Matrizes Elementares

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Matrizes Elementares

Matrizes Elementares

Definição - Equivalente por linhas

Dizemos que duas matrizes A e B são equivalentes por linhas é possível obter uma delas a partir da outra pela aplicação de operações elementares.

Mas quais são essas “operações elementares”?

Matrizes Elementares

Definição - Equivalente por linhas

Dizemos que duas matrizes A e B são equivalentes por linhas é possível obter uma delas a partir da outra pela aplicação de operações elementares.

Operações Elementares

São equivalentes às operações que aplicamos na resolução do sistema linear!

I) Multiplicar uma linha por um escalar não nulo

II) Trocar duas linhas entre si

III) Substituir uma linha pela soma dela com um múltiplo de outra linha

Matrizes Elementares

Definição - Matrizes Elementares

Uma **matriz elementar** de tamanho $n \times n$ é obtida aplicando uma *única* operação elementar em I_n.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes Elementares

Teorema

Se $A_{m\times n}$ é uma matriz qualquer e $E_{m\times m}$ é uma matriz elementar, então o produto EA é a aplicação em A da mesma operação elementar aplicada em E.

Exemplo :

Sendo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular EA.

Matrizes Elementares

Teorema

Se $A_{m\times n}$ é uma matriz qualquer e $E_{m\times m}$ é uma matriz elementar, então o produto EA é a aplicação em A da mesma operação elementar aplicada em E.

Exemplo :

Sendo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular EA.

Qualquer matriz elementar é invertível, e sua inversa também é elementar

Afirmações Equivalentes

Afirmações Equivalentes

Teorema

Se A for uma matriz quadrada $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes (isto é, ou são todas verdadeiras ou são todas falsas)

(a) A é invertível

(b) $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial

(c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n

(d) A pode ser expressa como produto de matrizes elementares.

Ao longo do curso, mais afirmações serão adicionadas a esse teorema

Algoritmo da inversão

Algoritmo da inversão

Como inverter uma matriz quadrada $n \times n$?

Para encontrar a inversa de uma matriz A, encontre uma sequência de operações elementares com linhas que reduza A à identidade I_n e depois efetue essa mesma sequência de operações em I_n para obter A^{-1}

Um modo prático para isso será escrever a matriz identidade à direita de A

$$[A \mid I]$$

e, em seguida, efetuar operações elementares para reduzir A à I, obtendo

$$[I \mid A^{-1}]$$

Algoritmo da inversão

Exemplo 1:

Calcular as inversas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Algoritmo da inversão

Exemplo 1:

Calcular as inversas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Exemplo 2:

Analise os sistemas $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_3 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

Ainda sobre sistemas lineares

Ainda sobre sistemas lineares

Teorema:

Se A for uma matriz invertível $n \times n$, então para cada $\mathbf{b}_{n\times 1}$ o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução única, a saber, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

Ainda sobre sistemas lineares

Teorema:

Se A for uma matriz invertível $n \times n$, então para cada $\mathbf{b}_{n\times 1}$ o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução única, a saber, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

Assim, o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 17 \end{cases}$ pode ser escrito matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

e sua solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ainda sobre sistemas lineares

Sistemas com mesma matriz de coeficientes

Exemplo :

Resolva os sistemas:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Como os dois sistemas tem a mesma matriz de coeficientes, podemos resolvê-los simultaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

Ainda sobre sistemas lineares

Sistemas com mesma matriz de coeficientes

Exemplo :

Resolva os sistemas:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Transformando para a forma escalonada reduzida por linhas temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Mais afirmações equivalentes

Mais afirmações equivalentes

Teorema

Se A for uma matriz quadrada $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é invertível

(b) $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial

(c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n

(d) A pode ser expressa como produto de matrizes elementares.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}_{n\times 1}$

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada $\mathbf{b}_{n\times 1}$

Um problema fundamental

Um problema fundamental

Problema:

Seja A uma matriz $m \times n$ fixada. Encontre todas as matrizes $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$ tais que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja consistente.

Um problema fundamental

Problema:

Seja A uma matriz $m \times n$ fixada. Encontre todas as matrizes $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$ tais que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja consistente.

Se A for *quadrada e invertível*, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é sempre consistente. Porém, se A não for invertível ou não for quadrada, $\mathbf{b}$ precisa atender certas condições para essa consistência.

Um problema fundamental

Exemplo 1:

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que seja consistente o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1 \\ x_1 + x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$$

Um problema fundamental

Exemplo 1:

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que seja consistente o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1 \\ x_1 \qquad + \ \ x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e só se,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}, \text{ com } b_1 \text{ e } b_2 \text{ arbitrários.}$$

Um problema fundamental

Exemplo 2:

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que seja consistente o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = b_3 \end{cases}$$

Um problema fundamental

Exemplo 2:

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que seja consistente o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = b_3 \end{cases}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente para

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40b_1 + 16b2 + 9b_3 \\ 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix}, \text{ com quaisquer } b_1, b_2 \text{ e } b_3.$$

Bons Estudos!!!