Retas

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

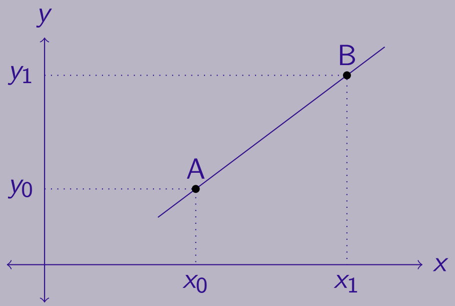
Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Retas em $\mathbb{R}^2$

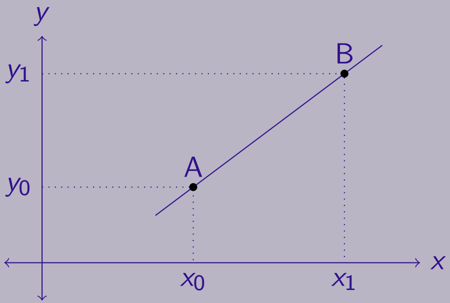
Retas em $\mathbb{R}^2$

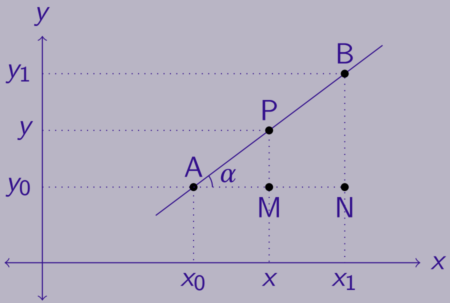
É fácil vermos que dois pontos distintos definem uma única reta no plano.



Retas em $\mathbb{R}^2$

É fácil vermos que dois pontos distintos definem uma única reta no plano.



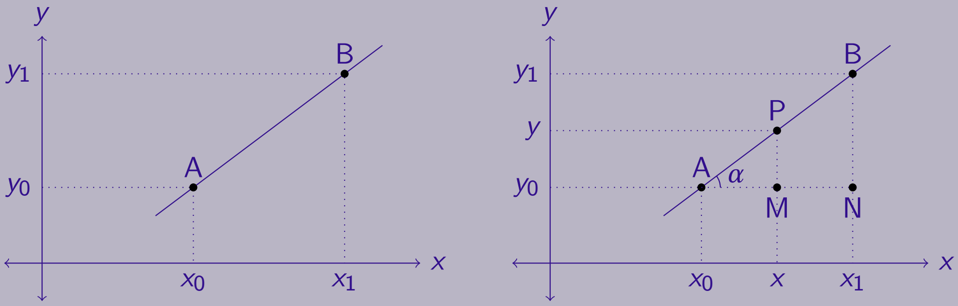


Um ponto $P = (x, y)$ pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$ se os triângulos $\triangle APM$ e $\triangle ABN$ forem semelhantes, ou seja:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{AN}} \therefore \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Retas em $\mathbb{R}^2$

É fácil vermos que dois pontos distintos definem uma única reta no plano.



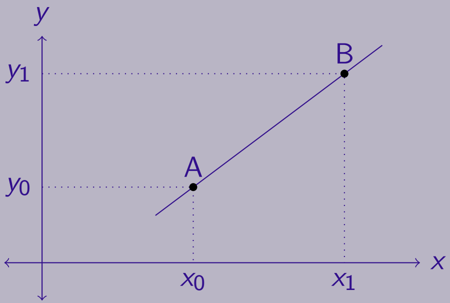
Temos que $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ é constante, pois é razão das coordenadas de A e B e tangente do ângulo α. Chamando essa razão de a temos

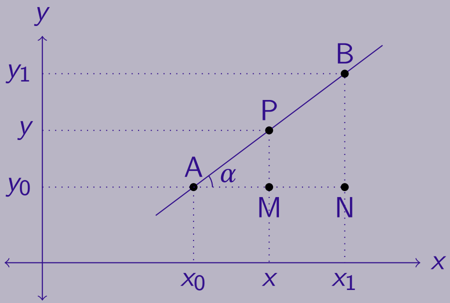
$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a \Longrightarrow y-y_0=a(x-x_0)$$

chamada de **equação da reta na forma ponto-coeficiente angular**.

Retas em $\mathbb{R}^2$

É fácil vermos que dois pontos distintos definem uma única reta no plano.





Isolando y e fazendo a distributiva, ficamos com $y = ax - ax_0 + y_0$, com $ax_0 + y_0$ também sendo uma constante conhecida. Chamando essa constante de b temos

$$y = ax + b$$

chamada de **equação da reta na forma reduzida**.

Retas em $\mathbb{R}^2$

Equação da Reta

Dados dois pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ fica determinada uma única reta

$$y = ax + b$$

sendo $a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ o **coeficente angular** e $b = ax_0 + y_0$ o **coeficiente linear**

Retas em $\mathbb{R}^2$

Equação da Reta

Dados dois pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ fica determinada uma única reta

$$y = ax + b$$

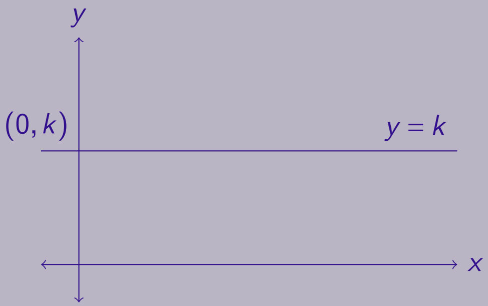
sendo $a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ o **coeficente angular** e $b = ax_0 + y_0$ o **coeficiente linear**

Ex.:

Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(1,3)$ e $(2,5)$

Retas em $\mathbb{R}^2$

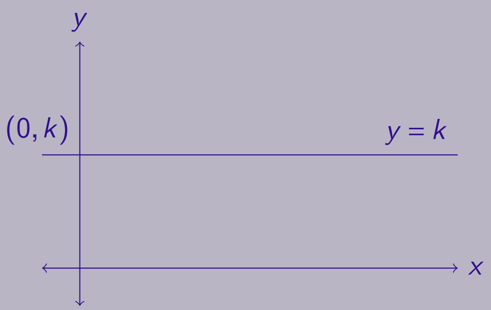
Retas horizontais e retas verticais

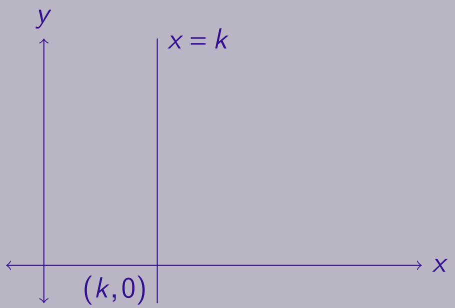


Se uma reta for *horizontal*, sua inclinação é nula e o coeficiente $a = 0$, ficando apenas $y = b$. Note-se que para qualquer equação $y = ax + b$, o ponto $(0, b)$ está na reta. b é a altura que a reta corta o eixo y!

Retas em $\mathbb{R}^2$

Retas horizontais e retas verticais





Se uma reta for *vertical*, sua inclinação é de 90° e o coeficiente angular **não existe** pois não existe $\tan 90°$. A reta se resume a $x = k$ para alguma constante k.

No plano cartesiano, toda equação

$$Ax + By + C = 0$$

em que A, B e C são constantes reais com A e B não simultaneamente nulas, representa uma reta pois

- Se $B \neq 0$ podemos isolar y, obtendo

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Se $A = 0$, a equação se reduz à

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Retas em $\mathbb{R}^2$

Equação geral da reta

No plano cartesiano, toda equação

$$Ax + By + C = 0$$

em que A, B e C são constantes reais com A e B não simultaneamente nulas, representa uma reta pois

- Se $B \neq 0$ podemos isolar y, obtendo

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

  Se $A = 0$, a equação se reduz à

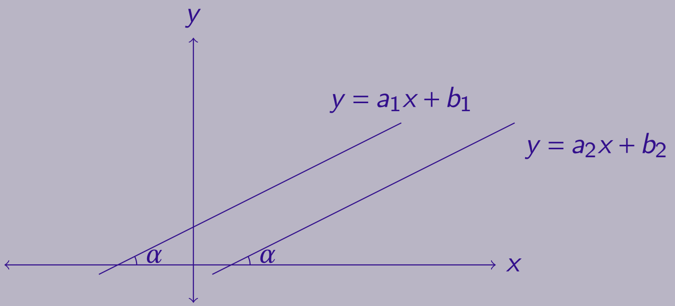
$$y = -\frac{C}{B}.$$

- Se $B = 0$, isolamos x obtendo

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Retas Paralelas

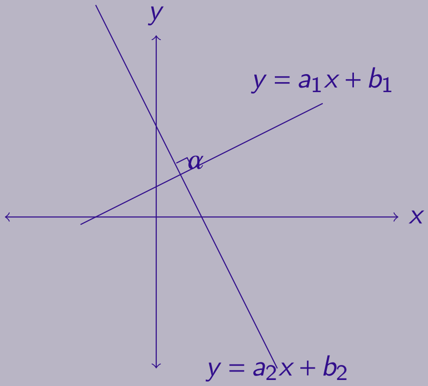
Duas retas serão **paralelas** se tiverem o mesmo coeficiente angular.



$$a_1 = a_2 = \tan\alpha$$

Retas Perpendiculares

Duas retas serão **perpendiculares** se o produto de seus coeficientes angulares for -1.



$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

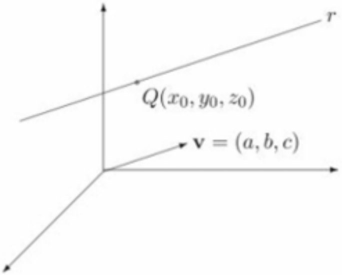
Ex.:

Determine a equação da reta perpendicular à $x + 3y = 4$ e que passa pelo ponto $(1, 3)$.

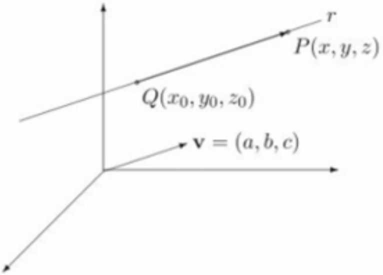
Retas no $\mathbb{R}^3$

Retas no $\mathbb{R}^3$

Para retas no $\mathbb{R}^3$, consideramos uma reta que passe pelo ponto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ e tenha direção do vetor $\mathbf{v} = (a, b, c)$.



(a) Reta pelo ponto Q na direção do vetor $\mathbf{v}$



(b) Ponto P qualquer da reta

Retas no $\mathbb{R}^3$

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta se os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\mathbf{v}$ forem múltiplos. Assim

$$\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{v}$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Essa é chamada **Equação Vetorial da reta**. Também dizemos que $\mathbf{v}$ é o vetor diretor da reta.

Retas no $\mathbb{R}^3$

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta se os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\mathbf{v}$ forem múltiplos. Assim

$$\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{v}$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Essa é chamada **Equação Vetorial da reta**. Também dizemos que $\mathbf{v}$ é o vetor diretor da reta.

Reescrevendo em termos das coordenadas de P e $\mathbf{v}$ temos $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c)$ de onde obtemos

$$r : \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \quad \therefore r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

denominadas **equações paramétricas da reta**

Retas no $\mathbb{R}^3$

Ex.:

Obter as equações paramétricas da reta r que passa por $Q = (1, -3, 2)$ e tem direção dada por $\mathbf{v} = (-4, 3, 2)$.

Retas no $\mathbb{R}^3$

Se nenhum dos coeficientes de $\mathbf{v}$ for nulo, podemos isolar o parâmetro t nas equações paramétricas, obtendo $t = \dfrac{x - x_0}{a}$, $t = \dfrac{y - y_0}{b}$, $t = \dfrac{z - z_0}{c}$. Como é o mesmo parâmetro, temos

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que são chamadas **equações simétricas da reta**

Retas no $\mathbb{R}^3$

Se nenhum dos coeficientes de $\mathbf{v}$ for nulo, podemos isolar o parâmetro t nas equações paramétricas, obtendo $t = \dfrac{x - x_0}{a}$, $t = \dfrac{y - y_0}{b}$, $t = \dfrac{z - z_0}{c}$. Como é o mesmo parâmetro, temos

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que são chamadas **equações simétricas da reta**

Isolando o parâmetro em uma das equações simétricas e substituindo nas demais, obtemos as equações reduzidas.

Retas no $\mathbb{R}^3$

Ex.:

Determinar as equações vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas da reta que passa por $Q = (1, -3, 2)$ e tem vetor diretor $\mathbf{v} = (2, 3, 2)$

Retas no $\mathbb{R}^3$

Ex.:

Determinar as equações vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas da reta que passa por $A = (1, 2, 2)$ e $B = (4, 3, 3)$

Interseção de retas

Interseção de retas

Para obtermos o ponto de interseção de duas retas distintas, resolvemos o sistema linear obtido igualando as componentes das respectivas equações paramétricas.

Interseção de retas

Ex.:

Determine, se existir, a interseção das retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = 4 + 6s \\ z = 4s \end{cases}$$

Interseção de retas

Ex.:

Determine, se existir, a interseção das retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 5 + s \\ y = 5 - s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$$

Posição relativa

Posição relativa

Dizemos que duas retas do $\mathbb{R}^3$ são *coplanares* quando ambas estao contidas em um mesmo plano. Retas coplanares podem ser coincidentes, paralelas ou concorrentes. Por outro lado, dizemos que duas retas são *reversas* quando não existe um plano que as contém.

Posição relativa

Dizemos que duas retas do $\mathbb{R}^3$ são *coplanares* quando ambas estao contidas em um mesmo plano. Retas coplanares podem ser coincidentes, paralelas ou concorrentes. Por outro lado, dizemos que duas retas são *reversas* quando não existe um plano que as contém.
Para determinarmos a posição relativa de duas retas do $\mathbb{R}^3$, devemos comparar suas direções (através dos respectivos vetores diretores) e verificar a existência de interseção. Para isto consideremos as retas r_1 e r_2 com respectivos vetores diretores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

- Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ são múltiplos escalares, as retas estão na mesma direção. Nesse caso, são *paralelas*, se não tiverem interseção, ou *coincidentes* se tiverem.

Posição relativa

Dizemos que duas retas do $\mathbb{R}^3$ são *coplanares* quando ambas estao contidas em um mesmo plano. Retas coplanares podem ser coincidentes, paralelas ou concorrentes. Por outro lado, dizemos que duas retas são *reversas* quando não existe um plano que as contém.

Para determinarmos a posição relativa de duas retas do $\mathbb{R}^3$, devemos comparar suas direções (através dos respectivos vetores diretores) e verificar a existência de interseção. Para isto consideremos as retas r_1 e r_2 com respectivos vetores diretores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

- Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ são múltiplos escalares, as retas estão na mesma direção. Nesse caso, são *paralelas*, se não tiverem interseção, ou *coincidentes* se tiverem.
- Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ **não** são múltiplos escalares, as retas não estão na mesma direção. Nesse caso, são *reversas*, se não tiverem interseção, ou *concorrentes* se tiverem.

Posição relativa

Resumo de Posição Relativa

		Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$	
		forem múltiplos	**não** forem múltiplos
As retas	tem interseção	Coincidentes	Concorrentes
	não tem interseção	Paralelas	Reversas

Posição relativa

Ex.:

Discuta a posição relativa das retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 + 6s \\ y = -2 + 3s \\ z = 3s \end{cases}$$

Posição relativa

Ex.:

Discuta a posição relativa das retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 - 5s \\ y = 2 + 2s \\ z = 4 - 3s \end{cases}$$

Posição relativa

Ex.:

Discuta a posição relativa das retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = -s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Bons Estudos!!!