Derivação

JLC062 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

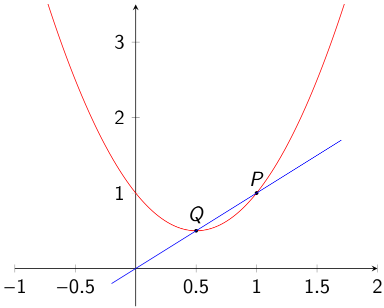
Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Taxas de variação

Retas Secantes e Tangente

Voltamos ao exemplo de encontrar uma reta tangente, obtendo a taxa de variação de uma função em um determinado ponto P.
Nós usamos retas secantes com intervalos em x cada vez menores até obter o coeficiente da reta tangente.
Lembrando que a inclinação da reta que passa por $P = (p, f(p))$ e $Q = (q, f(q))$ é dada por,

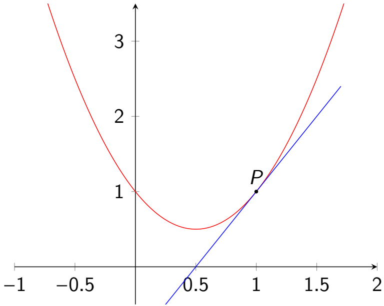
$$m_{PQ} = \frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{f(p) - f(q)}{p - q}$$



Retas Secantes e Tangente

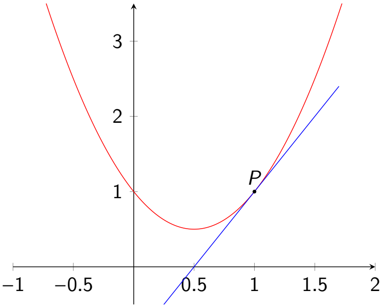
A reta tangente foi obtida fazendo $Q \to P$. Assim, o coeficiente m_T da reta tangente é obtido por

$$m_T = \lim_{q \to p} m_{PQ} = \lim_{q \to p} \frac{f(q) - f(p)}{q - p}$$



Retas Secantes e Tangente

Ex. 1) Encontrar uma equação da reta tangente à parábola $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ no ponto $P = (1,1)$.
Já vimos no primeiro vídeo de limites que a resposta será $y = 2x - 1$, por aproximação. Vamos confirmar esse resultado usando o limite, usando $Q = (x, f(x))$.



$$m_T = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2x \cancel{+1} \cancel{-1}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2 \cdot 1 = 2$$

Para calcular o termo independente b de $y = m_T x + b$, é preciso que para $x = 1$, a reta também precisa resultar em 1. Assim,

$$1 = 2 \cdot 1 + b \implies b = -1$$

e a reta tangente fica $y = 2x - 1$, como estimamos pelas aproximações.

Velocidade

Ex. 2) Voltamos ao problema de velocidade, onde se supõe uma bola solta, a partir do alto de uma torre, $450m$ acima do solo e se busca estimar a velocidade da bola após 5 segundos.
No exemplo, vimos que a equação do deslocamento foi definida como $s(t) = 4{,}9t^2$. Sendo velocidade $= \dfrac{\Delta\text{desloc.}}{\Delta\text{tempo}}$, a velocidade instantânea será obtida quando $\Delta\text{tempo} \to 0$.
Calculando

$$v(5) = \lim_{t\to 5} \frac{s(t) - s(5)}{t-5} = \lim_{t\to 5} \frac{4{,}9t^2 - 4{,}9\cdot 5^2}{t-5} = \lim_{t\to 5} \frac{4{,}9\left(t^2 - 5^2\right)}{t-5}$$

$$= \lim_{t\to 5} \frac{4{,}9\,(t+5)\,\cancel{(t-5)}}{\cancel{t-5}} = \lim_{t\to 5} 4{,}9\,(t+5) = 4{,}9\,(5+5) = 49m/s^2$$

Velocidade

Indo um pouco “mais além”, vamos

- Encontrar qual seria uma função de velocidade
- Analisar o que seria variação da velocidade e uma função para isso.

Velocidade

Indo um pouco “mais além”, vamos

- Encontrar qual seria uma função de velocidade
- Analisar o que seria variação da velocidade e uma função para isso.

Para a **Função Velocidade**, vamos aproximar t para um ponto x genérico, que será nossa variável.

$$v(x) = \lim_{t\to x} \frac{s(t)-s(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{4{,}9t^2 - 4{,}9\cdot x^2}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{4{,}9\left(t^2 - x^2\right)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x} \frac{4{,}9\,(t+x)\cancel{(t-x)}}{\cancel{t-x}} = \lim_{t\to x} 4{,}9\,(t+x) = 4{,}9\,(x+x) = 9{,}8x.$$

Velocidade

Indo um pouco "mais além", vamos

- Encontrar qual seria uma função de velocidade
- Analisar o que seria variação da velocidade e uma função para isso.

Para a Variação da Velocidade, que conhecemos como **Função Aceleração**, vamos tomar $v(t) = 9{,}8t$ e aproximar t para um ponto x genérico, que será nossa variável.

$$a(x) = \lim_{t \to x} \frac{v(t) - v(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{9{,}8t - 9{,}8x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{9{,}8\cancel{(t - x)}}{\cancel{t - x}} = \lim_{t \to x} 9{,}8 = 9{,}8.$$

Definição de derivada

Derivada

Temos que a taxa de variação em um ponto $P = (p, f(p))$ é $\lim_{q \to p} \dfrac{f(q) - f(p)}{q - p}$.

É possível reescrever, trocando $a = p$ e $h = q - a = q - p$, temos $q \to p \equiv q - p \to 0 \equiv h \to 0$.

Assim, a mesma variação fica $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Definição

A **derivada de uma função** f **em um número** a denotada por $f'(a)$, caso esse limite exista, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada

Da forma inicial, trocando p por x (já tendo trocado q por a), temos uma escrita comum de derivada

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Se a é uma constante, obtêm-se o valor numérico;
- Se a é uma variável, obtêm-se uma função derivada.

Ex. Derivar $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ **R.:** Usando $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 - 2(x+h) + 1 - [2x^2 - 2x + 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\left(x^2 + 2xh + h^2\right) - 2(x+h) + 1 - [2x^2 - 2x + 1]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x^2} + 4xh + 2h^2 \cancel{-2x} - 2h + \cancel{1} \cancel{-2x^2} + \cancel{2x} \cancel{-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 4xh - 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2h + 4x - 2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 2h + 4x - 2 = 2 \cdot 0 + 4x - 2 = 4x - 2$$

Derivada

Mas, a reta tangente à $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ em $(1,1)$ era $y = 2x - 1$ e $f'(x) = 4x - 2$???
Por quê???

Derivada

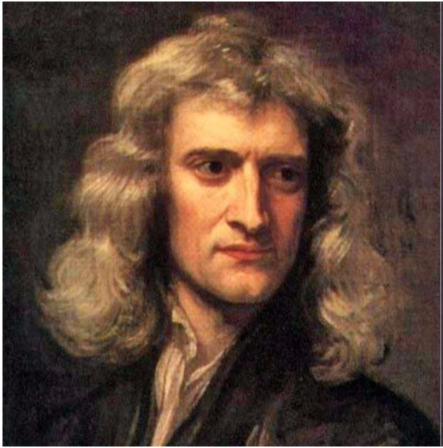
Mas, a reta tangente à $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ em $(1,1)$ era $y = 2x - 1$ e $f'(x) = 4x - 2$???
Por quê???

Porque $f'(x)$ é a função que, para cada valor de x, retorna o coeficiente da reta tangente naquele ponto. Veja que $f'(1) = 4 \cdot 1 - 2 = 2$.

Notações de derivada

História e Notações

O Cálculo Diferencial e Integral teve suas primeiras sistematizações feitas, de modo independente, por Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, no final do Séc XVII.




História e Notações

Assim, acabaram se popularizando notações distintas para derivadas, todas com o mesmo significado:

$$f'(x) = y' = \underbrace{\dot{f}}_{\text{Newton}} = \underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)}_{Leibniz} = Df(x) = D_x f(x)$$

Os símbolos D e $\dfrac{d}{dx}$ são chamados **operadores**, por indicarem a *operação de diferenciação*.

Condições de Diferenciabilidade

Condições de Diferenciabilidade

Diferenciabilidade em Intervalo

Uma função é **diferenciável** em um intervalo (a, b) se for diferenciável em qualquer valor do intervalo.

Como $f'(x)$ é um limite, a primeira condição para que exista a derivada é a existência do limite.

Ex.) Mostrar se há diferenciabilidade da função $f(x) = |x|$.

R.) Primeiro temos que tratar os casos da função:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Diferenciabilidade em Intervalo

Uma função é **diferenciável** em um intervalo (a, b) se for diferenciável em qualquer valor do intervalo.

Como $f'(x)$ é um limite, a primeira condição para que exista a derivada é a existência do limite.

Ex.) Mostrar se há diferenciabilidade da função $f(x) = |x|$.

R.) Para $x > 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Para $x < 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

Condições de Diferenciabilidade

Diferenciabilidade em Intervalo

Uma função é **diferenciável** em um intervalo (a, b) se for diferenciável em qualquer valor do intervalo.

Como $f'(x)$ é um limite, a primeira condição para que exista a derivada é a existência do limite.

Ex.) Mostrar se há diferenciabilidade da função $f(x) = |x|$.

R.) Entretanto, para $x = 0$, temos um problema!!! Calculando limites laterais

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0+h-0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-0-h+0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1$$

Como os limites laterais são distintos, o limite (e, consequentemente a derivada) não existe em $x = 0$.

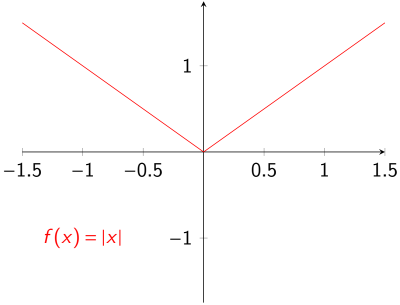
Condições de Diferenciabilidade

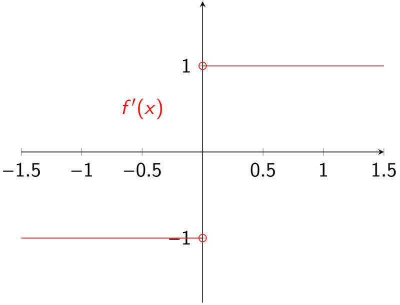
Diferenciabilidade em Intervalo

Uma função é **diferenciável** em um intervalo (a, b) se for diferenciável em qualquer valor do intervalo.

Como $f'(x)$ é um limite, a primeira condição para que exista a derivada é a existência do limite.

Ex.) Mostrar se há diferenciabilidade da função $f(x) = |x|$.





Condições de Diferenciabilidade

Teorema

Se uma função for diferenciável, então a função é contínua.

Importante!

Contra positiva: Se uma função não for contínua, então não é diferenciável. **Verdadeiro**.

Recíproca: Se uma função for contínua, então é diferenciável. **FALSO**.

Situações em funções com pontos não diferenciáveis:

- Uma quina
- Uma descontinuidade
- Uma tangente vertical

Derivadas de ordens superiores

Segunda Derivada

Sendo f uma função com derivada f', a função f' também pode (possivelmente) ter uma derivada $(f')'$ ou, mais simplesmente, f'', chamada de **segunda derivada** ou **derivada segunda**.

Ex.1) Se temos uma função $s(t)$ de deslocamento, a derivada $s'(t)$ é a velocidade $v(t)$.
Já a derivada da velocidade $v'(t)$ é a aceleração $a(t)$.
Portanto, $a(t) = v'(t) = s''(t)$: a aceleração é a segunda derivada do deslocamento.

Na notação de Leibniz, a derivada segunda de $f(x)$ é $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ ou $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Outras ordens

Em sequência, a **derivada terceira** de f, (notação $f'''(x)$) é a derivada da derivada segunda, e assim por diante.

Função	Linha	Newton	Leibniz
Função Original	f	f	f
Derivada Primeira	f'	$\dot{f}$	$\dfrac{df}{dx}$
Derivada Segunda	f''	$\ddot{f}$	$\dfrac{d^2f}{dx^2}$
Derivada Terceira	f'''	$\dddot{f}$	$\dfrac{d^3f}{dx^3}$
Derivada Quarta	$f^{(4)}$	$\ddddot{f}$	$\dfrac{d^4f}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Derivada n-ésima	$f^{(n)}$		$\dfrac{d^nf}{dx^n}$

Extra: Binômio de Newton

Produtos Notáveis

Temos grande uso de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Para $(a+b)^3$, faremos a distributiva

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb\\ &= aaa + aab + aab + abb + aab + abb + abb + bbb\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Para outros índices, segue-se a mesma lógica

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Triângulo de Stiefel-Pascal e Expansão do Binômio

A combinação de n elementos escolhidos em grupos de p elementos, é dada por

$$\binom{n}{p} = C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Temos que

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p};$
- $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1};$

Triângulo de Stiefel-Pascal e Expansão do Binômio

Os coeficientes das expansões são obtidos pelo Triângulo de Stiefel-Pascal:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & \binom{0}{0} \\
1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
6 & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
7 & \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}
$$

Triângulo de Stiefel-Pascal e Expansão do Binômio

Para construir a expansão de $(a+b)^n$

1) A expansão terá $n+1$ parcelas, com fatores a e b;
2) Escreva os a das $n+1$ parcelas com expoentes **decrescentes**, de n a 0.
3) Escreva os b das $n+1$ parcelas com expoentes **crescentes**, de 0 a n.
4) Escreva os coeficientes das parcelas usando a linha n do Triângulo de Stiefel-Pascal.

Obs.: Caso o binômio seja $(a-b)^n$, considere $(a+(-b))^n$. Na prática, todos as parcelas nas quais os expoentes forem *ímpares* terão sinal negativo.

Aplicação

Mostrar, pela definição, que $f(x) = x^9 \implies f'(x) = 9x^8$.

R.) A expansão da linha 9 do triângulo de Stiefel-Pascal tem os seguintes valores: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^9 - x^9}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^9} + 9x^8h + 36x^7h^2 + 84x^6h^3 + 126x^5h^4 + 126x^4h^5 + 84x^3h^6 + 36x^2h^7 + 9xh^8 + h^9 \cancel{- x^9}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(9x^8 + 36x^7h + 84x^6h^2 + 126x^5h^3 + 126x^4h^4 + 84x^3h^5 + 36x^2h^6 + 9xh^7 + h^8)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} 9x^8 + \underbrace{36x^7h + 84x^6h^2 + 126x^5h^3 + 126x^4h^4 + 84x^3h^5 + 36x^2h^6 + 9xh^7 + h^8}_{\to 0} = 9x^8
\end{aligned}
$$

Aplicação

Mostrar, pela definição, que $f(x) = x^9 \implies f'(x) = 9x^8$.

R.) Usando $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, a resolução ficaria $f'(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^9 - a^9}{x - a}$

Fazendo a divisão $\dfrac{x^9 - a^9}{x - a}$ por Briot-Ruffini, temos

$$\begin{array}{c|ccccccccc|c}
a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^9 \\
\hline
 & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^8 & 0
\end{array}$$

$$f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^9 - a^9}{x - a} = \lim_{x\to a} x^8 + ax^7 + a^2x^6 + a^3x^5 + a^4x^4 + a^5x^3 + a^6x^2 + a^7x + a^8$$
$$= a^8 + a\cdot a^7 + a^2\cdot a^6 + a^3\cdot a^5 + a^4\cdot a^4 + a^5\cdot a^3 + a^6\cdot a^2 + a^7\cdot a + a^8 = 9a^8$$

De modo geral, $f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$.

Derivadas usuais

*

Regras

Algumas derivadas usuais

$$f(x) = c \implies f'(x) = 0$$
$$f(x) = x \implies f'(x) = 1$$
$$f(x) = ax \implies f'(x) = a$$
$$f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$$

Propriedades e Regras

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

Obs: $(f \cdot g)'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$

Até a próxima!!!