Inversão de matrizes

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Matriz Identidade

Matriz Identidade

Definição

Uma matriz quadrada, com valores 1 na diagonal e 0 nas demais entradas, é chamada de **Matriz Identidade**. Sua notação é dada por I ou I_n, quando precisamos destacar seu tamanho.
Os elementos dessa matriz também atendem ao chamado *Delta de Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Matriz Identidade

Definição

Uma matriz quadrada, com valores 1 na diagonal e 0 nas demais entradas, é chamada de **Matriz Identidade**. Sua notação é dada por I ou I_n, quando precisamos destacar seu tamanho.
Os elementos dessa matriz também atendem ao chamado *Delta de Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Exemplo :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz identidade faz o papel de *elemento neutro da multiplicação*. Ou seja, sendo $A_{m\times n}$

$$AI_n = I_mA = A$$

Matriz Identidade

Teorema

Se R é a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz quadrada A, então uma das duas situações abaixo ocorre:

- R tem ao menos uma linha de zeros ao final, ou;
- R é a matriz identidade I_n

Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Encontrar as respectivas R escalonadas reduzidas por linhas de A e B.

Matriz Inversa

Matriz Inversa

Definição

Se A for uma matriz quadrada $n \times n$ e pudermos encontrar B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então diremos que A é **invertível** (ou **não singular**) e B é uma inversa de A. Caso não exista a B, dizemos que A é **não invertível** ou **singular**.

Exemplo :

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule AB e BA.

Matriz Inversa

Uma classe de matrizes singulares

Caso a matriz tenha uma linha toda nula ou uma coluna toda nula, necessariamente ela será singular.
Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

fazer um produto BA particionando A em colunas.
É possível que $BA = I_3$?

Matriz Inversa

Teorema

Se B e C são inversas de uma mesma matriz A, então $B = C$

Matriz Inversa

Teorema

Se B e C são inversas de uma mesma matriz A, então $B = C$

Segundo esse teorema, se existe uma matriz inversa, então ela é única.

Notação

A **matriz inversa** de A é denotada por A^{-1}.

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e só se, $ad - bc \neq 0$.
Neste caso, a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Inversa da Matriz 2×2

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e só se, $ad - bc \neq 0$.
Neste caso, a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exemplo :

Calcule as inversas de

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Solução de sistema com inversa

Exemplo :

Avaliar o sistema $\begin{cases} ax+by &= u \\ cx+dy &= v \end{cases}$, sabendo que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem inversa.

Matriz Inversa

Teorema

Se A e B são invertíveis de mesmo tamanho, então

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Para mais matrizes, isso também se verifica!

Matriz Inversa

Teorema

Se A e B são invertíveis de mesmo tamanho, então

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Para mais matrizes, isso também se verifica!

Exemplo :

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifique a igualdade $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bons Estudos!!!