contínua e

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 7}{2x+4} = \frac{3^3 - 5\cdot 3^2 + 7}{2\cdot 3 + 4} = \frac{27 - 45 + 7}{10} = -0{,}9$$

[1] nos pontos que forem bem definidas

1 Introdução
- Noção Intuitiva
- Problemas de tangente e velocidade
- Limites Laterais
- Propriedades
- Continuidade
- Limites Infinitos e Limites NO Infinito
  - Limites Infinitos
  - Limite NO Infinito

2 Teorema do Confronto

3 Modos de Calcular Limites

4 Teorema do Valor Intermediário

Importante

Infinito NÃO É número

Importante

Infinito NÃO É número

Temos um **limite infinito**, no caso $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, quando para qualquer valor $M > 0$ há um intervalo que contém a $(0 < |x - a| < \delta)$ com valores de x com imagem $f(x) > M$.

Ex.: $\lim_{x\to 0^+} {}^{1}/_{x}$. Temos a seguinte aproximação:

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
$f(x)$	1	10	100	1000	10000	...

Para qualquer valor M, é possível encontrar valores x próximos a zero tais que $f(x) > M$. Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} {}^{1}/_{x} = \infty$$

.

Limites Infinitos

Definição e exemplo

Importante

Infinito NÃO É número

Para $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, ocorre quando para qualquer valor $M < 0$ há um intervalo que contém a $(0 < |x - a| < \delta)$ com valores de x com imagem $f(x) < M$.

Ex.: $\lim_{x \to 0^-} {}^1\!/_x$. Temos a seguinte aproximação:

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	...
$f(x)$	-1	-10	-100	-1000	-10000	...

Para qualquer valor M, é possível encontrar valores x próximos a zero tais que $f(x) < M$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^-} {}^1\!/_x = -\infty$$

.

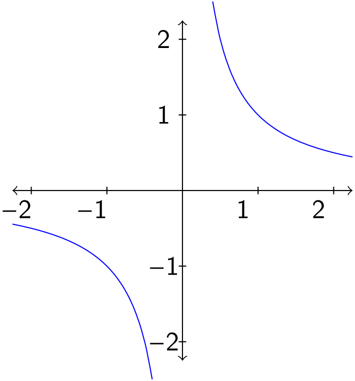
Note que ambos os limites laterais existem. Porém, sendo

$$\lim_{x\to 0^-} {}^1/_x = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} {}^1/_x = \infty$$

temos que

$$\nexists \lim_{x\to 0} {}^1/_x$$

.



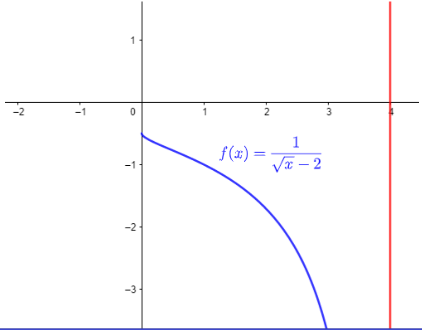
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Limites Infinitos

Assíntota Vertical

A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se *pelo menos uma* das seguintes condições for satisfeita:

- $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

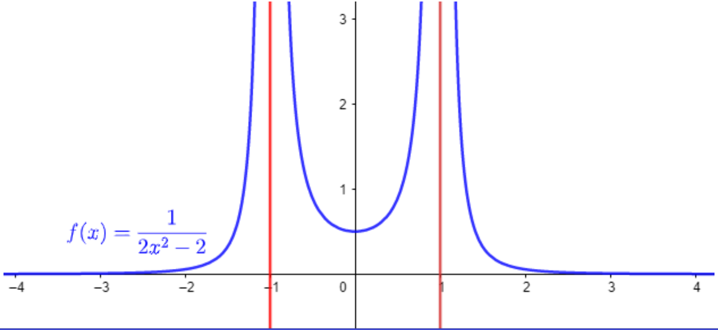


Limites Infinitos

Assíntota Vertical

A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se *pelo menos uma* das seguintes condições for satisfeita:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

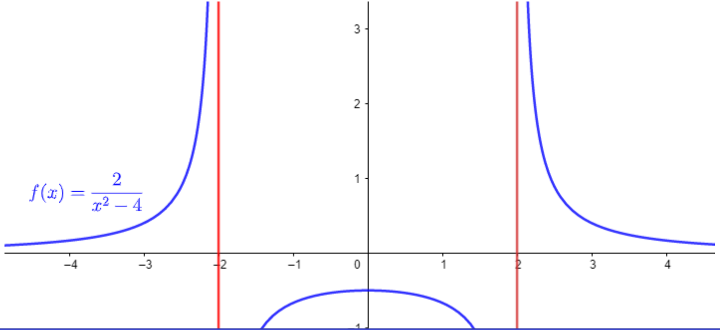


Limites Infinitos

Assíntota Vertical

A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se *pelo menos uma* das seguintes condições for satisfeita:

- $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



Limite NO Infinito

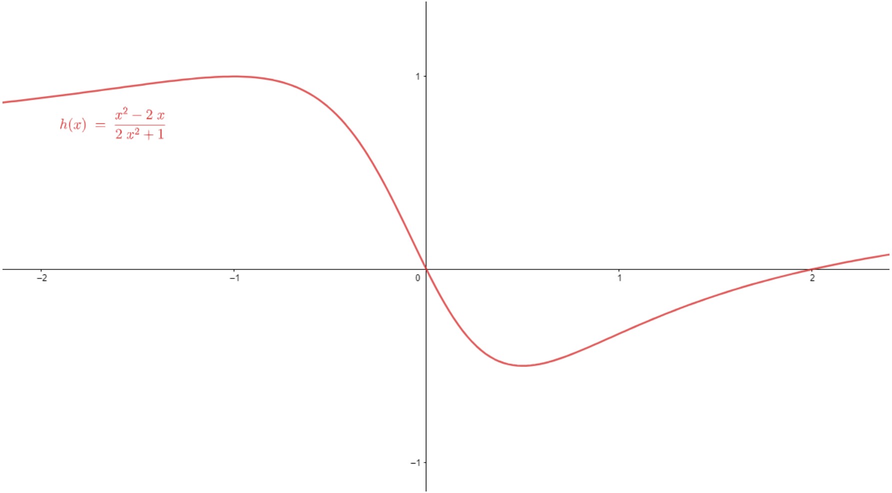
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Definições

Infinito Positivo: Seja f definida em (a,∞), então $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de b quando tomados valores de x cada vez maiores (em direção à $+\infty$).

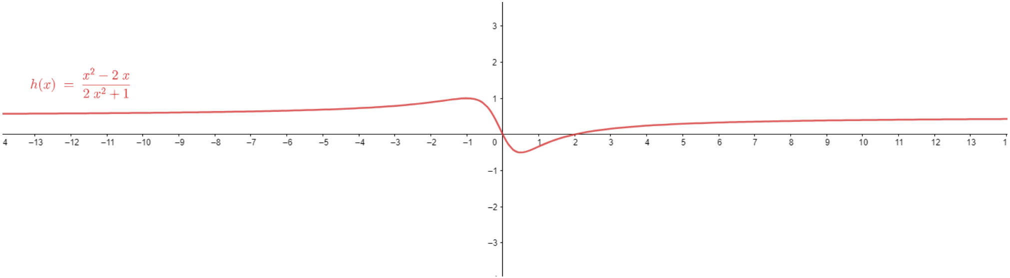
Infinito Negativo: Seja f definida em $(-\infty,a)$, então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de b quando tomados valores de x cada vez menores (em direção à $-\infty$, valores grandes em módulo, mas com sinal negativo).

Limite NO Infinito



Função $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$ próxima da origem

Limite NO Infinito



Função $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$ ampliada

Limite NO Infinito

Para valores de x próximos de 0, $h(x)$ assume valores entre $\left(-{}^{1}/_{2}, 1\right)$. Mas, para valores "distantes" da origem, as imagens se aproximam de 0,5:

x	1	2	3	4	5	10	100	1000
$h(x)$	−0,33333	0	0,15789	0,24242	0,29412	0,39801	0,48998	0,499

x	−1	−2	−3	−4	−5	−10	−100	−1000
$h(x)$	1	0,88889	0,78947	0,72727	0,68627	0,59701	0,50997	0,501

Assim, $y = 0{,}5$ é **assíntota horizontal** de $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$

Uma reta $y = ax + b$ será **assíntota oblíqua** de $f(x)$ se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Note-se que, com esta definição, as assíntotas horizontais são um *caso particular* das assíntotas oblíquas, sendo $a = 0$. De outro modo, se uma função tem assíntota oblíqua, não terá assíntota horizontal e vice-versa.

Teorema do Confronto

Teorema do Confronto

Se, dadas três funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ em um intervalo próximo de a (mesmo que a não esteja no domínio das funções) e $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$ então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Exemplo: Calcular $\lim_{x \to 0} x^2 \text{sen}\left({}^{1}/{}_{x}\right)$. Não é possível calcular $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \text{sen}\left({}^{1}/{}_{x}\right)$, pois $\nexists \lim_{x \to 0} \text{sen}\left({}^{1}/{}_{x}\right)$. Porém, como $\forall x$, temos que

$$
\begin{aligned}
-1 &\leq \text{sen } x \leq 1 \\
-1 &\leq \text{sen } \left({}^{1}/{}_{x}\right) \leq 1 \\
-x^2 &\leq x^2 \text{sen } \left({}^{1}/{}_{x}\right) \leq x^2 && (\cdot x^2)
\end{aligned}
$$

Teorema do Confronto

Se, dadas três funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ em um intervalo próximo de a (mesmo que a não esteja no domínio das funções) e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ então $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

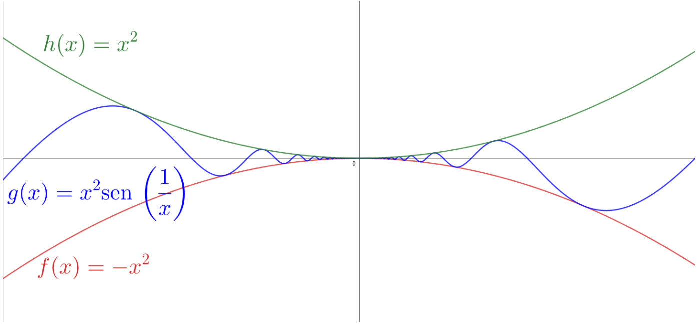
Exemplo: Calcular $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \text{sen}\left({}^{1}/_{x}\right)$.

Temos que

$$\lim_{x \to 0} -x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$$

. Satisfeitas as condições do Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \to 0} x^2 \text{sen}\left({}^{1}/_{x}\right) = 0$$



Teorema do Confronto

Consequência do Teorema do Confronto

Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| < M$ (ou seja, $g(x)$ é uma função limitada), então

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$$

Outras situações

- Qualquer polinômio é contínuo em qualquer valor de $\mathbb{R}$;
- Qualquer função racional é contínua em seu domínio;
- Se $f(x)$ é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

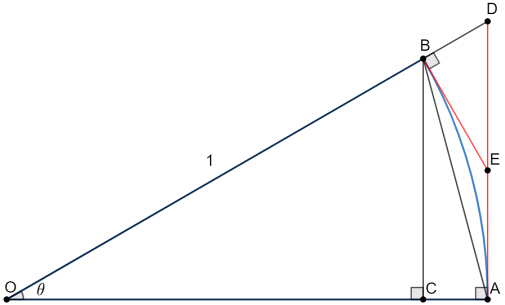
Limite Fundamental

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

Limite Fundamental

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

Temos que tanto $\lim_{\theta \to 0} \text{sen } \theta = 0$ e $\lim_{\theta \to 0} \theta = 0$ e, por isso, não é possível calcular divisão dos limites (temos $\frac{0}{0}$). Tomamos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.



Na figura, o arco $\widehat{AOB}$ é um setor de um círculo de raio 1 e medida θ. O segmento $\overline{BC}$ é cateto oposto a θ no triângulo OBC, cuja hipotenusa mede 1. Portanto $\overline{BC} = \text{sen } \theta$. Da figura vemos que $\overline{BC} < \widehat{AOB}$.

Logo,

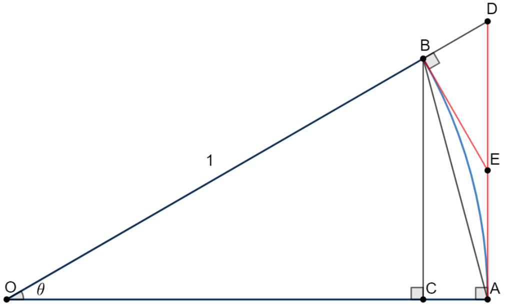
$$\text{sen } \theta < \theta \implies \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1$$

.

Limite Fundamental

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

Temos que tanto $\lim_{\theta \to 0} \text{sen } \theta = 0$ e $\lim_{\theta \to 0} \theta = 0$ e, por isso, não é possível calcular divisão dos limites (temos $\frac{0}{0}$). Tomamos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.



Também da figura, $\widehat{AOB} < \overline{AE} + \overline{EB}$. Como $\overline{EB}$ é cateto de um triângulo retângulo com hipotenusa $\overline{ED}$, $\overline{EB} < \overline{ED}$. Assim,

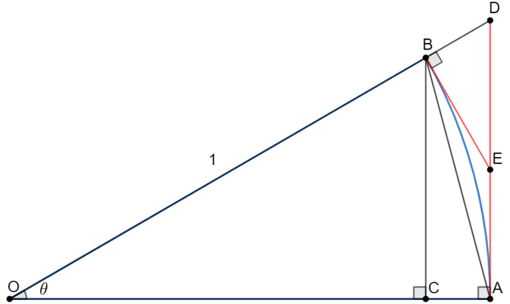
$$\widehat{AOB} < \overline{AE} + \overline{ED} = \overline{AD}$$

e $\overline{AD}$ é cateto oposto à θ em um triângulo cujo cateto adjacente mede 1. Logo, $\overline{AD} = \tan\theta \implies \widehat{AOB} < \tan\theta \implies \theta < \tan\theta$.

Limite Fundamental

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen }\theta}{\theta}=1$$

Temos que tanto $\lim\limits_{\theta\to 0}\text{sen }\theta=0$ e $\lim\limits_{\theta\to 0}\theta=0$ e, por isso, não é possível calcular divisão dos limites (temos $\frac{0}{0}$). Tomamos $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.



Temos $\theta<\dfrac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$. Como, $\cos\theta$ é próximo de 1 para x próximo de 0, podemos multiplicar por $\dfrac{\cos\theta}{\theta}$ obtendo $\cos\theta<\dfrac{\text{sen }\theta}{\theta}$.

Juntando o que temos, $\cos\theta<\dfrac{\text{sen }\theta}{\theta}<1$.

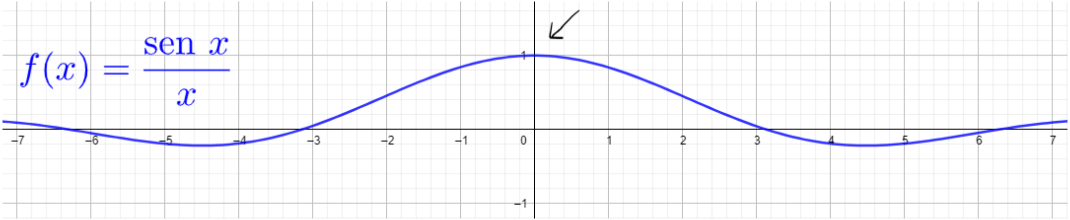
Como $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\cos\theta=1$, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\text{sen }\theta}{\theta}=1$$

Limite Fundamental

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

Mas a função $\dfrac{\text{sen } \theta}{\theta}$ é par e, portanto $\displaystyle\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$, concluindo nosso resultado.



Modos de Calcular Limites

Calcular Limites

- Se $a \in Dom(f)$ e a função é **contínua**, substituir diretamente, pois $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ex.: Calcular $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$. A função não é definida para $x = {}^5/_3$. Logo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1}{5 - 3 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Calcular Limites

- Se $a \notin Dom(f)$ mas a função é **contínua** nos valores de seu domínio próximos de a, primeiro buscamos simplificar a fração (em especial quando $\to \frac{0}{0}$).

Ex.: Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$. A função não é definida para $x = 1$ $\left(\lim \to \frac{0}{0}\right)$.

Simplificando $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$ e $x = 1$ deixa de ser problema!

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Obs: Há outra possibilidade de resolução de limites que se assemelham a $\frac{0}{0}$, mas dependem de conceitos ainda não abordados.

Calcular Limites

- Nem sempre a simplificação é direta, podendo ser necessário uso de artifícios para simplificar.

Ex.: Calcular $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

Racionalizando o numerador, $\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \dfrac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} = \dfrac{\left(\sqrt{t^2+9}\right)^2 - 3^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \dfrac{t^2 \cancel{+9} \cancel{-9}}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} =$

$= \dfrac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}$ e $t = 0$ deixa de ser problema!

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{0+9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Calcular Limites

- Nas condições anteriores ($a \notin Dom(f)$ mas a função é **contínua** nos valores de seu domínio próximos de a) caso não seja possível simplificar, é preciso avaliar os limites laterais.

Ex.: Calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$. A função não é definida para $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. Logo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\text{sen } x^{(\to 1)}}{\cos x_{(\to 0^+)}} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\text{sen } x^{(\to 1)}}{\cos x_{(\to 0^-)}} = -\infty$$

Como os limites são infinitos, $\frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical. Por serem distintos, $\nexists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$.

Obs.: Prováveis candidatos à assíntota vertical: Valores que zeram denominadores!

Calcular Limites

- Assíntotas Horizontais e Oblíquas:
  - $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. Uma constante, dividida em um número cada vez maior de partes, fica cada vez menor.
  - Sendo $p(x)$ e $q(x)$ polinômios, $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$:
    - ◇ $= 0$, (ass. horizontal) se $grau(p(x)) < grau(q(x))$;
    - ◇ $= b \neq 0$, (ass. horizontal) se $grau(p(x)) = grau(q(x))$;
    - ◇ $= \infty$, se $grau(p(x)) > grau(q(x))$ com possibilidade de assíntota oblíqua se $grau(p(x)) = grau(q(x)) + 1$;

Calcular Limites

- Assíntotas Horizontais X Assíntotas Oblíquas: Supondo $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ (ass. horizontal).

A Assíntota Oblíqua seria uma reta $mx+n$ com $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+n)] = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty}(mx+n) = 0$$
$$\Longrightarrow b - \lim_{x\to\infty}(mx+n) = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty}(mx+n) = b$$

Ou seja, para valores muito grandes, $mx+n \to b$, o que só é possível se $m=0$ e $n=b$, fazendo a ass. oblíqua se tornar ass. horizontal.

Ex.1: Calcular assíntotas de $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$.

R. :

- Assíntotas Verticais: Zeros no denominador. $S = \{2, 3\}$.

Estudo de Sinais

		2		3		4	
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$+$
x^2-5x+6	$+$		$-$		$+$		$+$
$quoc.$	$-$		$+$		$-$		$+$
		$\nexists$		$\nexists$		0	

- $\lim_{x \to 2^-} f(x)$: Sinal f. $-$, Num. $\to 2$, Den. $\to 0$.

$$\therefore \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty.$$

- $\lim_{x \to 3^-} f(x)$: Sinal f. $+$, Num. $\to 1$, Den. $\to 0$.

$$\therefore \lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty.$$

■

Ex.1: Calcular assíntotas de $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$.

R. :

- Assíntotas Horizontais ou Oblíquas: Como $grau(x-4) = 1 < 2 = grau(x^2-5x+6)$, teremos $y = 0$ como ass. horizontal. Procedendo as contas para $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$:
  - Colocamos em evidência as maiores potências do numerador e denominador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-{}^{4}/_{x}\right)}{x^2\left(1-{}^{5}/_{x}+{}^{6}/_{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2}\cdot\frac{1-{}^{4}/_{x}}{1-{}^{5}/_{x}+{}^{6}/_{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-{}^{4}/_{x}}{1-{}^{5}/_{x}+{}^{6}/_{x^2}}$$

  - Como, para $x\to\infty$, os termos que tem x no denominador $\to 0$,

$$\overbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}^{\to 0}\cdot\frac{1-\overbrace{\lim\limits_{x\to\infty}{}^{4}/_{x}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}{}^{5}/_{x}}_{\to 0}+\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}{}^{6}/_{x^2}}_{\to 0}} = 0\cdot\frac{1-0}{1-0+0} = 0$$

$\blacksquare$

Calcular Limites

Ex.2: Calcular assíntotas oblíquas (ou horizontais) de $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-2x+1}$.

R. : Como $grau(3x^2+2x-5) = 2 = grau(2x^2-2x+1)$, teremos uma assíntota horizontal.

Procedendo as contas para $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-2x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-5}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3+{}^2/_x-{}^5/_{x^2}\right)}{x^2\left(2-{}^2/_x x+{}^1/_{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{3+{}^2/_x-{}^5/_{x^2}}{2-{}^2/_x x+{}^1/_{x^2}}$$

$$= \overbrace{\lim_{x\to\infty} 1}^{\to 1} \cdot \frac{3+\overbrace{\lim\limits_{x\to\infty} {}^2/_x}^{\to 0} - \overbrace{\lim\limits_{x\to\infty} {}^5/_{x^2}}^{\to 0}}{2-\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} {}^2/_x}_{\to 0} + \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} {}^1/_{x^2}}_{\to 0}} = 1 \cdot \frac{3+0-0}{2-0+0} = \frac{3}{2}$$

■

Calcular Limites

Ex.3: Calcular assíntotas oblíquas de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 5x - 7}{x^2 + 2x + 3}$.

R. : Como $grau(x^3 - 3x^2 + 5x - 7) = 3 = 2 + 1 = grau(x^2 + 2x + 3) + 1$, teremos uma assíntota oblíqua. Fazendo a divisão de polinômios,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

onde $grau(h(x)) = 1$ e $grau(r(x)) < grau(q(x))$. Assim,

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{r(x)}{q(x)} = 0 \implies \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} - h(x) = 0 \therefore h(x)$ é ass. oblíqua.

$\blacksquare$

Ex.3: Calcular assíntotas oblíquas de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 5x - 7}{x^2 + 2x + 3}$.

R. :

Fazendo a divisão

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^3 & -3x^2 & +5x & -7 & & x^2 + 2x + 3 \\
\cline{6-6}
-(\ x^3 & +2x^2 & +3x) & \downarrow & & x - 5 \\
\cline{1-4}
 & -5x^2 & +2x & -7 & & \\
-(& -5x^2 & -10x & -15) & & \\
\cline{2-4}
 & & 12x & +8 & &
\end{array}
$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} - h(x) = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 7}{x^2 + 2x + 3} - (x - 5) \right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{12x + 8}{x^2 + 2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(12 + \frac{8}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= 0 \cdot \frac{12 + 0}{1 + 0 + 0} = 0$$

E, portanto, $x - 5$ é assíntota oblíqua de $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 5x - 7}{x^2 + 2x + 3}$

Teorema do Valor Intermediário

Teorema do Valor Intermediário - TVI

Definição

Sendo:

- f é contínua em (a, b)
- $f(a) > 0$
- $f(b) < 0$

Então $\exists c \in (a, b)$ com $f(c) = 0$.

De forma geral, se f é contínua em (a, b), $f(a) > N$ e $f(b) < N$ (ou $f(a) < N$ e $f(b) > N$) então $\exists c \in (a, b)$ com $f(c) = N$.

Ex.: Mostrar que o polinômio $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ tem ao menos uma raiz em $[1, 2]$.

R. :

$$p(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

$$p(2) = 4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 2 = 12 > 0$$

Como $p(x)$ é contínua, pelo TVI, $\exists c \in [1, 2]$ com $p(c) = 0$.

■

Até a próxima!!!