# Integrais: Integral por Substituição Trigonométrica

## JLC062 \ JCE025

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

# Caso $\sqrt{a^2 - x^2}$

## Caso $\sqrt{a^2 - x^2}$

Usando $x = a \text{ sen}\,\theta$

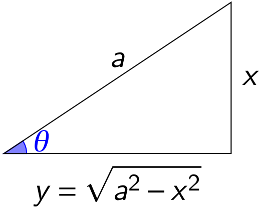
$$\sqrt{a^2 - x^2} \implies \sqrt{a^2 - a^2 \text{ sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \text{ sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = \sqrt{(a\cos\theta)^2} = a|\cos\theta|$$

## Caso $\sqrt{a^2 - x^2}$

Usando $x = a \operatorname{sen}\theta$

$$\sqrt{a^2 - x^2} \implies \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = \sqrt{(a\cos\theta)^2} = a|\cos\theta|$$

Voltando, após efetuar a integração, usamos o triângulo para retornar de $\theta$ para $x$.




$$x = a \operatorname{sen}\theta \implies \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

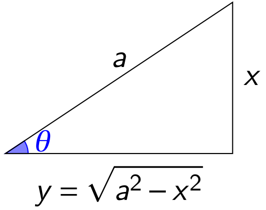
$$y = a\cos\theta \implies \theta = \arccos\left(\frac{y}{a}\right)$$

## Caso $\sqrt{a^2 - x^2}$

Usando $x = a \operatorname{sen}\theta$

$$\sqrt{a^2 - x^2} \implies \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = \sqrt{(a\cos\theta)^2} = a|\cos\theta|$$

Voltando, após efetuar a integração, usamos o triângulo para retornar de $\theta$ para $x$.




$$x = a \operatorname{sen}\theta \implies \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y = a\cos\theta \implies \theta = \arccos\left(\frac{y}{a}\right)$$

Ainda temos

$$\tan\theta = \frac{x}{y}; \quad \sec\theta = \frac{a}{y}; \quad \csc\theta = \frac{a}{x}; \quad \cot\theta = \frac{y}{x}$$

# Exemplos

# Exemplos

## Ex. 1

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$$

# Exemplos

## Ex. 1

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} = \begin{pmatrix} \text{SUBST. TRIG.} \\ x = 3 \ \operatorname{sen}\theta \\ dx = 3\cos\theta\, d\theta \end{pmatrix}$$

# Resumo

# Resumo

1) Passa de $x$ para $\theta$, usando a tabela de substituições;
2) Resolve a integral em $\theta$;
3) Volta para $x$, usando o triângulo retângulo

# Resumo

## Tabela de Substituições Trigonométricas

| Expressão | Substituir | Ident. Trigonométrica | Derivação |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a \text{ sen}\,\theta$ <br> $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ | $1 - \text{ sen}^2\theta = \cos^2\theta$ | $dx = a\cos\theta\, d\theta$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ | $x = a\tan\theta$ <br> $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ | $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ | $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a\sec\theta$ <br> $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ | $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ | $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ |

# Exemplos

# Exemplos

## Ex. 2

Encontrar a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

# Exemplos

## Ex. 3

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$$

# Exemplos

## Ex. 4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ com } a > 0$$

# Exemplos

## Ex. 4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ com } a > 0 \; (x = a\cosh t)$$

**Bons Estudos!!!**