Matrizes e operações matriciais

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definições

Definições

Coleções retangulares de valores aparecem em diversos contextos:

	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sáb.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Figura: Horas de estudo por semana

Definições

Coleções retangulares de valores aparecem em diversos contextos:

	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sáb.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Figura: Horas de estudo por semana

Suprimindo títulos de linhas e colunas, obtemos a seguinte coleção retangular de valores

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definições

Mais geralmente temos

Definição

Uma **matriz** é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as **entradas** da matriz.

Definições

Mais geralmente temos

Definição

Uma **matriz** é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as **entradas** da matriz.

Exemplo :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Definições

Mais geralmente temos

Definição

Uma **matriz** é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as **entradas** da matriz.

Exemplo :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

O **tamanho** de uma matriz é descrito em termos de números de linhas e colunas.

Definições

Mais geralmente temos

Definição

Uma **matriz** é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as **entradas** da matriz.

Exemplo :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

O **tamanho** de uma matriz é descrito em termos de números de linhas e colunas.

Ex.:

Quais são os tamanhos das matrizes do Exemplo acima?

Definições

Notação

Utilizamos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ou } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Definições

Notação

Utilizamos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ou } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Quando discutimos matrizes, é costume dizer que as quantidades numéricas são **escalares**. Salvo menções explícitas *escalares são números reais*!

Definições

Notação

A entrada que ocorre na linha i e coluna j de uma matriz A é denotada por a_{ij}.
Uma matriz arbitrária 3×4 pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

e uma matriz arbitrária $m \times n$ como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definições

Notação

Quando for desejada uma notação mais compacta, a matriz precedente pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}]$$

sendo a primeira notação quando é importante frisar o tamanho da matriz.

Definições

Notação

Quando for desejada uma notação mais compacta, a matriz precedente pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}]$$

sendo a primeira notação quando é importante frisar o tamanho da matriz.
A entrada na linha i e coluna j de uma matriz A também é denotada por $(A)_{ij}$. Assim

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Definições

Notação

Quando for desejada uma notação mais compacta, a matriz precedente pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}]$$

sendo a primeira notação quando é importante frisar o tamanho da matriz.
A entrada na linha i e coluna j de uma matriz A também é denotada por $(A)_{ij}$. Assim

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Ex.:

Para $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, identifique $(A)_{11}$, $(A)_{12}$, $(A)_{21}$ e $(A)_{22}$.

Definições

Vetores

Matrizes de uma linha (ou de uma coluna) são de importância especial e chamadas de **vetores**. É comum denotá-los por letras minúsculas em negrito, sendo dispensado os índices duplos.

Matrizes de uma linha (ou de uma coluna) são de importância especial e chamadas de **vetores**. É comum denotá-los por letras minúsculas em negrito, sendo dispensado os índices duplos. Assim, um vetor linha $\mathbf{a}$ $1 \times n$ e um vetor coluna $\mathbf{b}$ $m \times 1$ podem ser escritos como

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Se uma matriz tem o mesmo número n de linhas e colunas ela é dita **matriz quadrada de ordem n** e as entradas a_{ii} formam a **diagonal principal de A**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Definição

Duas matrizes são definidas como **iguais** se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes são iguais

Definição

Duas matrizes são definidas como **iguais** se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes são iguais

Exemplo :

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição

Duas matrizes são definidas como **iguais** se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes são iguais

Exemplo :

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $x = 5$, temos $A = B$.

Definição

Duas matrizes são definidas como **iguais** se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes são iguais

Exemplo :

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $x = 5$, temos $A = B$.

Já não existe valor de x que torne $A = C$ pois elas tem tamanhos distintos.

Definição

Se A e B são matrizes de *mesmo tamanho*, a **soma** $A+B$ é a matriz obtida somando as entradas correspondentes de A e B: $(a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

A **diferença** $A-B$ é obtida pela diferença das entradas: $(a-b)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Não podemos operar com matrizes de tamanhos distintos.

Definição

Se A e B são matrizes de *mesmo tamanho*, a **soma** $A+B$ é a matriz obtida somando as entradas correspondentes de A e B: $(a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

A **diferença** $A-B$ é obtida pela diferença das entradas: $(a-b)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Não podemos operar com matrizes de tamanhos distintos.

Ex.:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

O que são $A+B$, $A-B$, $A+C$, $B+C$, $A-C$ e $B-C$?

Operações com Matrizes

Multiplicação por escalar

Definição

Sendo A uma matriz e c um escalar, o produto cA é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A pelo escalar c.

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Definição

Sendo A uma matriz e c um escalar, o produto cA é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A pelo escalar c.

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Ex.:

Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Calcule $2A$, $(-1)B$ e $\frac{1}{3}C$

Temos ainda que definir a operação mais importante: a multiplicação de duas matrizes. Boa parte da motivação por trás da definição deriva das aplicações a sistemas lineares de equações. Se temos um sistema de uma equação linear a uma incógnita, ele pode ser escrito na forma

$$ax = b$$

Operações com Matrizes

Multiplicação de matrizes

Temos ainda que definir a operação mais importante: a multiplicação de duas matrizes. Boa parte da motivação por trás da definição deriva das aplicações a sistemas lineares de equações. Se temos um sistema de uma equação linear a uma incógnita, ele pode ser escrito na forma

$$ax = b$$

Geralmente pensamos em a, x e b como escalares; entretanto, eles poderiam ser tratados como matrizes 1×1. Nosso objetivo agora é generalizar a Equação acima, de modo a representar um sistema linear $m \times n$ por uma simples equação matricial da forma $Ax = b$ em que A é uma matriz $m \times n$, x é um vetor de incógnitas em $\mathbb{R}^n$, e b está em $\mathbb{R}^m$. Consideramos primeiramente o caso de uma equação em várias incógnitas.

Caso de uma equação e várias variáveis:

Considere $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$. Se fizermos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

e definirmos o produto

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

então a equação $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$ pode ser escrita matricialmente como $A\mathbf{x} = 4$

Operações com Matrizes

Multiplicação de matrizes

Por exemplo, se

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

então

$$A\mathbf{x} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -3$$

Operações com Matrizes

Multiplicação de matrizes

Por exemplo, se

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

então

$$A\mathbf{x} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -3$$

Como o resultado do produto de um vetor linha por um vetor coluna é um escalar, chamamos esse produto de **produto escalar**.

Importante: O número de colunas do primeiro vetor precisa ser igual ao número de linhas do segundo!

Definição

Sendo A uma matriz $m \times r$ e B uma matriz $r \times n$ o produto AB é obtido sendo ab_{ij} o produto escalar da linha a_i pela coluna b_j.

Definição

Sendo A uma matriz $m \times r$ e B uma matriz $r \times n$ o produto AB é obtido sendo ab_{ij} o produto escalar da linha a_i pela coluna b_j.

Ex.:

Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule AB, BA e analise o tamanho das matrizes obtidas.

Operações com Matrizes

Matrizes em blocos

Uma matriz pode ser **particionada** ou **subdividida** em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas.
Seguem três partições de uma matriz 3×4

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Uma matriz pode ser **particionada** ou **subdividida** em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas.

Seguem três partições de uma matriz 3×4

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

Uma matriz pode ser **particionada** ou **subdividida** em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas.

Seguem três partições de uma matriz 3×4

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Matrizes em blocos

Uma matriz pode ser **particionada** ou **subdividida** em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas.

Seguem três partições de uma matriz 3×4

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 \end{bmatrix}$$

A utilidade disto consiste em obter o resultado de parte do produto sem necessariamente multiplicar a matriz inteira.

Definição

Se $A_1, A_2, \ldots, A_r$ são matrizes do mesmo tamanho e $c_1, c_2, \ldots, c_r$ escalares, então uma expressão da forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_rA_r$$

é denominada **combinação linear** de $A_1, A_2, \ldots, A_r$ com **coeficientes** $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Definição

Se $A_1, A_2, \ldots, A_r$ são matrizes do mesmo tamanho e $c_1, c_2, \ldots, c_r$ escalares, então uma expressão da forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_rA_r$$

é denominada **combinação linear** de $A_1, A_2, \ldots, A_r$ com **coeficientes** $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Exemplo :

Sendo $A_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ podemos dizer que $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$ é uma combinação linear de A_1, A_2 e A_3 pois

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Definição

Se $A_1, A_2, \ldots, A_r$ são matrizes do mesmo tamanho e $c_1, c_2, \ldots, c_r$ escalares, então uma expressão da forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_rA_r$$

é denominada **combinação linear** de $A_1, A_2, \ldots, A_r$ com **coeficientes** $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Exemplo :

Note que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Desta forma, podemos ver o produto de uma matriz por um vetor coluna como a *combinação linear* das colunas da matriz.

Operações com Matrizes

Combinação Linear

Exemplo :

Vejamos o produto $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$.

Cada coluna de AB é uma combinação linear de A.

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como encontrar os coeficientes de combinação linear?

Queremos escrever $\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Fazendo $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ temos $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 \qquad\quad + \ x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad\quad = 0 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, chegamos em $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, a solução $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ do sistema

$$A\mathbf{x} = b$$

são os coeficientes da combinação linear das colunas de A que resultam em b.

Definição

Se A for uma matriz $m \times n$ qualquer, então a **transposta de A** será uma matriz $n \times m$, denotada por A^T resultante das trocas das linhas com as colunas de A.

$$(a^T)_{ij} = a_{ji}$$

Definição

Se A for uma matriz $m \times n$ qualquer, então a **transposta de A** será uma matriz $n \times m$, denotada por A^T resultante das trocas das linhas com as colunas de A.

$$(a^T)_{ij} = a_{ji}$$

Ex.:

Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenha A^T, B^T, C^T, D^T

Definição

Se $A = A^T$ dizemos que a matriz é **simétrica**.
Se $-A = A^T$ dizemos que a matriz é **antissimétrica**

Definição

Se $A = A^T$ dizemos que a matriz é **simétrica**.
Se $-A = A^T$ dizemos que a matriz é **antissimétrica**

Ex.:

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular (se possível) $AB, BA, (AB)^T, A^T B^T, (BA)^T, B^T A^T$

Definição

Se A foi uma matriz quadrada, então o **traço de A**, denotado por $tr(A)$ é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não for uma matriz quadrada.

Definição

Se A foi uma matriz quadrada, então o **traço de A**, denotado por $tr(A)$ é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não for uma matriz quadrada.

Exemplo :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

Bons Estudos!!!