Determinantes

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

O que são determinantes?

O que são determinantes?

Determinantes

A cada matriz quadrada podemos associar um **número** chamado **Determinante**.

O que são determinantes?

Determinantes

A cada matriz quadrada podemos associar um **número** chamado **Determinante**.
A função do determinante é indicar se a matriz tem inversa ou não.

O que são determinantes?

Determinantes

A cada matriz quadrada podemos associar um **número** chamado **Determinante**.
A função do determinante é indicar se a matriz tem inversa ou não.

Há registros de uso de algo semelhante para auxílio na resolução de sistemas entre 200 a.C e 100 a.C na China. A teoria atual surgiu simultaneamente, em 1683, nos estudos de Seki Shinsuke Kowa, no Japão e Gottfried Wihelm Leibniz, na Alemanha.

Matrizes 2×2

Matrizes 2×2

Vimos anteriormente que uma matriz 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem inversa se o termo $ad - bc \neq 0$ e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Matrizes 2×2

Vimos anteriormente que uma matriz 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem inversa se o termo $ad - bc \neq 0$ e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Assim

Definição

O determinante de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a expressão $\det(A) = ad - bc$.

Matrizes 2×2

Vimos anteriormente que uma matriz 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem inversa se o termo $ad - bc \neq 0$ e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Assim

Definição

O determinante de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a expressão $\det(A) = ad - bc$.

Notação

Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, indicamos $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Matrizes 2×2

Importante

Embora A seja uma matriz quadrada, $\det(A)$ sempre será um **número!**

Determinantes de matrizes de outras ordens

Buscamos uma forma de expressar determinantes de matrizes maiores a partir do conhecimento desta expressão para 2×2.

Menor

Sendo A uma matriz $n \times n$, com $n > 2$, o **Menor da entrada $\mathbf{a_{ij}}$** é o determinante da submatriz restante após suprimir de A a linha i e a coluna j.
Notação: M_{ij}.

Buscamos uma forma de expressar determinantes de matrizes maiores a partir do conhecimento desta expressão para 2×2.

Menor

Sendo A uma matriz $n \times n$, com $n > 2$, o **Menor da entrada $\mathbf{a_{ij}}$** é o determinante da submatriz restante após suprimir de A a linha i e a coluna j.
Notação: M_{ij}.

Exemplo :

Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, temos $M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$ e $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & \cancel{1} & -4 \\ 2 & \cancel{5} & 6 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$

Cofator

O **Cofator da entrada $\mathbf{a_{ij}}$** é dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Cofator

O **Cofator da entrada $\mathbf{a_{ij}}$** é dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Em outras palavras, $C_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{se } i+j \text{ é par.} \\ -M_{ij}, & \text{se } i+j \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Cofator

O **Cofator da entrada $\mathbf{a_{ij}}$** é dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Em outras palavras, $C_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{se } i+j \text{ é par.} \\ -M_{ij}, & \text{se } i+j \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Exemplo :

Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, temos $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$ e $C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$

Definição

Se A for uma matriz quadrada, definimos o **determinante de** A pelo resultado da soma dos produtos de cada elemento de uma linha (ou coluna) com seu respectivo cofator. Esta soma também é chamada de **expansão em cofatores de** $\det(A)$.

Definição

Se A for uma matriz quadrada, definimos o **determinante de** A pelo resultado da soma dos produtos de cada elemento de uma linha (ou coluna) com seu respectivo cofator. Esta soma também é chamada de **expansão em cofatores de** $\det(A)$.

Temos

$$\det(A) = \underbrace{a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}}_{\text{Expansão pela coluna } j.}$$

e

$$\det(A) = \underbrace{a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}}_{\text{Expansão pela linha } i.}$$

Exemplo :

Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ calcular $\det(A)$

a) expandindo em cofatores ao longo da primeira linha;

b) expandindo em cofatores ao longo da primeira coluna.

Exemplo :

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ qual expansão é melhor para calcular $\det(A)$?

Determinantes de matrizes de outras ordens

Exemplo :

Como fica a expansão em cofatores para calcular $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$?

Exemplo :

Como fica a expansão em cofatores para calcular $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$?

Teorema

Sendo A uma matriz triangular (superior, inferior ou diagonal) $n \times n$, temos que o determinante é o produto dos termos da diagonal

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Determinantes de matrizes de outras ordens

Técnicas para 2×2 e 3×3

Já temos que $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 1 \cdot 4 = -6 - 4 = -10$

Determinantes de matrizes de outras ordens

Técnicas para 2×2 e 3×3

Já temos que $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 1 \cdot 4 = -6 - 4 = -10$

Comparativos

a) Expandir $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$ pela primeira linha

b) Comparar com $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right.$

Calculando determinantes por redução de linhas

Calculando determinantes por redução de linhas

Teoremas

Sendo quadradas as matrizes citadas

- Se A tem uma linha ou uma coluna inteira nula, seu determinante será 0.

Calculando determinantes por redução de linhas

Teoremas

Sendo quadradas as matrizes citadas

- Se A tem uma linha ou uma coluna inteira nula, seu determinante será 0.
- $\det(A) = \det(A^T)$.

Calculando determinantes por redução de linhas

Teoremas

Sendo quadradas as matrizes citadas

- Se A tem uma linha ou uma coluna inteira nula, seu determinante será 0.
- $\det(A) = \det(A^T)$.
- Se B for a matriz que resulta ao mutiplicar uma única linha (ou coluna) de A por k, então $\det(B) = k\det(A)$.

Calculando determinantes por redução de linhas

Teoremas

Sendo quadradas as matrizes citadas

- Se A tem uma linha ou uma coluna inteira nula, seu determinante será 0.
- $\det(A) = \det(A^T)$.
- Se B for a matriz que resulta ao mutiplicar uma única linha (ou coluna) de A por k, então $\det(B) = k\det(A)$.
- Se B for a matriz obtida ao permutar duas linhas (ou colunas) de A, então $\det(B) = -\det(A)$.

Calculando determinantes por redução de linhas

Teoremas

Sendo quadradas as matrizes citadas

- Se A tem uma linha ou uma coluna inteira nula, seu determinante será 0.
- $\det(A) = \det(A^T)$.
- Se B for a matriz que resulta ao mutiplicar uma única linha (ou coluna) de A por k, então $\det(B) = k\det(A)$.
- Se B for a matriz obtida ao permutar duas linhas (ou colunas) de A, então $\det(B) = -\det(A)$.
- Se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha, ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então $\det(B) = \det(A)$.

Calculando determinantes por redução de linhas

Determinantes das matrizes elementares

Teorema

Sendo E matriz elementar

- Se E for a matriz que resulta ao mutiplicar uma única linha (ou coluna) de I_n por k, então $\det(E) = k$.

Teorema

Sendo E matriz elementar

- Se E for a matriz que resulta ao mutiplicar uma única linha (ou coluna) de I_n por k, então $\det(E) = k$.
- Se E for a matriz obtida ao permutar duas linhas (ou colunas) de I_n, então $\det(E) = -1$.

Teorema

Sendo E matriz elementar

- Se E for a matriz que resulta ao mutiplicar uma única linha (ou coluna) de I_n por k, então $\det(E) = k$.
- Se E for a matriz obtida ao permutar duas linhas (ou colunas) de I_n, então $\det(E) = -1$.
- Se E for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de I_n é somado a uma outra linha, então $\det(E) = 1$.

Calculando determinantes por redução de linhas

Determinantes das matrizes elementares

Teorema

Sendo E matriz elementar

- Se E for a matriz que resulta ao mutiplicar uma única linha (ou coluna) de I_n por k, então $\det(E) = k$.
- Se E for a matriz obtida ao permutar duas linhas (ou colunas) de I_n, então $\det(E) = -1$.
- Se E for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de I_n é somado a uma outra linha, então $\det(E) = 1$.

Teorema

Se uma matriz tem duas linhas (ou colunas) proporcionais, então seu determinante é nulo.

Exemplo :

Calcular

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo :

Calcular

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Propriedades de determinantes

Propriedades de determinantes

Resultados de determinantes

- $\det(kA) = k^n \det(A)$

Propriedades de determinantes

Resultados de determinantes

- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- Se B é quadrada e E elementar, ambas de mesmo tamanho $\det(EB) = \det(E)\det(B)$

Propriedades de determinantes

Resultados de determinantes

- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- Se B é quadrada e E elementar, ambas de mesmo tamanho $\det(EB) = \det(E)\det(B)$
- Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$

Propriedades de determinantes

Resultados de determinantes

- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- Se B é quadrada e E elementar, ambas de mesmo tamanho $\det(EB) = \det(E)\det(B)$
- Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$
- Se A e B são quadradas e de mesmo tamanho $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Propriedades de determinantes

Resultados de determinantes

- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- Se B é quadrada e E elementar, ambas de mesmo tamanho $\det(EB) = \det(E)\det(B)$
- Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$
- Se A e B são quadradas e de mesmo tamanho $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Se A for invertível $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Adjunta de uma matriz

Adjunta de uma matriz

Definição

Se A for uma matriz quadrada qualquer e C_{ij} o cofator de a_{ij}, então a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é denominada **matriz de cofatores de A**. A transposta da matriz de cofatores é denominada **Adjunta de A** e denotada $adj(A)$.

Exemplo :

Calcular a adjunta de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Adjunta de uma matriz

Teorema - Inversa com adjunta

Se A for uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Adjunta de uma matriz

Teorema - Inversa com adjunta

Se A for uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Exemplo :

Obter A^{-1} sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Mais afirmações equivalentes

Mais afirmações equivalentes

Teorema

Se A for uma matriz quadrada $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é invertível

(b) $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial

(c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n

(d) A pode ser expressa como produto de matrizes elementares.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}_{n\times 1}$

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada $\mathbf{b}_{n\times 1}$

(g) $\det(A) \neq 0$

Bons Estudos!!!