Vetores

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definição

Definição

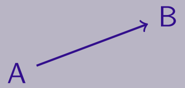
Vetores

Considerando sua utilização na Física, **vetores** são objetos matemáticos, isto é, abstrações, que trazem consigo três informações: Módulo (ou magnitude), Direção e Sentido.

Definição

Vetores

Considerando sua utilização na Física, **vetores** são objetos matemáticos, isto é, abstrações, que trazem consigo três informações: Módulo (ou magnitude), Direção e Sentido.
São geometricamente representados por setas, sendo o comprimento relacionado ao módulo e direção e sentido da seta à direção e sentido do vetor.



Notação

Podem ser denotados com letras minúsculas destacadas (**negrito** em textos digitados) ou com uma setinha sobre a letra: $\vec{v}$ ou $\mathbf{v}$.

Notação

Podem ser denotados com letras minúsculas destacadas (**negrito** em textos digitados) ou com uma setinha sobre a letra: $\vec{v}$ ou $\mathbf{v}$.

Dados ponto inicial A e ponto final B podemos representar $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Notação

Podem ser denotados com letras minúsculas destacadas (**negrito** em textos digitados) ou com uma setinha sobre a letra: $\vec{v}$ ou $\mathbf{v}$.
Dados ponto inicial A e ponto final B podemos representar $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Equivalência

Dois vetores de mesma direção, sentido e módulo são ditos *equivalentes*.
Como módulo, direção e sentido independem da posição do vetor no espaço, dizemos que dois vetores equivalentes são iguais $\vec{v} = \vec{w}$.

Notação

Podem ser denotados com letras minúsculas destacadas (**negrito** em textos digitados) ou com uma setinha sobre a letra: $\vec{v}$ ou $\mathbf{v}$.

Dados ponto inicial A e ponto final B podemos representar $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Equivalência

Dois vetores de mesma direção, sentido e módulo são ditos *equivalentes*.

Como módulo, direção e sentido independem da posição do vetor no espaço, dizemos que dois vetores equivalentes são iguais $\vec{v} = \vec{w}$.

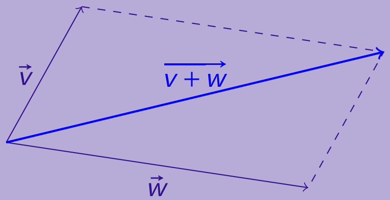
Vetor nulo

Um vetor que tem início e fim no mesmo ponto, ou ainda, um vetor de magnitude nula é chamado de **Vetor nulo** e representado por $\vec{\mathbf{0}}$.

Operações

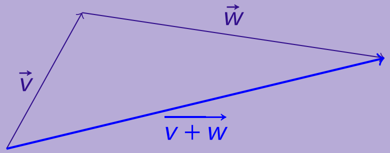
Regra do Paralelogramo

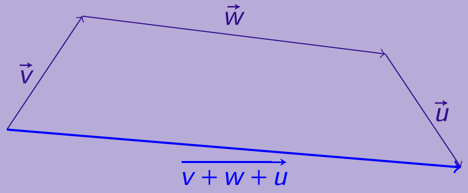
Se dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (bi ou tridimensionais) estão com a mesma origem, a soma $\overrightarrow{v+w}$ será a diagonal do paralelogramo que tem lados $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



Regra do Triângulo

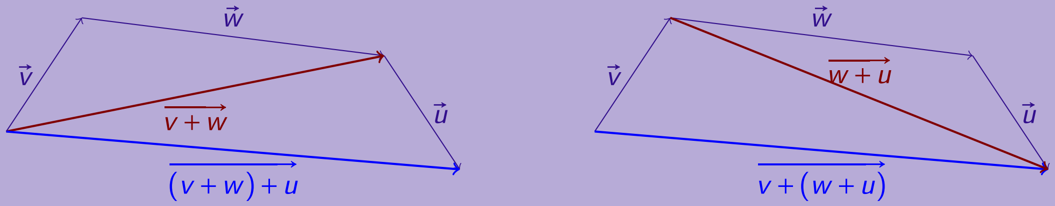
Considerando dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sendo a origem de $\vec{w}$ no destino de $\vec{v}$, temos que a soma $\overrightarrow{v+w}$ será o vetor que parte da origem de $\vec{v}$ até o destino de $\vec{w}$. Esse método é mais comum para soma de 3 ou mais vetores.





Regra do Triângulo

No caso de 3 ou mais vetores, podemos ver que a soma é *associativa*. Ou seja, somar os dois primeiros e depois somar o terceiro resulta no mesmo que somar os dois últimos e depois o primeiro



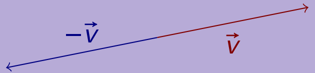
Operações

Vetor Negativo

Negativo ou Oposto

O **negativo** ou **oposto** de um vetor $\vec{v}$, denotado por $-\vec{v}$ é o vetor de mesma magnitude, mesma direção mas **sentido contrário**, de modo que

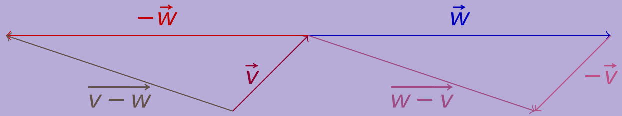
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$



Operações

Diferença de vetores

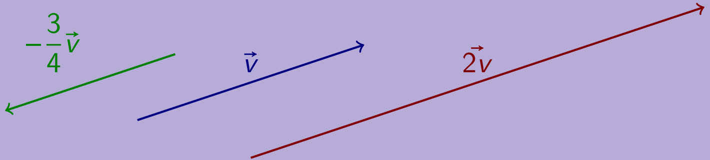
Podemos trabalhar com diferença de vetores de modo semelhante à soma. $\overrightarrow{v-w} = \vec{v} + (-\vec{w})$.



Multiplicação por escalar

Seja k um escalar e $\vec{v}$ um vetor. O produto $\overrightarrow{kv}$ é um vetor que terá:

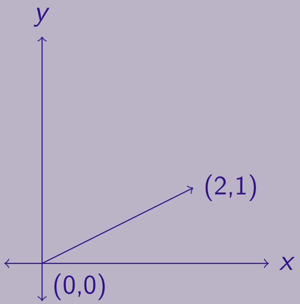
- A mesma direção de $\vec{v}$;
- Módulo igual à $|k|$ vezes o módulo de $\vec{v}$;
- Sentido igual à $\vec{v}$ se $k > 0$; sentido oposto à $\vec{v}$ se $k < 0$ e vetor nulo se $k = 0$.

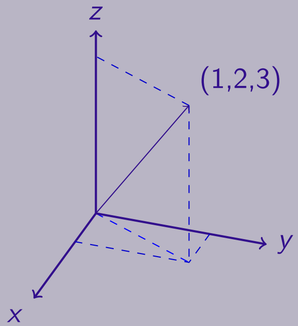


Com isso, temos que $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$.

Sistemas de coordenadas

Sistemas de coordenadas

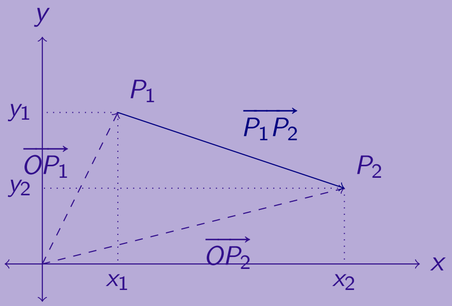




As coordenadas cartesianas do vetor são chamadas **componentes**.

Sistemas de coordenadas

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ definem o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$, suas componentes serão $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



Em três dimensões, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ temos $\overrightarrow{P_1P_2}$, suas componentes serão $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Definição

Dois vetores são **iguais** se suas componentes forem iguais.

Exemplo :

$$(a, b, c, d) = (1, -4, 2, 7)$$

implica que $a = 1$, $b = -4$, $c = 2$ e $d = 7$.

Operações

Dados $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$ temos

- $\overrightarrow{v+w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$
- $\overrightarrow{kw} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$
- $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, \dots, -v_n)$
- $\overrightarrow{w-v} = \vec{w} + (-\vec{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \dots, w_n - v_n)$

Sistemas de coordenadas

Operações com componentes

Teorema:

Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, k e $m \in \mathbb{R}$ temos

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- $k(\vec{v} + \vec{w} = k\vec{v} + k\vec{w}$
- $(k + m)\vec{v} = k\vec{v} + m\vec{v}$
- $(km)\vec{u} = k(m\vec{u})$
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Ainda temos

- $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- $k\vec{0} = \vec{0}$
- $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

Combinação Linear

Dizemos que $\vec{w}$ é **combinação linear** dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ se puder ser escrito como

$$\vec{w} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \dots + k_r\vec{v}_r = \sum_{i=1}^{r} k_i v_i$$

sendo os escalares $k_1, k_2 \dots, k_r$ os *coeficientes* da combinação linear.

Exemplo :

$$(2,1,-5) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) - 5(0,0,1)$$

Exemplo 2:

$$(2,1,-5) = 1(1,0,0) + 6(1,1,0) - 5(1,1,1)$$

Sistemas de coordenadas

Notação alternativa

Vetores também podem ser representados como *matriz linha* ou *matriz coluna* dependendo do contexto.

Exemplo :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Norma de um vetor

Norma de um vetor

Norma

Norma é um termo matemático comum para "comprimento". Assim, a **norma do vetor** nada mais é do que seu comprimento, módulo ou magnitude.

Notação: $||\vec{v}||$ é a norma de $\vec{v}$.

Importante:

Norma de vetor é um **escalar**!!!

Norma de um vetor

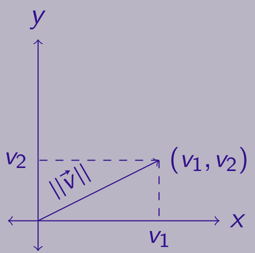
Norma

Norma é um termo matemático comum para "comprimento". Assim, a **norma do vetor** nada mais é do que seu comprimento, módulo ou magnitude.

Notação: $||\vec{v}||$ é a norma de $\vec{v}$.

Importante:

Norma de vetor é um **escalar**!!!



Para $\mathbb{R}^2$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos que

$$||\vec{v}||^2 = v_1^2 + v_2^2 \implies ||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Norma de um vetor

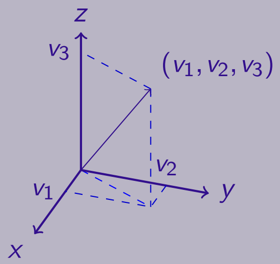
Norma

Norma é um termo matemático comum para "comprimento". Assim, a **norma do vetor** nada mais é do que seu comprimento, módulo ou magnitude.

Notação: $||\vec{v}||$ é a norma de $\vec{v}$.

Importante:

Norma de vetor é um **escalar**!!!



Para $\mathbb{R}^3$

Aplicando o teorema de Pitágoras, a diagonal que esyá no plano xy mede $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Norma de um vetor

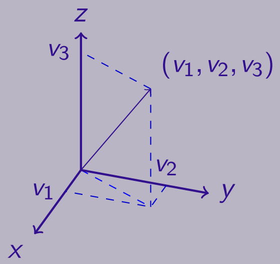
Norma

Norma é um termo matemático comum para "comprimento". Assim, a **norma do vetor** nada mais é do que seu comprimento, módulo ou magnitude.

Notação: $||\vec{v}||$ é a norma de $\vec{v}$.

Importante:

Norma de vetor é um **escalar**!!!



Para $\mathbb{R}^3$

Assim temos que

$$||\vec{v}||^2 = \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + v_3^2 \Longrightarrow ||\vec{v}||^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$\Longrightarrow ||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Norma de um vetor

Seguindo esse padrão, generalizamos para $\mathbb{R}^n$.

Definição

Se $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$, então a **norma** do vetor, denotada por $||\vec{v}||$ é definida pela fórmula:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Ex.:

Calcular as normas de

a) $\vec{v} = (-3, 2, 1)$

b) $\vec{v} = (2, -1, 3, -5)$

Norma de um vetor

Teorema

Se $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ e k um escalar qualquer, temos

- $||\vec{v}|| \geq 0$;
- $||\vec{v}|| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$;
- $\left|\left|\overrightarrow{kv}\right|\right| = |k|\,||\vec{v}||$

Norma de um vetor

Vetores Unitários

Quando queremos indicar apenas direção e sentido, sem necessidade do comprimento, usamos vetores de comprimento 1. A estes chamamos **Vetores Unitários**.

Norma de um vetor

Vetores Unitários

Quando queremos indicar apenas direção e sentido, sem necessidade do comprimento, usamos vetores de comprimento 1. A estes chamamos **Vetores Unitários**.

Para obter um vetor unitário $\vec{u}$ com direção e sentido de um vetor $\vec{v}$ não nulo qualquer, fazemos

$$\vec{u} = \frac{1}{||\vec{v}||} \cdot \vec{v}$$

Esse processo é chamado **normalização** de $\vec{v}$.

Norma de um vetor

Vetores Unitários

Quando queremos indicar apenas direção e sentido, sem necessidade do comprimento, usamos vetores de comprimento 1. A estes chamamos **Vetores Unitários**.

Para obter um vetor unitário $\vec{u}$ com direção e sentido de um vetor $\vec{v}$ não nulo qualquer, fazemos

$$\vec{u} = \frac{1}{||\vec{v}||} \cdot \vec{v}$$

Esse processo é chamado **normalização** de $\vec{v}$.

Ex.:

Normalizar $\vec{v} = (2, 2, -1)$

Norma de um vetor

Vetores Unitários

Considerando o sistema de coordenadas retangulares de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, dizemos que os vetores unitários que tem a direção positiva dos eixos são **vetores unitários canônicos**.

Considerando o sistema de coordenadas retangulares de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, dizemos que os vetores unitários que tem a direção positiva dos eixos são **vetores unitários canônicos**.

Em $\mathbb{R}^2$ esses vetores são denotados por

$$\mathbf{i} = (1,0) \text{ e } \mathbf{j} = (0,1)$$

Considerando o sistema de coordenadas retangulares de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, dizemos que os vetores unitários que tem a direção positiva dos eixos são **vetores unitários canônicos**.

Em $\mathbb{R}^3$ esses vetores são denotados por

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0) \text{ e } \mathbf{k} = (0,0,1)$$

Norma de um vetor

Vetores Unitários

Considerando o sistema de coordenadas retangulares de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, dizemos que os vetores unitários que tem a direção positiva dos eixos são **vetores unitários canônicos**.

Generalizando para $\mathbb{R}^n$, temos os vetores

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema

Cada vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$.

$$\vec{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + \ldots + v_n\mathbf{e_n}$$

Exemplo 1:

$$(-2, 3) = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Teorema

Cada vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$.

$$\vec{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + \ldots + v_n\mathbf{e_n}$$

Exemplo 2:

$$(2, 1, -5) = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Teorema

Cada vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$.

$$\vec{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + \ldots + v_n\mathbf{e_n}$$

Exemplo 3:

$$(7, 3, -4, 5) = 7\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} - 4\mathbf{e_3} + 5\mathbf{e_4}$$

Norma de um vetor

Distância em $\mathbb{R}^n$

Sendo P_1 e P_2 dois pontos em $\mathbb{R}^n$, a distância entre eles é a norma do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Tomando $\mathbb{R}^3$ como exemplo, já vimos que $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Assim

$$d(P_1, P_2) = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

que é a fórmula da distância entre dois pontos de Geometria Analítica.

Com isso, temos

Definição

Se $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ são dois pontos de $\mathbb{R}^n$ então denotamos a **distância** entre u e v por $d(u, v)$ e definimos que

$$d(u,v) = ||\overrightarrow{u-v}|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

Com isso, temos

Definição

Se $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são dois pontos de $\mathbb{R}^n$ então denotamos a **distância** entre u e v por $d(u, v)$ e definimos que

$$d(u,v) = ||\overrightarrow{u - v}|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

Ex.:

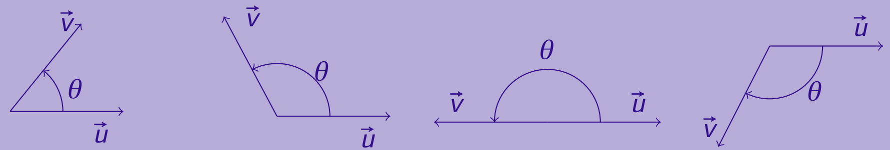
Calcular a distância entre $u = (1, 4, -2, 6, 3)$ e $v = (0, 1, 3, -2, 2)$

Produto escalar

Produto escalar

Definição de ângulo entre vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ com origens coincidentes. Definimos **ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$** o ângulo θ formado por estes vetores com $0 \leq \theta \leq \pi$.



Produto escalar

Definição

Dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e θ o ângulo formado por eles, denotamos o **produto escalar** (ou **produto interno euclidiano**) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definimos por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos\theta$$

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Produto escalar

Definição

Dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e θ o ângulo formado por eles, denotamos o **produto escalar** (ou **produto interno euclidiano**) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definimos por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos\theta$$

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Perceba que podemos rescrever essa fórmula como $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}$ para $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não nulos.

Produto escalar

Definição

Dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e θ o ângulo formado por eles, denotamos o **produto escalar** (ou **produto interno euclidiano**) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definimos por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos\theta$$

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Perceba que podemos rescrever essa fórmula como $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}$ para $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não nulos.

O denominador é sempre positivo. Logo, o sinal do produto interno nos diz o tipo de ângulo temos:

θ agudo se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$. θ obtuso se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$. θ reto (ou $\theta = {}^{\pi}/_{2}$) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Produto escalar

Ex.:

Encontrar o produto escalar entre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, sabendo que o ângulo formado entre eles é $\theta = 45°$.

Produto escalar

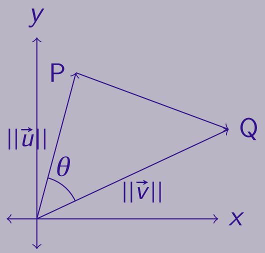
Ex.:

Encontrar o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Produto escalar

Cálculo via componentes

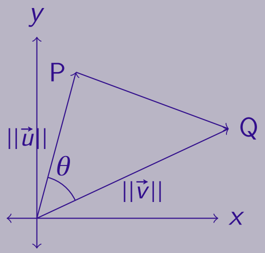
Faremos a dedução para $\mathbb{R}^2$, tomando $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$.



Temos que $\vec{u} + \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ e, portanto, $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} - \vec{u}$.
Pela Lei dos cossenos,

$$||\vec{v} - \vec{u}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\theta$$

Faremos a dedução para $\mathbb{R}^2$, tomando $\vec{u}=(u_1,u_2)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2)$.



Temos que $\vec{u}+\overrightarrow{PQ}=\vec{v}$ e, portanto, $\overrightarrow{PQ}=\vec{v}-\vec{u}$.

Pela Lei dos cossenos,

$$||\vec{v}-\vec{u}||^2=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2\,||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\theta$$

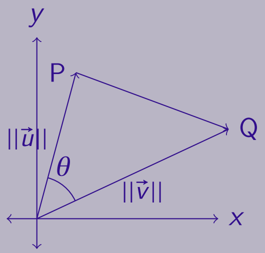
que pode ser reescrita como

$$\underbrace{||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\theta}_{\vec{u}\cdot\vec{v}}=\frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-||\vec{v}-\vec{u}||^2\right)$$

Produto escalar

Cálculo via componentes

Faremos a dedução para $\mathbb{R}^2$, tomando $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$.



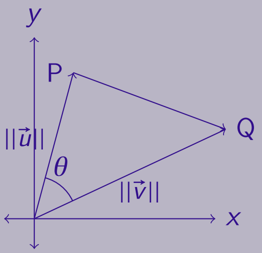
Calculando, temos $||\vec{u}||^2 = u_1^2 + u_2^2$, $||\vec{v}||^2 = v_1^2 + v_2^2$ e
$||\vec{v} - \vec{u}||^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 = v_1^2 - 2u_1v_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 + u_2^2$.
Substituindo fica

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (v_1^2 - 2u_1v_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 + u_2^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cancel{u_1^2} + \cancel{u_2^2} + \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} - (\cancel{v_1^2} - 2u_1v_1 + \cancel{u_1^2} + \cancel{v_2^2} - 2u_2v_2 + \cancel{u_2^2})\right) \\
&= \frac{1}{2}(-(-2u_1v_1 - 2u_2v_2)) = u_1v_1 + u_2v_2
\end{aligned}$$

Produto escalar

Cálculo via componentes

Faremos a dedução para $\mathbb{R}^2$, tomando $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$.



Calculando, temos $||\vec{u}||^2 = u_1^2 + u_2^2$, $||\vec{v}||^2 = v_1^2 + v_2^2$ e $||\vec{v} - \vec{u}||^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 = v_1^2 - 2u_1v_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 + u_2^2$.
Substituindo fica

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (v_1^2 - 2u_1v_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 + u_2^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cancel{u_1^2} + \cancel{u_2^2} + \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} - (\cancel{v_1^2} - 2u_1v_1 + \cancel{u_1^2} + \cancel{v_2^2} - 2u_2v_2 + \cancel{u_2^2})\right) \\
&= \frac{1}{2}(-(-2u_1v_1 - 2u_2v_2)) = u_1v_1 + u_2v_2
\end{aligned}$$

De modo análogo para $\mathbb{R}^3$ temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Generalizando para $\mathbb{R}^n$

Definição

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, então **produto escalar** (ou **produto interno euclidiano**) pelas componentes é definido pela fórmula:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Ex.:

Encontrar o produto escalar entre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ pelas componentes.

Produto escalar

Cálculo via componentes

Generalizando para $\mathbb{R}^n$

Definição

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, então **produto escalar** (ou **produto interno euclidiano**) pelas componentes é definido pela fórmula:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Ex.:

Encontrar o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas pelas componentes.

No caso de $\vec{u} = \vec{v}$ temos que

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1 v_1 + v_2 v_2 + \cdots + v_n v_n = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = ||\vec{v}||^2$$

Assim,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Produto escalar

Propriedades

Teorema

Se **u**, **v** e **w** são vetores de $\mathbb{R}^n$ e a um escalar, então:

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $a(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (a\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(a\vec{v})$
- $\vec{v}\cdot\vec{v} \geq 0$ e $\vec{v}\cdot\vec{v} = 0$ se, e só se, $\vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{0}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{0} = \vec{0}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, então

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$$

Em termos de componentes

$$|u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)}\sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)}$$

Produto escalar

Desigualdades

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, então

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$$

Em termos de componentes

$$|u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)}\sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)}$$

Desigualdade Triangular

Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, então:

a) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (Desigualdade triangular para vetores)

b) $d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{v}, \vec{w})$ (Desigualdade triangular para distâncias)

Produto escalar

Equações da Geometria Analítica em vetores

Identidade do Paralelogramo com vetores

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem vetores em $\mathbb{R}^n$, então

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 + ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 2\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2\right)$$

Teorema

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem vetores em $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar, então

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}||\vec{u}+\vec{v}||^2 - \frac{1}{4}||\vec{u}-\vec{v}||^2$$

Produto escalar

Produto escalar como multiplicação matricial

Representando os vetores como matrizes coluna, podemos dizer que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$.

Exemplo :

Sendo $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ temos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 4 + 5 \cdot 0 = -7$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 5 = -7$$

Produto escalar

Produto escalar como multiplicação matricial

Teorema

Se A for matriz quadrada $n \times n$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ matrizes $n \times 1$, temos que

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Bons Estudos!!!