Matrizes de formatos especiais

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Matrizes Diagonais

Matrizes Diagonais

Definição

Uma matriz quadrada é dita **diagonal** se, sendo *quadrada*, tem todos os elementos fora da diagonal nulos.

Exemplos de matrizes diagonais:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Matrizes Diagonais

Forma Geral

Uma matriz diagonal arbitrária D pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Matrizes Diagonais

Forma Geral

Uma matriz diagonal arbitrária D pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Condição para ser invertível

Uma matriz diagonal só será invertível se todas as entradas da diagonal forem não nulas e

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} {}^1/{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}^1/{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {}^1/{d_n} \end{bmatrix}$$

Matrizes Diagonais

Forma Geral

Uma matriz diagonal arbitrária D pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Potências de matrizes diagonais

Sendo D uma matriz diagonal e k um inteiro positivo, então

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Matrizes Diagonais

Exemplo :

Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

calcular A^{-1}, A^5 e A^{-5}.

Matrizes Diagonais

Os produtos envolvendo matrizes diagonais são especialmente fáceis:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} & d_1 a_{14} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & d_2 a_{23} & d_2 a_{24} \\ d_3 a_{31} & d_3 a_{32} & d_3 a_{33} & d_3 a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & d_3 a_{13} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & d_3 a_{23} \\ d_1 a_{31} & d_2 a_{32} & d_3 a_{33} \\ d_1 a_{41} & d_2 a_{42} & d_3 a_{43} \end{bmatrix}$$

Matrizes Diagonais

Em outras palavras:

- Multiplicar A à *esquerda* por uma matriz diagonal D, multiplicamos **linhas sucessivas** de A por entradas sucessivas de D.
- Multiplicar A à *direita* por uma matriz diagonal D, multiplicamos **colunas sucessivas** de A por entradas sucessivas de D.

Matrizes Triangulares

Matrizes Triangulares

Definição

Uma matriz quadrada com todas as entradas nulas **acima** da diagonal principal é chamada **triangular inferior**.

Já uma matriz quadrada com todas as entradas nulas **abaixo** da diagonal principal é chamada **triangular superior**.

De modo geral, ambas as situações são chamadas **triangulares**.

Exemplo :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}}_{\text{Triangular Superior}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{\text{Triangular Inferior}}$$

Matrizes Triangulares

Em outras palavras:

- Uma matriz quadrada é *triangular superior* se, e só se, todas as entradas a_{ij} com $i > j$ são nulas.
- Uma matriz quadrada é *triangular inferior* se, e só se, todas as entradas a_{ij} com $i < j$ são nulas.

ou ainda

- Uma matriz quadrada é *triangular superior* se, e só se, a i-ésima **linha** começa com, pelo menos $i-1$ zeros.
- Uma matriz quadrada é *triangular inferior* se, e só se, a j-ésima **coluna** começa com, pelo menos $j-1$ zeros.

Matrizes Triangulares

Teorema

(a) A transposta de uma triangular inferior é uma triangular superior e vice-versa.

(b) O produto de triangulares inferiores é triangular inferior. O mesmo para triangulares superiores.

(c) Uma matriz triangular é invertível se, e só se, suas entradas diagonais são não nulas

(d) A inversa de uma triangular inferior invertível também é triangular inferior. O mesmo para triangulares superiores.

Matrizes Triangulares

Exemplo :

Sendo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular $A^{-1}, B^{-1}, A^T, AB, BA$ e $A^T B^T$

Matrizes Simétricas

Matrizes Simétricas

Definição:

Uma matriz quadrada é dita **simétrica** se $A = A^T$.

Matrizes Simétricas

Definição:

Uma matriz quadrada é dita **simétrica** se $A = A^T$.

Temos que, se A e B são simétricas de mesmo tamanho e k um escalar, então

- A^T é simétrica;
- $A + B$ e $A - B$ são simétricas;
- kA é simétrica.

Exemplo :

Verificar as propriedades com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes Simétricas

Teorema

O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e somente se, as matrizes comutam.

Exemplo :

Verificar o teorema anterior com os seguintes pares de matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Matrizes Simétricas

Teorema

Se A for simétrica e invertível, A^{-1} também será simétrica

Exemplo :

Verificar o teorema anterior para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Produtos AA^T e A^TA

Produtos AA^T e A^TA

Para qualquer matriz $A_{m\times n}$ os produtos AA^T e A^TA são possíveis. Por quê?

Produtos AA^T e A^TA

Para qualquer matriz $A_{m\times n}$ os produtos AA^T e A^TA são possíveis.
Além disso, AA^T e A^TA são sempre simétricas!

Exemplo :

Verificar a afirmação acima sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Produtos AA^T e A^TA

Para qualquer matriz $A_{m\times n}$ os produtos AA^T e A^TA são possíveis.
Além disso, AA^T e A^TA são sempre simétricas!

Exemplo :

Verificar a afirmação acima sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Se A for quadrada e invertível, então AA^T e A^TA também serão invertíveis.

Exemplo :

Verificar a afirmação acima sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bons Estudos!!!