Ortogonalidade e Produto Vetorial

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definição

Definição

Vetores Ortogonais

Dizemos que dois vetores não nulos **u** e **v** em $\mathbb{R}^n$ são **ortogonais** (ou **perpendiculares**) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Também convencionamos que o vetor nulo em $\mathbb{R}^n$ é ortogonal a *cada* vetor em $\mathbb{R}^n$.

Um conjunto não vazio de vetores em $\mathbb{R}^n$ é denominado **ortogonal** se qualquer par de vetores do conjunto for **ortogonal**. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito **ortonormal**.

Definição

Vetores Ortogonais

Dizemos que dois vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$ são **ortogonais** (ou **perpendiculares**) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Também convencionamos que o vetor nulo em $\mathbb{R}^n$ é ortogonal a *cada* vetor em $\mathbb{R}^n$.

Um conjunto não vazio de vetores em $\mathbb{R}^n$ é denominado **ortogonal** se qualquer par de vetores do conjunto for **ortogonal**. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito **ortonormal**.

Ex.:

a) Mostre que $\vec{u} = (-2, 3, 1, 4)$ e $\vec{v} = (1, 2, 0, -1)$ são vetores ortogonais de $\mathbb{R}^4$.

b) Mostre que o conjunto $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dos vetores canônicos é ortonormal em $\mathbb{R}^3$.

Produto Vetorial

Produto Vetorial

Definição

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ forem vetores *do espaço tridimensional*, então o **produto vetorial** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

ou, em notação de determinante

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Produto Vetorial

Ex.:

Encontre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ sendo $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Produto Vetorial

Teorema: Relações entre os produtos escalar e vetorial

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores do espaço tridimensional, então

a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$ - $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal à $\mathbf{u}$

b) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$ - $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal à $\mathbf{v}$

c) $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ - Identidade de Lagrange

d) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$ - Relação entre os produtos

e) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$ - Relação entre os produtos

Produto Vetorial

Ex.:

Verifique os dois primeiros itens do teorema sendo $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Produto Vetorial

Teorema: Propriedades aritméticas do produto vetorial

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores do espaço tridimensional e a um escalar, então

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) =$

b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

d) $a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (a\mathbf{v})$

e) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Ex.:

Dados os vetores $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ e $\mathbf{k} = (0,0,1)$, avaliar os seguintes produtos:

$\mathbf{i} \times \mathbf{i}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{j}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{k}$
$\mathbf{i} \times \mathbf{j}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{k}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{i}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{j}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{k}$

Produto Vetorial

Vetores Unitários Canônicos

Ex.:

Dados os vetores $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ e $\mathbf{k} = (0,0,1)$, avaliar os seguintes produtos:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Produto Vetorial

Vetores Unitários Canônicos

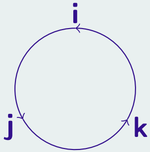
Ex.:

Dados os vetores $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ e $\mathbf{k} = (0,0,1)$, avaliar os seguintes produtos:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$



Produto Vetorial

Vetores Unitários Canônicos

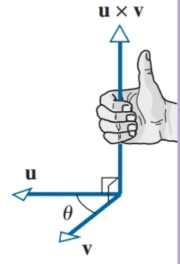
Importante:

Não é verdade, em geral que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

Produto Vetorial

Regra da Mão Direita

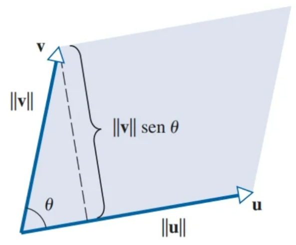
Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não nulos, o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pode ser determinado pela "Regra da Mão Direita".



"*Esticando os dedos da mão direita no sentido de* $\mathbf{u}$, *com a palma da mão de modo que, fechando os dedos seja feito o movimento de* $\mathbf{u}$ *para* $\mathbf{v}$: *O polegar aponta para o sentido de* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$"

Da identidade de Lagrange, temos

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 \, ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

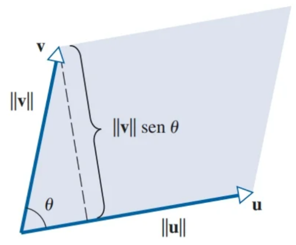


Produto Vetorial

Interpretação geométrica

Da identidade de Lagrange, temos

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\, ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$



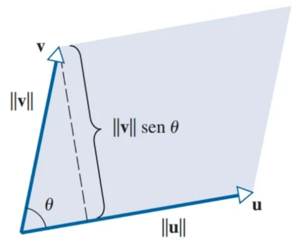
Sendo θ o ângulo dos vetores, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\, ||\mathbf{v}|| \cos\theta$.

Produto Vetorial

Interpretação geométrica

Da identidade de Lagrange, temos

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$



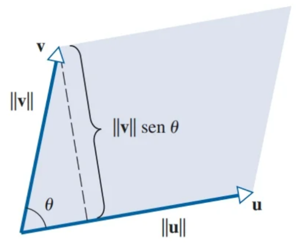
Sendo θ o ângulo dos vetores, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos\theta$. Substituindo temos $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos\theta)^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2\cos^2\theta$ $= ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2\,(1 - \cos^2\theta) = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2\ \text{sen}\,^2\theta$.

Produto Vetorial

Interpretação geométrica

Da identidade de Lagrange, temos

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$



Sendo θ o ângulo dos vetores, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos\theta$. Substituindo temos $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos\theta)^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2\cos^2\theta$ $= ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2(1 - \cos^2\theta) = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 \text{ sen}^2\theta$.

Como $0 \leq \theta \leq \pi$, temos que $\text{sen}\,\theta \geq 0$ e podemos reescrever

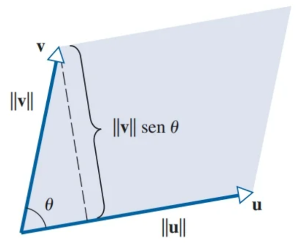
$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \text{ sen}\,\theta$$

Produto Vetorial

Interpretação geométrica

Da identidade de Lagrange, temos

$$||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$$



Sendo θ o ângulo dos vetores, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos\theta$. Substituindo temos $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos\theta)^2 = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2\cos^2\theta$ $= ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2(1-\cos^2\theta) = ||\mathbf{u}||^2\,||\mathbf{v}||^2\ \text{sen}^2\theta$.
Como $0 \le \theta \le \pi$, temos que $\text{sen}\,\theta \ge 0$ e podemos reescrever

$$||\mathbf{u}\times\mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\ \text{sen}\,\theta$$

Como $||\mathbf{v}||\ \text{sen}\,\theta$ é a altura do paralelogramo de lados **u** e **v**, relativa a **u**, temos que $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||$ é a Área desse paralelogramo.

Produto Vetorial

Interpretação geométrica

Teorema

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores do espaço tridimensional, então $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$ é igual á área do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Teorema

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores do espaço tridimensional, então $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$ é igual á área do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Ex.:

Encontre a área do triângulo determinado pelos pontos $P_1(2,2,0)$, $P_2(-1,0,2)$ e $P_3(0,4,3)$.

Produto Misto

Produto Misto

Definição

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores do espaço tridimensional, dizemos que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é o **produto misto** deste vetores.

Produto Misto

Definição

Se **u**, **v** e **w** forem vetores do espaço tridimensional, dizemos que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é o **produto misto** deste vetores.

Para calcular:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Produto Misto

Ex.:

Calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dos vetores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k},\ \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k},\ \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Produto Misto

Interpretação Geométrica

Se V é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, temos que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

onde $+$ ou $-$ dependem do ângulo formado entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

Produto Misto

Interpretação Geométrica

Se V é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, temos que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

onde $+$ ou $-$ dependem do ângulo formado entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

Teorema

Se os vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tiverem o mesmo ponto inicial, então esses vetores são coplanares se, e só se,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Bons Estudos!!!