

Integrais: Integral de Funções Trigonométricas

JLC062 \ JCE025

Prof.^o Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons “Atribuição-Compartilhalgual 4.0 Internacional”.



Exemplos

Exemplos

Ex. 1 - Potência

$$\int \cos^3 x dx$$

Exemplos

Ex. 2 - Potência com Produto

$$\int \text{sen}^5 x \cos^2 x dx$$

Exemplos

Ângulo Metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Exemplos

Ex. 3 - Definida

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x dx \text{ (ângulo-metade)}$$

Exemplos

Ex. 3 - Definida

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x dx \text{ (redução)}$$

Exemplos

Ex. 4

$$\int \sin^4 x dx \text{ (ângulo-metade)}$$

Exemplos

Ex. 4

$$\int \text{sen}^4 x dx \text{ (redução)}$$

Resumo

Estratégias para $\int \text{sen}^m x \cos^n x dx$

Se a potência do **cosseno** for ímpar ($n = 2k + 1$), independente da potência de $\text{sen } x$:

- ▶ Guarde um fator cosseno
- ▶ Usar $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ para os demais fatores

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^m x \cos^{2k+1} x dx &= \int \text{sen}^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx = \int \text{sen}^m x (1 - \text{sen}^2 x)^k \cos x dx \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{Substituição} \\ u = \text{sen } x \\ du = \cos x dx \end{array} \right) = \int u^m (1 - u^2)^k du\end{aligned}$$

Estratégias para $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Se a potência do **seno** for ímpar ($m = 2k + 1$), independente da potência de $\cos x$:

- ▶ Guarde um fator seno
- ▶ Usar $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ para os demais fatores

$$\begin{aligned}\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^k \sin x \cos^n x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin^m x dx \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{Substituição} \\ u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{array} \right) = - \int (1 - u^2)^k u^n du\end{aligned}$$

Estratégias para $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Se ambas as potências forem pares, utilizamos os ângulos metade:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

podendo ser útil usar

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Estratégias para $\int \tan^m x \sec^n x dx$

Se a potência da **secante** for par ($n = 2k, k \geq 2$), independente da potência de $\tan x$:

- ▶ Guarde um fator $\sec^2 x$
- ▶ Usar $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para os demais fatores

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^{2k} x dx &= \int \tan^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx = \int \tan^m x (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{Substituição} \\ u = \tan x \\ du = \sec^2 x dx \end{array} \right) = \int u^m (1 + u^2)^{k-1} du\end{aligned}$$

Estratégias para $\int \tan^m x \sec^n x dx$

Se a potência da **tangente** for ímpar ($m = 2k + 1$), independente da potência de $\cos x$:

- ▶ Guarde um fator $\sec x \tan x$
- ▶ Usar $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para os demais fatores

$$\begin{aligned}\int \tan^{2k+1} x \sec^n x dx &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{Substituição} \\ u = \sec x \\ du = \sec x \tan x dx \end{array} \right) = \int (u^2 - 1)^k u^{n-1} du\end{aligned}$$

Produtos

Produtos

$$\int \text{sen}(mx) \cos(nx) dx$$

Exemplos

Exemplos

Ex. 5

$$\int \text{sen}(4x) \cos(5x) dx$$

Produtos

Produtos

$$\int \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) dx$$

Produtos

$$\int \cos(mx) \cos(nx) dx$$

Exemplos

Exemplos

Ex. 6

$$\int \cos(\pi x) \cos(4\pi x) dx$$

Bons Estudos!!!