

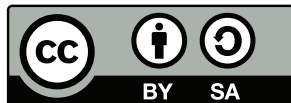
Integrais: Integrais com Frações Parciais

JLC062 \ JCE025

Prof.^o Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons “Atribuição-Compartilhagual 4.0 Internacional”.



Funções Racionais

Classificação

Sendo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, sendo $p(x)$ e $q(x)$ polinômios podemos classificar $f(x)$ como:

- ▶ **própria** se o grau de $p(x)$ for *menor que* $q(x)$
- ▶ **imprópria** se o grau de $p(x)$ for *maior que ou igual à* $q(x)$

No segundo caso, $\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, sendo $h(x)$ o resultado e $r(x)$ o resto da divisão, com $\frac{r(x)}{q(x)}$ própria.

Exemplos

Exemplos

Ex. 1a)

$$\int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} dx$$

Exemplos

Ex. 1b)

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$$

Fatoração do denominador

Fatoração do denominador

Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema

Para qualquer polinômio $q(x)$ de grau n e coeficientes reais, é possível fatorar

$$q(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

com $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ e a_n coeficiente do termo de maior grau.

Além disso, se $z \in \mathbb{C}$ tem parte imaginária e é raiz de $q(x)$, então \bar{z} , conjugado, também é raiz.

Assim, para $z = a + bi$, o produto $(x - z)(x - \bar{z})$ fica

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - (a + bi + a - bi)x + (a + bi)(a - bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

Fatoração do denominador

Casos de Fatoração

Caso I: Apenas raízes reais, sem repetição

Caso II: Apenas raízes reais, algumas com repetição

Caso III: Raízes reais e complexas, sem repetição

Caso IV: Raízes reais e complexas, algumas com repetição

Pelas relações de Girardi, a razão do termo independente a_0 do polinômio pelo coeficiente a_n é o produto das raízes

$$\prod_{i=1}^n r_i = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Frações Parciais

Frações Parciais

Passos

Passo 1: Verificar se a fração é própria ou imprópria

- a) Se própria, seguir para o próximo passo.
- b) Se imprópria, efetuar a divisão, integrar o resultado e o quociente restante separadamente.

Passo 2: Fatorar o denominador

Passo 3: Determinar os numeradores, de acordo com o caso

Passo 4: Resolver as integrais

Frações Parciais

Frações Parciais

Caso I

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

Frações Parciais

Caso II

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

Frações Parciais

Caso III

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Frações Parciais

Caso IV

$$\int \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx$$

Bons Estudos!!!