Espaços Vetoriais Arbitrários

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Axiomas de Espaço Vetorial

Axiomas de Espaço Vetorial

O que são Axiomas?

Noção comum; afirmação geral aceita sem discussão. Na filosofia,

> *premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável, originada, segundo a tradição racionalista, de princípios inatos da consciência ou, segundo os empiristas, de generalizações da observação empírica.*

Axiomas de Espaço Vetorial

Definição

Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações: a adição e a multiplicação por escalares. Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os objetos **u**, **v** e **w** em V e quaisquer escalares *a* e *b*, diremos que V é um espaço vetorial e que os objetos de V são vetores.

1. Se **u** e **v** são objetos em V, então $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é um objeto em V.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
3. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
4. Existe um objeto **0** em V, denominado **vetor nulo** de V, ou vetor zero, tal que $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$, com qualquer **u** em V.
5. Dado qualquer **u** em V, existe algum objeto $-\mathbf{u}$, denominado **negativo** de **u**, tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
6. Se *a* for qualquer escalar e **u** um objeto em V, então $a\mathbf{u}$ é um objeto em V.
7. $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$
8. $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$
9. $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$
10. $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Axiomas de Espaço Vetorial

Passos para mostrar que um conjunto, com duas operações, é um espaço vetorial

Passo 1: Identifique o conjunto V de objetos que serão os vetores.

Passo 2: Identifique as operações de adição e multiplicação por escalar.

Passo 3: Verifique as validades dos axiomas 1 e 6:

1) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são objetos em V, então $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é um objeto em V. (fechamento da adição)

6) Se a for qualquer escalar e $\mathbf{u}$ um objeto em V, então $a\mathbf{u}$ é um objeto em V. (fechamento no produto por escalar)

Passo 4: Verificar os demais axiomas.

Axiomas de Espaço Vetorial

Ex.:

Mostrar que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial.

Axiomas de Espaço Vetorial

Ex.:

Mostrar que o conjunto $M_{2\times 2}$ é um espaço vetorial.

Axiomas de Espaço Vetorial

Ex.:

Mostrar que o conjunto $F(-\infty, \infty)$ é um espaço vetorial.

Axiomas de Espaço Vetorial

Ex.:

Sendo $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ com $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ e $a\mathbf{u} = (au_1, 0)$. É espaço vetorial?

Axiomas de Espaço Vetorial

Ex.:

Sendo $V = \mathbb{R}$, com $\mathbf{u} + \mathbf{v} = uv$ e $a\mathbf{u} = u^a$. É espaço vetorial?

Axiomas de Espaço Vetorial

Teorema

Sendo V um espaço vetorial, $\mathbf{u}$ um vetor em V e a um escalar, então:

a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

b) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

c) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

d) Se $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$ então $a = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Axiomas de Espaço Vetorial

Aqui estabelecemos um elo comum entre objetos matemáticos distintos como vetores geométricos, vetores em $\mathbb{R}^n$, sequências infinitas, matrizes, funções reais entre outros.

Com isso, sempre que se descobre um novo teorema sobre espaços vetoriais arbitrários, esse resultado se aplica a qualquer um destes temas.

Subespaços

Subespaços

Definição

Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado **subespaço** de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Subespaços

Definição

Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado **subespaço** de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

A vantagem dos subespaços é que, sendo subconjunto de um espaço vetorial, muitos dos axiomas são "herdados", não sendo necessários de serem provados!

Subespaços

Não são herdados!

Axioma 1 - Fechamento na adição.

Axioma 4 - Existência de vetor zero em W.

Axioma 5 - Existência de negativo em W para cada vetor em W.

Axioma 6 - Fechamento na multiplicação por escalar.

Subespaços

Não são herdados!

Axioma 1 - Fechamento na adição.

Axioma 4 - Existência de vetor zero em W.

Axioma 5 - Existência de negativo em W para cada vetor em W.

Axioma 6 - Fechamento na multiplicação por escalar.

Teorema

se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas:

a) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores em W, então $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está em W.

b) Se a for um escalar qualquer e $\mathbf{u}$ algum vetor de W, então $a\mathbf{u}$ está em W.

Em outras palavras, W é um subespaço de V se, e só se, for fechado na adição e na multiplicação por escalar.

Subespaços

Ex.:

Verifique que $W = \{\mathbf{0}\}$ é subespaço de V.

Subespaços

Ex.:

Verifique que as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são subespaços.

Subespaços

Ex.:

Verifique que as matrizes simétricas formam um subespaço de $M_{n\times n}$

Subespaços

Ex.:

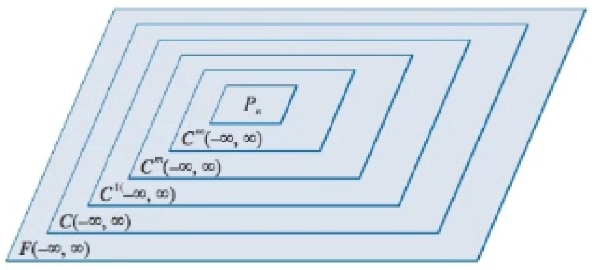
Verifique que o conjunto $C(-\infty,\infty)$ das funções contínuas é subespaço de $F(-\infty,\infty)$.

Subespaços

Ex.:

Verifique que o conjunto P_∞ dos polinômios é subespaço de $F(-\infty, \infty)$.

Subespaços


P_n
$C^\infty(-\infty, \infty)$
$C^m(-\infty, \infty)$
$C^1(-\infty, \infty)$
$C(-\infty, \infty)$
$F(-\infty, \infty)$

Recordando

Dizemos que $\mathbf{w}$ é **combinação linear** dos vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \dots, \mathbf{v_r} \in V$ se puder ser escrito como

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \dots + a_r\mathbf{v_r} = \sum_{i=1}^{r} a_i\mathbf{v_i}$$

sendo os escalares $a_1, a_2 \dots, a_r$ os *coeficientes* da combinação linear.

Recordando

Dizemos que $\mathbf{w}$ é **combinação linear** dos vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \ldots, \mathbf{v_r} \in V$ se puder ser escrito como

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \ldots + a_r\mathbf{v_r} = \sum_{i=1}^{r} a_i\mathbf{v_i}$$

sendo os escalares $a_1, a_2 \ldots, a_r$ os *coeficientes* da combinação linear.

Teorema

Seja $S = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \ldots, \mathbf{w_r}\}$ um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V.

a) O conjunto W de todas as combinações lineares possíveis de vetores em S é um subespaço de V.

b) O conjunto W da parte acima é o "menor" subespaço de V que contém todos os vetores de s, no sentido de que qualquer outro subespaço de V que contenha todos aqueles vetores contém W.

Definição

Dizemos que o subespaço de um espaço vetorial V que é formado com todas as combinações lineares possíveis de vetores de um conjunto não vazio S é **gerado** por S e dizemos que os vetores em S **geram** esse espaço.

Pode-se dizer que o subespaço é chamado **espaço gerado** e S o **conjunto gerador**.

Definição

Dizemos que o subespaço de um espaço vetorial V que é formado com todas as combinações lineares possíveis de vetores de um conjunto não vazio S é **gerado** por S e dizemos que os vetores em S **geram** esse espaço.

Pode-se dizer que o subespaço é chamado **espaço gerado** e S o **conjunto gerador**.

Ex.:

Verifique que $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ gera o $\mathbb{R}^3$.

Subespaços

Ex.:

Identifique um conjunto gerador para P_n.

Subespaços

Teorema

As soluções de um sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ em n incógnitas é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Bons Estudos!!!