Planos

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definição

Definição

Vetor Normal

Uma reta em $\mathbb{R}^2$ é determinada de maneira única por sua inclinação (o vetor diretor) e um de seus pontos.

Do mesmo modo, um plano em $\mathbb{R}^3$ é determinado de maneira única por sua "inclinação" e um de seus pontos.

Uma maneira de especificar essas "inclinações" é utilizar um vetor não nulo **n** denominado **normal** que seja ortogonal à reta ou ao plano.

Definição

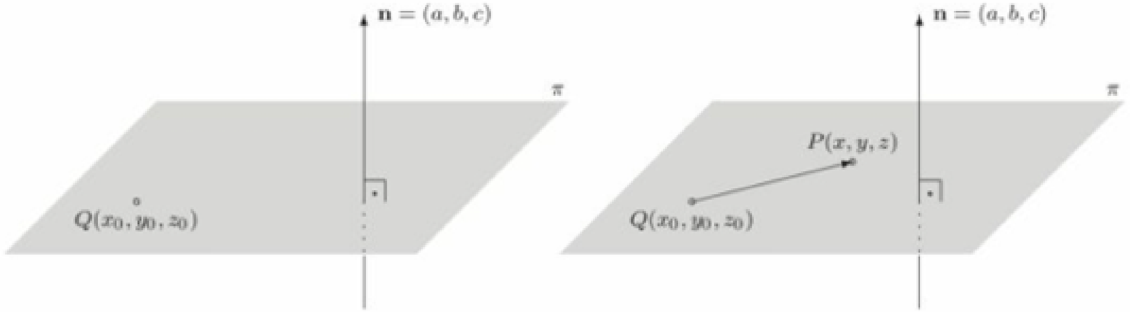
Vetor Normal

Uma reta em $\mathbb{R}^2$ é determinada de maneira única por sua inclinação (o vetor diretor) e um de seus pontos.
Do mesmo modo, um plano em $\mathbb{R}^3$ é determinado de maneira única por sua "inclinação" e um de seus pontos.
Uma maneira de especificar essas "inclinações" é utilizar um vetor não nulo $\mathbf{n}$ denominado **normal** que seja ortogonal à reta ou ao plano.
Em outras palavras, sendo $Q(x_0, y_0, z_0)$ um ponto e $\mathbf{n} = (a, b, c)$ um vetor que será ortogonal a um plano π. Um ponto $P(x, y, z)$ qualquer pertencerá ao plano π se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{QP}$ e $\mathbf{n}$ forem ortogonais. Ou ainda,

$$\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Esta é a **equação vetorial do plano.**

Definição



(a) Ponto Q e vetor normal $\mathbf{n}$ (b) Ponto P qualquer do plano

Definição

Equação Geral

Reescrevendo a equação $\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n} = 0$ em termos de componentes temos $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$ ou ainda

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que é denominada **equação geral do plano** que passa por $Q(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Também pode ser chamada de **equação ponto-normal** do plano

Definição

Equação Geral

Fazendo a distributiva da equação geral, obtemos $ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$. Chamando $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, constante que depende de $\mathbf{n}$ e Q, podemos reescrever a equação geral como

$$ax + by + cz + d = 0$$

que é chamada **equação reduzida do plano**.

Definição

Equação Geral

Fazendo a distributiva da equação geral, obtemos $ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$. Chamando $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, constante que depende de $\mathbf{n}$ e Q, podemos reescrever a equação geral como

$$ax + by + cz + d = 0$$

que é chamada **equação reduzida do plano**.

Todo ponto do plano atende à equação do plano!

Fazendo a distributiva da equação geral, obtemos $ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$. Chamando $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, constante que depende de $\mathbf{n}$ e Q, podemos reescrever a equação geral como

$$ax + by + cz + d = 0$$

que é chamada **equação reduzida do plano**.

Todo ponto do plano atende à equação do plano!

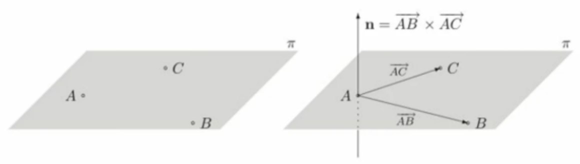
Ex.:

Determine a equação reduzida do plano que passa pelo ponto $Q(1, 3, -2)$ e tem vetor normal $\mathbf{n} = (2, -3, 2)$.

Definição

Plano determinado por três pontos

Três pontos *não colineares* determinam um único plano. Dados os pontos A, B e C, podemos escolher um deles como ponto Q e fazer $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \mathbf{n}$ o vetor normal do plano.

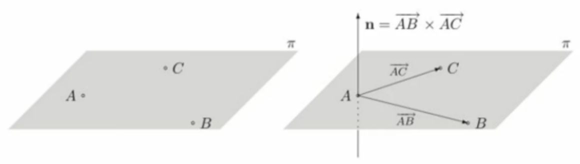


(a) Plano determinado pelos pontos A, B e C (b) Vetor normal ao plano

Definição

Plano determinado por três pontos

Três pontos *não colineares* determinam um único plano. Dados os pontos A, B e C, podemos escolher um deles como ponto Q e fazer $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \mathbf{n}$ o vetor normal do plano.



(a) Plano determinado pelos pontos A, B e C

(b) Vetor normal ao plano

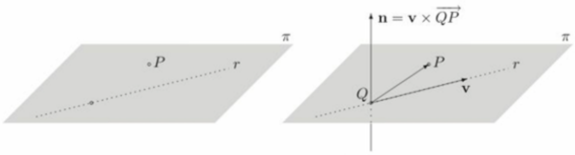
Ex.:

Determine a equação do plano que contém os pontos $A = (1,3,2)$, $B = (-1,0,1)$ e $C = (3,-2,2)$

Definição

Plano determinado por uma reta e um ponto

Uma reta r com vetor diretor $\mathbf{v}$ e um ponto P fora dela também determinam um único plano. O vetor normal do plano pode ser obtido por $\mathbf{v} \times \overrightarrow{PQ}$ para algum ponto Q da reta.

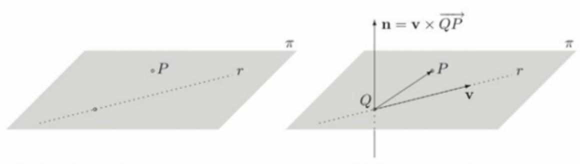


(a) Plano determinado por reta e ponto (b) Vetor normal ao plano

Definição

Plano determinado por uma reta e um ponto

Uma reta r com vetor diretor $\mathbf{v}$ e um ponto P fora dela também determinam um único plano. O vetor normal do plano pode ser obtido por $\mathbf{v} \times \overrightarrow{PQ}$ para algum ponto Q da reta.



(a) Plano determinado por reta e ponto (b) Vetor normal ao plano

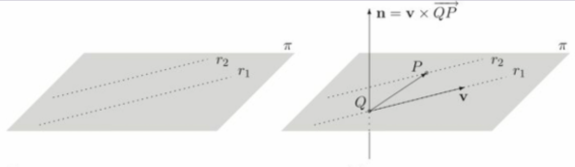
Ex.:

Determine a equação do plano que contém o ponto $P = (2, -1, 3)$ e a reta $r : \begin{cases} x &= -1 + t \\ y &= 2 - 2t \\ z &= -t \end{cases}$

Definição

Plano determinado por duas retas paralelas

Duas retas paralelas r_1 e r_2 também definem um único plano. Como ambas tem vetor diretor múltiplo, $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \mathbf{v_1} \times \alpha\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$. Para obter o vetor normal, podemos tomar Q em r_1 e P em r_2 e fazer $\mathbf{n} = \mathbf{v_1} \times \overrightarrow{QP}$.

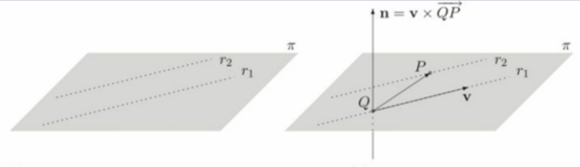


(a) Plano determinado por retas paralelas   (b) Vetor normal ao plano

Definição

Plano determinado por duas retas paralelas

Duas retas paralelas r_1 e r_2 também definem um único plano. Como ambas tem vetor diretor múltiplo, $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \mathbf{v_1} \times \alpha\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$. Para obter o vetor normal, podemos tomar Q em r_1 e P em r_2 e fazer $\mathbf{n} = \mathbf{v_1} \times \overrightarrow{QP}$.



(a) Plano determinado por retas paralelas
(b) Vetor normal ao plano

Ex.:

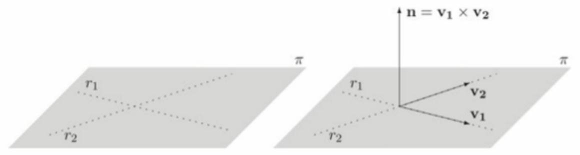
Encontrar a equação do plano determinado pelas retas

$$r_1 : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= -3 - 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x &= 1 + 2s \\ y &= 3 + 4s \\ z &= -2 - 6s \end{cases}$$

Definição

Plano determinado por duas retas concorrentes

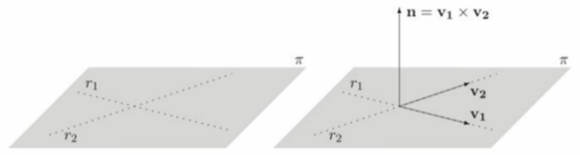
Duas retas r_1 e r_2 concorrentes determinam um único plano. O vetor normal $\mathbf{n}$ é $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$



Definição

Plano determinado por duas retas concorrentes

Duas retas r_1 e r_2 concorrentes determinam um único plano. O vetor normal $\mathbf{n}$ é $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$



Ex.:

Encontrar a equação do plano determinado pelas retas

$$r_1 : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 1 + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x &= 4 + s \\ y &= -1 + 2s \\ z &= 7 - s \end{cases}$$

Equação Paramétrica do plano

Equação Paramétrica do plano

Nas situações em que são conhecidos um ponto X_0 e dois vetores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ que estão no plano, podemos escrever qualquer ponto X do plano usando o vetor $\overrightarrow{X_0X}$ como combinação linear dos vetores. Assim,

$$X - X_0 = t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$$

ou ainda

$$X = X_0 + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}.$$

Ao escrevermos em termos das componentes dos vetores, temos as **equações paramétricas do plano**.

Posição relativa entre dois planos

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

- Coincidentes;

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

- Coincidentes;
- Paralelos ou;

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

- Coincidentes;
- Paralelos ou;
- Concorrentes

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

- Coincidentes;
- Paralelos ou;
- Concorrentes

Para isso, avaliamos seus vetores normais $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$:

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

- Coincidentes;
- Paralelos ou;
- Concorrentes

Para isso, avaliamos seus vetores normais $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$:

- Se $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ não forem múltiplos: Os planos são **concorrentes**.

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

- Coincidentes;
- Paralelos ou;
- Concorrentes

Para isso, avaliamos seus vetores normais $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$:

- Se $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ não forem múltiplos: Os planos são **concorrentes**.
- Se $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ forem múltiplos: Precisamos avaliar se há interseção.

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

- Coincidentes;
- Paralelos ou;
- Concorrentes

Para isso, avaliamos seus vetores normais $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$:

- Se $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ não forem múltiplos: Os planos são **concorrentes**.
- Se $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ forem múltiplos: Precisamos avaliar se há interseção.
    - Havendo interseção: São **coincidentes**.

Posição relativa entre dois planos

Dois planos podem ser:

- Coincidentes;
- Paralelos ou;
- Concorrentes

Para isso, avaliamos seus vetores normais $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$:

- Se $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ não forem múltiplos: Os planos são **concorrentes**.
- Se $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ forem múltiplos: Precisamos avaliar se há interseção.
  - Havendo interseção: São **coincidentes**.
  - Não havendo interseção: São **paralelos**.

Posição relativa entre dois planos

Ex.:

Determine a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : x + 3y + z - 2 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 2x + 6y + 2z - 4 = 0$$

Posição relativa entre dois planos

Ex.:

Determine a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : x - 2y + 3z + 12 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : -3x + 6y - 9z + 5 = 0$$

Posição relativa entre dois planos

Ex.:

Determine a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : -x - y + 2z - 4 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 2x + y - 3z = 0$$

Reta de interseção de planos

Reta de interseção de planos

Dados dois planos concorrentes, a interseção entre eles é uma **reta**. Para obter a interseção, precisamos encontrar valores que atendam simultaneamente *ambas* as equações dos planos!

Reta de interseção de planos

Dados dois planos concorrentes, a interseção entre eles é uma **reta**. Para obter a interseção, precisamos encontrar valores que atendam simultaneamente *ambas* as equações dos planos!

Ex.:

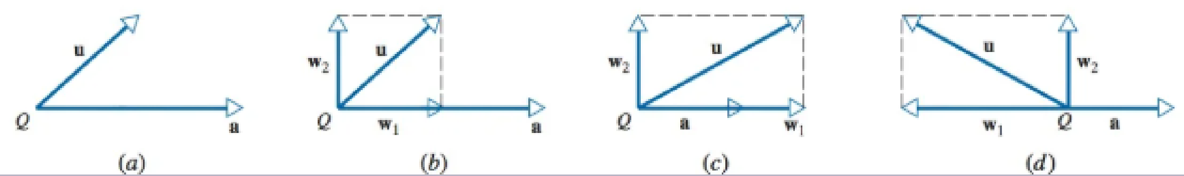
Determine, se existir, a reta de interseção dos planos

$$\pi_1 : -x - y + 2z - 4 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 2x + y - 3z = 0$$

Projeção Ortogonal

Projeção Ortogonal

Em muitas aplicações, precisamos “decompor” um vetor $\mathbf{u}$ na soma de dois componentes: Um múltiplo escalar de um vetor não nulo $\mathbf{a}$ e outro perpendicular à $\mathbf{a}$.



Por exemplo, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$ são vetores em $\mathbb{R}^3$ posicionados com seus pontos iniciais coincidindo num ponto Q, podemos criar uma tal decomposição como segue:

- Baixamos uma perpendicular da ponta de $\mathbf{u}$ para a reta ao longo de $\mathbf{a}$;
- Construímos o vetor $\mathbf{w_1}$ de Q até o pé da perpendicular;
- Construímos $\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1}$.

Assim, temos $\mathbf{u} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, isto é, $\mathbf{u}$ é a soma de dois vetores que são ortogonais entre si.

Projeção Ortogonal

Teorema

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ com $\mathbf{a}$ não nulo, então $\mathbf{u}$ pode ser escrito como $\mathbf{u} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, com $\mathbf{w_1}$ múltiplo de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{w_2}$ ortogonal a $\mathbf{a}$.

Projeção Ortogonal

Teorema

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ com $\mathbf{a}$ não nulo, então $\mathbf{u}$ pode ser escrito como $\mathbf{u} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, com $\mathbf{w_1}$ múltiplo de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{w_2}$ ortogonal a $\mathbf{a}$.

O vetor $\mathbf{w_1}$ é chamado **projeção ortogonal de u sobre a** ou **componente vetorial de u ao longo de a**, denotado por $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$.

O vetor $\mathbf{w_2}$ é chamado **componente vetorial de u ortogonal a a**, com $\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$.

Projeção Ortogonal

Teorema

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ com $\mathbf{a}$ não nulo, então $\mathbf{u}$ pode ser escrito como $\mathbf{u} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, com $\mathbf{w_1}$ múltiplo de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{w_2}$ ortogonal a $\mathbf{a}$.

O vetor $\mathbf{w_1}$ é chamado **projeção ortogonal de u sobre a** ou **componente vetorial de u ao longo de a**, denotado por $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$.

O vetor $\mathbf{w_2}$ é chamado **componente vetorial de u ortogonal a a**, com $\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$.

Ex.:

Decompor $\mathbf{u} = (2,-1,3)$ em relação a $\mathbf{a} = (4,-1,2)$.

Projeção Ortogonal

Norma da projeção

Para calcular a *norma* do componente vetorial de **u** ao longo de **a** temos

$$||\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}|| = \left|\left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}\right|\right| = \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\right| ||\mathbf{a}|| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{||\mathbf{a}||^{\cancel{2}}}\cancel{||\mathbf{a}||} = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{||\mathbf{a}||}$$

Projeção Ortogonal

Norma da projeção

Para calcular a *norma* do componente vetorial de **u** ao longo de **a** temos

$$||\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}|| = \left|\left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}\right|\right| = \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\right|||\mathbf{a}|| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{||\mathbf{a}||^{\cancel{2}}}\cancel{||\mathbf{a}||} = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{||\mathbf{a}||}$$

Sendo θ o ângulo entre **u** e **a**, então $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{a}||\cos\theta$, de modo que

$$||\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}|| = \frac{|\,||\mathbf{u}||\,\cancel{||\mathbf{a}||}\cos\theta|}{\cancel{||\mathbf{a}||}} = ||\mathbf{u}||\,|\cos\theta|$$

Distâncias

Distâncias

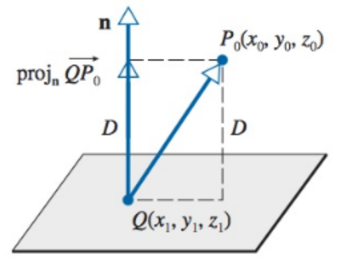
Teorema

(a) Em $\mathbb{R}^2$, a distância D entre o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta $ax + by + c = 0$ é

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(b) Em $\mathbb{R}^3$, a distância D entre o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e a reta $ax + by + cz + d = 0$ é

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Distância de P_0 até o plano.

Distâncias

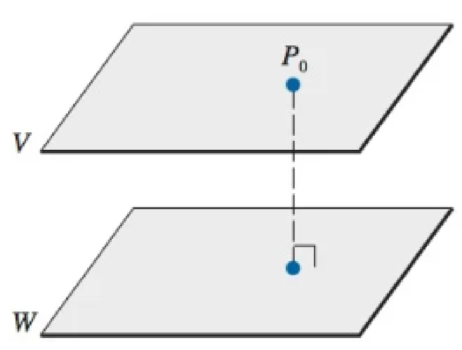
Ex.:

Encontre a distância D entre o ponto $(1,-4,-3)$ e o plano $2x-3y+6z=-1$

Distâncias

Ex.:

Encontre a distância D entre os planos $x + 2y - 2z = 3$ e o plano $2x + 4y - 4z = 7$



Bons Estudos!!!