Sistemas Lineares

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

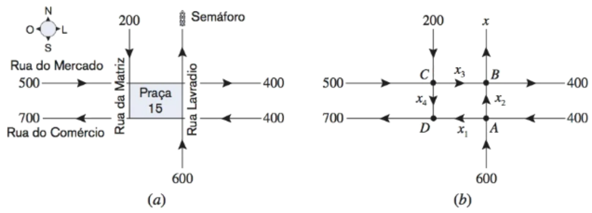
Projetando Padrões de Tráfego

Projetando Padrões de Tráfego

Em termos gerais, uma rede é um conjunto de ramos através dos quais "flui" algum meio.

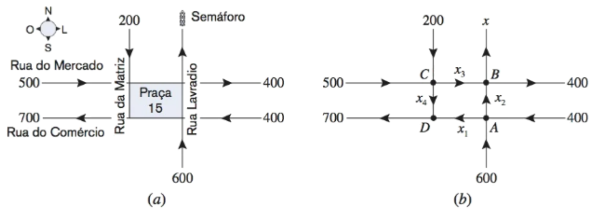
Projetando Padrões de Tráfego

Em termos gerais, uma rede é um conjunto de ramos através dos quais "flui" algum meio. A rede da figura mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.



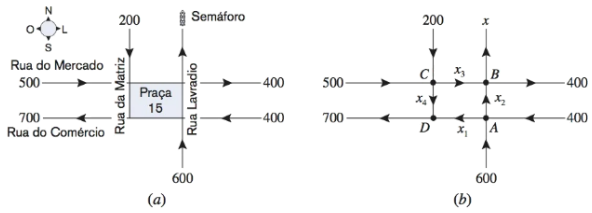
Projetando Padrões de Tráfego

Em termos gerais, uma rede é um conjunto de ramos através dos quais "flui" algum meio. A rede da figura mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.



- Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, qual deve ser o fluxo de veículos ao redor da praça para evitar congestionamentos?

Projetando Padrões de Tráfego



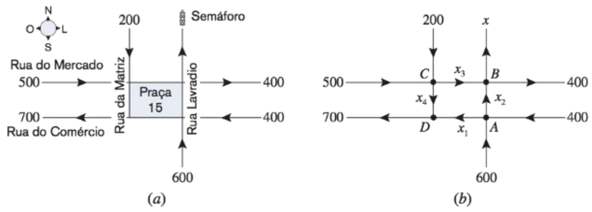
Para equilibrar o fluxo, o valor x no semáforo deve ser tal que o número de carros que entra na praça seja igual ao número de carros que sai da praça.

Carros que entram: $500 + 600 + 400 + 200 = 1700$

Carros que saem: $700 + 400 + x$

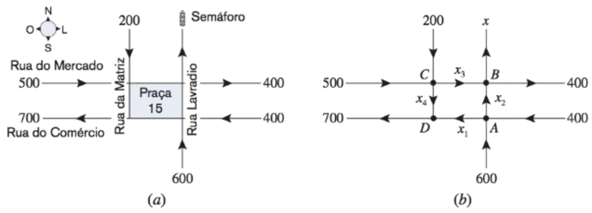
Logo $1100 + x = 1700 \implies x = 1700 - 1100 = 600.$

Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

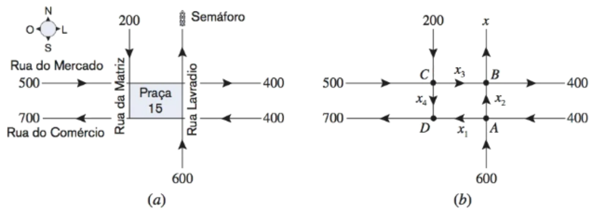
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	Entrada	Saída
A		

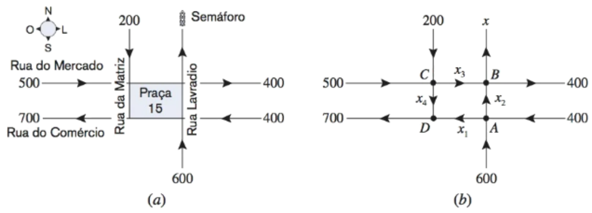
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	Entrada	Saída
A	$400 + 600$	

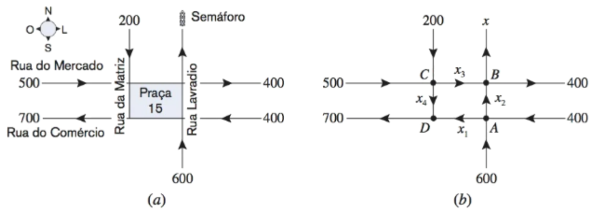
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	**Entrada**	**Saída**
A	$400 + 600$	$x_1 + x_2$
B		

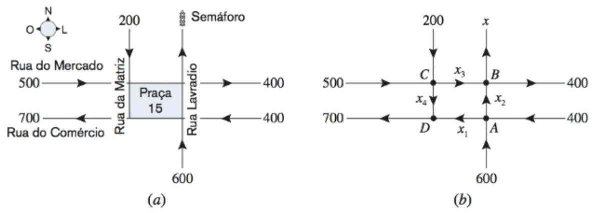
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	**Entrada**	**Saída**
A	$400 + 600$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	

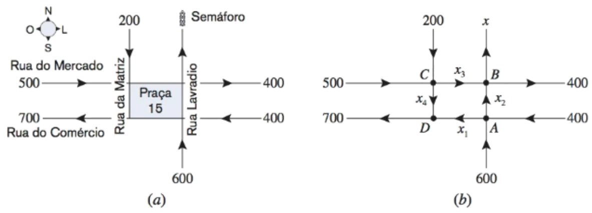
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	Entrada	Saída
A	$400 + 600$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	$400 + 600$
C		

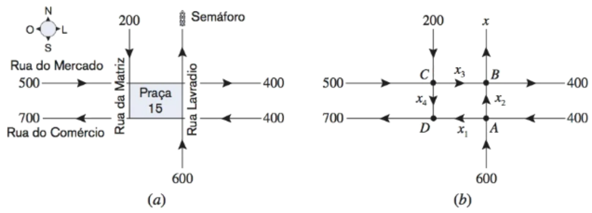
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	**Entrada**	**Saída**
A	$400 + 600$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	$400 + 600$
C	$500 + 200$	

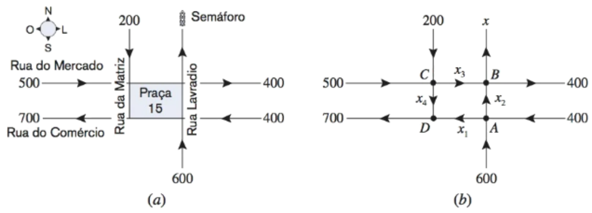
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	**Entrada**	**Saída**
A	$400 + 600$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	$400 + 600$
C	$500 + 200$	$x_3 + x_4$
D		

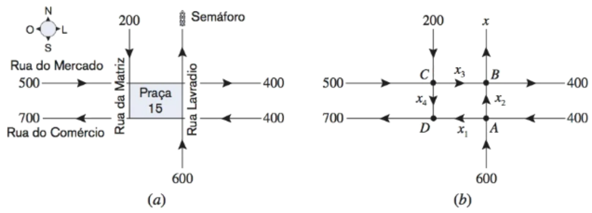
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	Entrada	Saída
A	$400+600$	x_1+x_2
B	x_2+x_3	$400+600$
C	$500+200$	x_3+x_4
D	x_1+x_4	

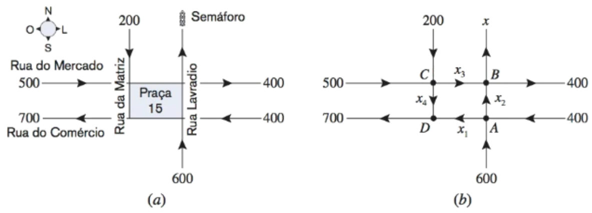
Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	Entrada	Saída
A	$400 + 600$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	$400 + 600$
C	$500 + 200$	$x_3 + x_4$
D	$x_1 + x_4$	700

Projetando Padrões de Tráfego

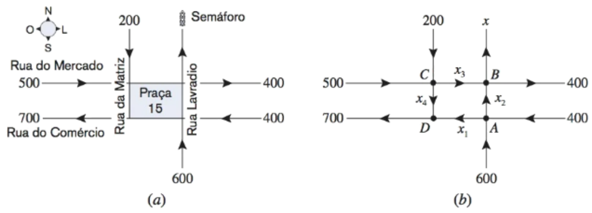


Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	Entrada	Saída
A	$400+600$	x_1+x_2
B	x_2+x_3	$400+600$
C	$500+200$	x_3+x_4
D	x_1+x_4	700

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1000 & = x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 & = 1000 \\ 700 & = x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 & = 700 \end{cases}$$

Projetando Padrões de Tráfego



Para evitar congestionamentos, o fluxo que entra em cada cruzamento deve ser igual ao que sai.

Cruzamento	Entrada	Saída
A	$400+600$	x_1+x_2
B	x_2+x_3	$400+600$
C	$500+200$	x_3+x_4
D	x_1+x_4	700

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1000 = x_1+x_2 \\ x_2+x_3 = 1000 \\ 700 = x_3+x_4 \\ x_1+x_4 = 700 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 \qquad\qquad = 1000 \\ \qquad x_2+x_3 \qquad = 1000 \\ \qquad\qquad x_3+x_4 = 700 \\ x_1 \qquad\qquad +x_4 = 700 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

O que é uma “equação”?

O que é uma “equação”?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

O que é uma "equação"?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

Equação Linear

2 dimensões: $ax + by = c$, não sendo ambos a e b nulos

O que é uma "equação"?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

Equação Linear

2 dimensões: $ax + by = c$, não sendo ambos a e b nulos

3 dimensões: $ax + by + cz = d$, não sendo todos a, b e c nulos

O que é uma "equação"?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

Equação Linear

2 dimensões: $ax + by = c$, não sendo ambos a e b nulos

3 dimensões: $ax + by + cz = d$, não sendo todos a, b e c nulos

Forma geral: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, não sendo todos a_i nulos

O que é uma "equação"?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

Equação Linear

2 dimensões: $ax + by = c$, não sendo ambos a e b nulos

3 dimensões: $ax + by + cz = d$, não sendo todos a, b e c nulos

Forma geral: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, não sendo todos a_i nulos

Equação Linear homogênea: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, não sendo todos a_i nulos

O que é uma “equação”?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

Equação Linear

2 dimensões: $ax + by = c$, não sendo ambos a e b nulos

3 dimensões: $ax + by + cz = d$, não sendo todos a, b e c nulos

Forma geral: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, não sendo todos a_i nulos

Equação Linear homogênea: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, não sendo todos a_i nulos

Características importantes:

O que é uma "equação"?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

Equação Linear

2 dimensões: $ax + by = c$, não sendo ambos a e b nulos

3 dimensões: $ax + by + cz = d$, não sendo todos a, b e c nulos

Forma geral: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, não sendo todos a_i nulos

Equação Linear homogênea: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, não sendo todos a_i nulos

Características importantes:

- Não há produto de variáveis. $x_1 + x_2 = 1$ ✓ $x_1x_2 = 1$ $\otimes$

O que é uma "equação"?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

Equação Linear

2 dimensões: $ax + by = c$, não sendo ambos a e b nulos

3 dimensões: $ax + by + cz = d$, não sendo todos a, b e c nulos

Forma geral: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, não sendo todos a_i nulos

Equação Linear homogênea: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, não sendo todos a_i nulos

Características importantes:

- Não há produto de variáveis. $x_1 + x_2 = 1$ ✓ $x_1x_2 = 1$ $\otimes$
- Não há expoente maior que 1 nas variáveis. $3x_1 - 5x_2 = 2$ ✓ $x_1 + x_1^2 = 1$ $\otimes$

O que é uma "equação"?

Uma *equação* é a afirmação da **igualdade** entre duas expressões.

Equação Linear

2 dimensões: $ax + by = c$, não sendo ambos a e b nulos

3 dimensões: $ax + by + cz = d$, não sendo todos a, b e c nulos

Forma geral: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, não sendo todos a_i nulos

Equação Linear homogênea: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, não sendo todos a_i nulos

Características importantes:

- Não há produto de variáveis. $x_1 + x_2 = 1$ ✓ $x_1x_2 = 1$ ⊗
- Não há expoente maior que 1 nas variáveis. $3x_1 - 5x_2 = 2$ ✓ $x_1 + x_1^2 = 1$ ⊗
- As variáveis não são argumentos de outras funções. $\operatorname{sen} x_1 = 0$, $\log x_1 = 1$, ... ⊗

Sistema

Um conjunto finito de equações lineares é chamado **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear**. As variáveis do sistema são chamadas **incógnitas**.

Sistema

Um conjunto finito de equações lineares é chamado **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear**. As variáveis do sistema são chamadas **incógnitas**.

$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases}$$

Sistema

Um conjunto finito de equações lineares é chamado **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear**. As variáveis do sistema são chamadas **incógnitas**.

$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases}$$

Um sistema genérico de m equações e n incógnitas (sistema $m \times n$) pode ser representado como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Sistema

Um conjunto finito de equações lineares é chamado **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear**. As variáveis do sistema são chamadas **incógnitas**.

$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases}$$

Um sistema genérico de m equações e n incógnitas (sistema $m \times n$) pode ser representado como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

O índice duplo nos coeficientes indica sua posição, sendo o primeiro ligado à equação do sistema e o segundo à variável. Exemplo: a_{23} é o coeficiente da $2^{\underline{a}}$ equação da variável x_3.

A **solução** do sistema é um conjunto de valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tais que substituindo $x_1 = s_1, x_2 = s_2$, etc ... **todas** as equações são satisfeitas.

Exemplo :

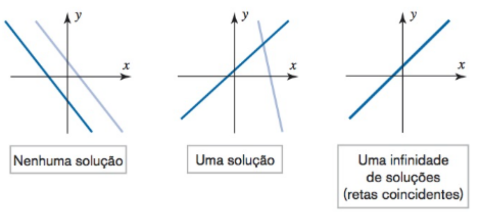
O sistema $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ tem solução $x = 1$ e $y = -2$.

Sistemas Lineares

Interpretação Geométrica

Podemos associar sistemas de duas incógnitas a retas no plano. Com isso, o sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ é representado por duas retas que:

- São paralelas, **não tendo soluções**;
- Se instersectam em um ponto, tendo **uma única solução**;
- São coincidentes, tendo **infinitas soluções**.

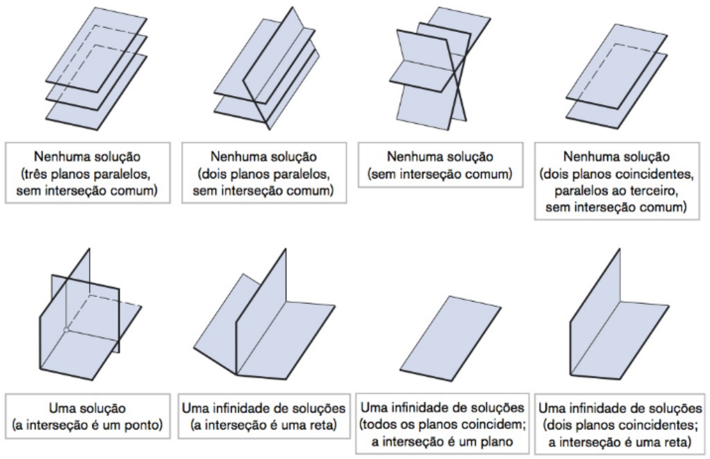


No primeiro caso o sistema é dito **inconsistente**.

Sistemas Lineares

Interpretação Geométrica

O mesmo acontece com sistemas de equações com três variáveis, associados a planos no espaço.



Todos os sistemas lineares se enquadram em um desses casos:

- Nenhuma solução;
- Uma solução ou;
- Infinitas soluções.

Sistemas Lineares

Um sistema com uma solução

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

Um sistema com infinitas soluções

$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 16x - 8y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x - 2y + 4z = 10 \\ 3x - 3y + 6z = 15 \end{cases}$$

Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ \quad\;\; 2x_2 = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

A medida que cresce o número de equações e variáveis, cresce também a complexidade da resolução.

Sistemas Lineares

Matriz Aumentada

A medida que cresce o número de equações e variáveis, cresce também a complexidade da resolução.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A este arranjo retangular de valores chamamos **matriz**. Como essa matriz tem os coeficientes e os termos independentes, é chamada de **matriz aumentada** do sistema.

Qual deve ser a matriz aumentada do seguinte sistema?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

O método básico para resolução de sistemas consiste em operações que produzam sistemas cada vez mais simples, até obter a solução.

Sistemas Lineares

Operações em linhas

O método básico para resolução de sistemas consiste em operações que produzam sistemas cada vez mais simples, até obter a solução. As operações típicas são:

Sistemas Lineares

Operações em linhas

O método básico para resolução de sistemas consiste em operações que produzam sistemas cada vez mais simples, até obter a solução. As operações típicas são:

- Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula;

O método básico para resolução de sistemas consiste em operações que produzam sistemas cada vez mais simples, até obter a solução. As operações típicas são:

- Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula;
- Trocar duas equações entre si;

Sistemas Lineares

Operações em linhas

O método básico para resolução de sistemas consiste em operações que produzam sistemas cada vez mais simples, até obter a solução. As operações típicas são:

- Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula;
- Trocar duas equações entre si;
- Somar uma equação com outra multiplicada por uma constante.

O método básico para resolução de sistemas consiste em operações que produzam sistemas cada vez mais simples, até obter a solução. As operações típicas são:

- Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula;
- Trocar duas equações entre si;
- Somar uma equação com outra multiplicada por uma constante.

Como cada linha da matriz aumentada corresponde a uma equação, essas operações corresponde às seguintes operações na matriz:

I) Multiplicar uma linha inteira por uma constante não nula;
II) Trocar duas linhas entre si;
III) Somar uma linha com outra multiplicada por uma constante.

Estas são as **operações elementares com linhas**

Resolver o sistema usando as operações em linhas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Eliminação Gaussiana

Eliminação Gaussiana

Forma escalonada e escalonada reduzida

Uma matriz estará na forma **escalonada** (ou forma escalonada por linhas) se tiver as seguintes propriedades:

- Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é **1**. Chamamos este número 1 de **pivô**.

Uma matriz estará na forma **escalonada** (ou forma escalonada por linhas) se tiver as seguintes propriedades:

- Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é **1**. Chamamos este número 1 de **pivô**.
- Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.

Uma matriz estará na forma **escalonada** (ou forma escalonada por linhas) se tiver as seguintes propriedades:

- Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é **1**. Chamamos este número 1 de **pivô**.
- Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
- Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.

Eliminação Gaussiana

Forma escalonada e escalonada reduzida

Uma matriz estará na forma **escalonada** (ou forma escalonada por linhas) se tiver as seguintes propriedades:

- Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é **1**. Chamamos este número 1 de **pivô**.
- Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
- Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.

Uma matriz estará na forma **escalonada reduzida por linhas** se, além destas, tiver também:

- Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Avalie as seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Se a matriz aumentada de um sistema de equações for colocada em forma escalonada reduzida por linhas por meio de uma sequência de operações lineares, então o conjunto de soluções está visível ou pode ser facilmente obtido usando parâmetros.

Dadas as matrizes reduzidas a seguir, resolva os sistemas:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Definição

Se um sistema linear tem uma infinidade de soluções, então um conjunto de equações paramétricas é denominado uma **solução geral** do sistema se, a partir dessas equações, puderem ser obtidas todas as soluções pela substituição dos parâmetros por valores numéricos.

Façamos o processo de Eliminação na matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteira de zeros.

Eliminação Gaussiana

Processo de Eliminação Gaussiana

Passo 1: Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteira de zeros.

Passo 2: Garantimos que o primeiro elemento da primeira linha, que será nosso pivô, seja não nulo. Fazemos isso permutando as duas primeiras.

Passo 1: Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteira de zeros.

Passo 2: Garantimos que o primeiro elemento da primeira linha, que será nosso pivô, seja não nulo. Fazemos isso permutando as duas primeiras.

Passo 3: Agora o pivô precisa ser 1. Para isso, dividimos a linha toda pelo valor ali encontrado, se já não for 1.

Passo 1: Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteira de zeros.

Passo 2: Garantimos que o primeiro elemento da primeira linha, que será nosso pivô, seja não nulo. Fazemos isso permutando as duas primeiras.

Passo 3: Agora o pivô precisa ser 1. Para isso, dividimos a linha toda pelo valor ali encontrado, se já não for 1.

Passo 4: Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

Eliminação Gaussiana

Processo de Eliminação Gaussiana

Passo 1: Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteira de zeros.

Passo 2: Garantimos que o primeiro elemento da primeira linha, que será nosso pivô, seja não nulo. Fazemos isso permutando as duas primeiras.

Passo 3: Agora o pivô precisa ser 1. Para isso, dividimos a linha toda pelo valor ali encontrado, se já não for 1.

Passo 4: Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

Passo 5: Repetimos esse passo nas colunas seguintes até que a matriz esteja na forma **escalonada**.

Passo 1: Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteira de zeros.

Passo 2: Garantimos que o primeiro elemento da primeira linha, que será nosso pivô, seja não nulo. Fazemos isso permutando as duas primeiras.

Passo 3: Agora o pivô precisa ser 1. Para isso, dividimos a linha toda pelo valor ali encontrado, se já não for 1.

Passo 4: Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

Passo 5: Repetimos esse passo nas colunas seguintes até que a matriz esteja na forma **escalonada**.

Passo 6: Começando pela última linha, somamos múltiplos convenientes desta às linhas superiores para introduzir zeros acima do pivô, obtendo a forma **escalonada reduzida por linhas**.

Eliminação Gaussiana

Processo de Eliminação Gaussiana

Este procedimento é chamado **Eliminação de Gauss-Jordan** ou **Eliminação Gaussiana** (se não efetuarmos o passo 6).

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Wilhelm Jordan
(1842–1899)

Resolva, por eliminação de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

Sistema homogêneo

Um sistema linear é dito **homogêneo** se os termos constantes são todos nulos, tendo a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Sistema homogêneo

Um sistema linear é dito **homogêneo** se os termos constantes são todos nulos, tendo a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

O sistema homogêneo é sempre consistente, tendo apenas duas possibilidades:

- Apenas a solução inteira nula, chamada de **solução trivial**;

Sistema homogêneo

Um sistema linear é dito **homogêneo** se os termos constantes são todos nulos, tendo a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases}$$

O sistema homogêneo é sempre consistente, tendo apenas duas possibilidades:

- Apenas a solução inteira nula, chamada de **solução trivial**;
- Infinitas soluções não nulas (ditas não-triviais)

Dica:

Há um caso que pode-se garantir que o sistema homogêneo tem infinitas soluções sem resolvê-lo: Quando o sistema tem mais incógnitas do que equações.

Resolva o seguinte sistema homogêneo com a eliminação de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{cases}$$

Importante:

1) Nenhuma operação altera o número de colunas, mantendo a correspondência ao sistema original;

Importante:

1) Nenhuma operação altera o número de colunas, mantendo a correspondência ao sistema original;
2) Quando obtemos uma linha toda nula, podemos ignorá-la no sistema, pois ela não impões nenhuma condição.

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos

Se um sistema linear homogêneo tiver n incógnitas e sua forma escalonada reduzida de sua matriz aumentada tiver r linhas não nulas, então o sistema terá $n - r$ variáveis livres

Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos

Se um sistema linear homogêneo tiver n incógnitas e sua forma escalonada reduzida de sua matriz aumentada tiver r linhas não nulas, então o sistema terá $n-r$ variáveis livres

Por isso, se o sistema homogêneo $m \times n$ tem menos equações que incógnitas $(m < n)$, ele terá variáveis livres. (Por quê?)

Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos

Se um sistema linear homogêneo tiver n incógnitas e sua forma escalonada reduzida de sua matriz aumentada tiver r linhas não nulas, então o sistema terá $n-r$ variáveis livres

Por isso, se o sistema homogêneo $m \times n$ tem menos equações que incógnitas $(m < n)$, ele terá variáveis livres. (Por quê?)
Isso leva ao seguinte resultado

Teorema

Um sistema linear homogêneo com mais incógnitas que equações tem uma infinidade de soluções.

Eliminação Gaussiana

Três fatos importantes

1) Toda matriz tem uma única forma escalonada *reduzida* por linhas; ou seja, independentemente de utilizar eliminação de Gauss-Jordan ou uma outra sequência qualquer de operações elementares, no final sempre chegamos à mesma forma escalonada reduzida por linhas.

Eliminação Gaussiana

Três fatos importantes

1) Toda matriz tem uma única forma escalonada *reduzida* por linhas; ou seja, independentemente de utilizar eliminação de Gauss-Jordan ou uma outra sequência qualquer de operações elementares, no final sempre chegamos à mesma forma escalonada reduzida por linhas.
2) As formas escalonadas por linhas não são únicas, ou seja, diferentes sequências de operações com linhas podem resultar em formas escalonadas diferentes. É única apenas a forma reduzida!

Eliminação Gaussiana

Três fatos importantes

1) Toda matriz tem uma única forma escalonada *reduzida* por linhas; ou seja, independentemente de utilizar eliminação de Gauss-Jordan ou uma outra sequência qualquer de operações elementares, no final sempre chegamos à mesma forma escalonada reduzida por linhas.
2) As formas escalonadas por linhas não são únicas, ou seja, diferentes sequências de operações com linhas podem resultar em formas escalonadas diferentes. É única apenas a forma reduzida!
3) Embora as formas escalonadas por linhas não sejam únicas, todas as formas escalonadas por linhas de uma matriz A têm o mesmo número de linhas nulas, e os pivôs sempre ocorrem na mesma posição das formas escalonadas por linhas de A. Essas posições sao denominadas **posições de pivô de A**. Dizemos que uma coluna que contenha uma posição de pivô é uma **coluna de pivô de A**.

Bons Estudos!!!