Integrais: Integrais com Frações Parciais

JLC062 \ JCE025

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Funções Racionais

Classificação

Sendo $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, sendo $p(x)$ e $q(x)$ polinômios podemos classificar $f(x)$ como:

- **própria** se o grau de $p(x)$ for *menor que* $q(x)$
- **imprópria** se o grau de $p(x)$ for *maior que ou igual à* $q(x)$

No segundo caso, $\dfrac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$, sendo $h(x)$ o resultado e $r(x)$ o resto da divisão, com $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ própria.

Exemplos

Exemplos

Ex. 1a)

$$\int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\,dx$$

Exemplos

Ex. 1b)

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$$

Fatoração do denominador

Teorema

Para qualquer polinômio $q(x)$ de grau n e coeficientes reais, é possível fatorar

$$q(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

com $r_1, r_2, \ldots r_n \in \mathbb{C}$ e a_n coeficiente do termo de maior grau.
Além disso, se $z \in \mathbb{C}$ tem parte imaginária e é raiz de $q(x)$, então $\overline{z}$, conjugado, também é raiz.
Assim, para $z = a + bi$, o produto $(x - z)(x - \overline{z})$ fica

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z} = x^2 - (a + bi + a - bi)x + (a + bi)(a - bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

Caso I:	Apenas raízes reais, sem repetição
Caso II:	Apenas raízes reais, algumas com repetição
Caso III:	Raízes reais e complexas, sem repetição
Caso IV:	Raízes reais e complexas, algumas com repetição

Pelas relações de Girardi, a razão do termo independente a_0 do polinômio pelo coeficiente a_n é o produto das raízes

$$\prod_{i=1}^{n} r_i = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Frações Parciais

Passo 1: Verificar se a fração é própria ou imprópria

a) Se própria, seguir para o próximo passo.
b) Se imprópria, efetuar a divisão, integrar o resultado e o quociente restante separadamente.

Passo 2: Fatorar o denominador

Passo 3: Determinar os numeradores, de acordo com o caso

Passo 4: Resolver as integrais

Frações Parciais

Frações Parciais

Caso I

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

Frações Parciais

Caso II

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}\,dx$$

Frações Parciais

Caso III

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$$

Frações Parciais

Caso IV

$$\int \frac{-x^3+2x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

Bons Estudos!!!