Dependência e Independência Linear

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

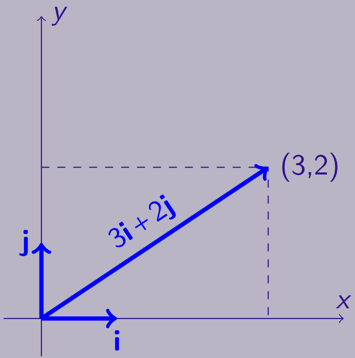
Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons "Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional".

Introdução

Introdução

No plano, qualquer vetor pode ser escrito de forma única como combinação linear dos vetores unitários canônicos.

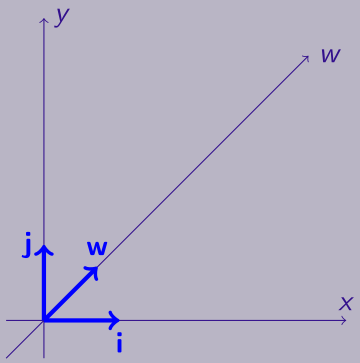


Por exemplo, a única maneira de escrevermos $(3,2)$ como combinação linear de $\mathbf{i} = (1,0)$ e $\mathbf{j} = (0,1)$ é

$$(3,2) = (3,0) + (0,2) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Introdução

No plano, qualquer vetor pode ser escrito de forma única como combinação linear dos vetores unitários canônicos.



Porém, incluindo um terceiro eixo coordenado w fazendo ângulo de 45° com o eixo x. Seu vetor unitário $\mathbf{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Agora temos uma infinidade de maneiras de escrevermos $(3,2)$ como combinação linear de $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$ e $\mathbf{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$(3,2) = 3 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1) + 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{w}$$

$$(3,2) = 2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{w}$$

$$(3,2) = 4 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1) - \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{w}$$

Por que isso acontece?

Ao inserir esse "vetor a mais", perdemos a unicidade da representação. Isso se dá pois

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1,0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}.$$

Ou seja, $\mathbf{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Introdução

Por que isso acontece?

Ao inserir esse "vetor a mais", perdemos a unicidade da representação. Isso se dá pois

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1,0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}.$$

Ou seja, $\mathbf{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Note que não existem valores $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{i} = a\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{j} = b\mathbf{i}$$

Definição

Definição

Definição

Se $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ é um conjunto não vazio de vetores em um espaço vetorial V, então a equação

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_r\mathbf{v_r} = \mathbf{0}$$

tem ao menos uma solução que é dita trivial, a saber:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$$

Definição

Se $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_r}\}$ é um conjunto não vazio de vetores em um espaço vetorial V, então a equação

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \dots + k_r\mathbf{v_r} = \mathbf{0}$$

tem ao menos uma solução que é dita trivial, a saber:

$$k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$$

- Se a equação tem **apenas** a solução trivial, dizemos que S é um **conjunto linearmente independente (LI)**.
- Caso contrário, temos um **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Definição

Definição

Se $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ é um conjunto não vazio de vetores em um espaço vetorial V, então a equação

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_r\mathbf{v_r} = \mathbf{0}$$

tem ao menos uma solução que é dita trivial, a saber:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$$

- Se a equação tem **apenas** a solução trivial, dizemos que S é um **conjunto linearmente independente (LI)**.
- Caso contrário, temos um **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Veja que, em $\mathbb{R}^2$, por exemplo,

$$\mathbf{0} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \implies a = b = 0$$

Definição

Ex.:

Os vetores $\mathbf{v_1} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (5, 6, -1)$, $\mathbf{v_3} = (3, 2, 1)$ formam um conjunto LI ou LD?

Definição

Ex.:

Os vetores $\mathbf{v_1} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (5, 6, -1)$, $\mathbf{v_3} = (3, 2, 1)$ formam um conjunto LI ou LD?

R. : Precisamos avaliar a equação vetorial $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$. Em componentes, fica

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}.$$

Calculando o determinante da matriz de coeficientes, ou resolvendo o sistema, vemos que temos mais de uma solução $(k_1 = t, k_2 = t, k_3 = -2t)$. Logo, o conjunto é LD.

Definição

Ex.:

Os vetores $\mathbf{v_1} = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{v_2} = (4, 9, 9, -4)$, $\mathbf{v_3} = (5, 8, 9, -5)$ formam um conjunto LI ou LD?

Definição

Ex.:

Os vetores $\mathbf{v_1} = (1,2,2,-1)$, $\mathbf{v_2} = (4,9,9,-4)$, $\mathbf{v_3} = (5,8,9,-5)$ formam um conjunto LI ou LD?

R. : Precisamos avaliar a equação vetorial $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$. Em componentes, fica

$$\begin{cases} k_1 + 4k_2 + 5k_3 = 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 8k_3 = 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 9k_3 = 0 \\ -k_1 - 4k_2 - 5k_3 = 0 \end{cases}.$$

Aqui não podemos calcular o determinante da matriz de coeficientes, pois não é quadrada. Resolvendo o sistema, vemos que temos apenas a solução $(k_1 = k_2 = k_3 = 0)$. Logo, o conjunto é LI.

Definição

Ex.:

Determine se são LI ou LD os polinômios

$$\mathbf{p_1} = 1 - x, \mathbf{p_2} = 5 + 3x - 2x^2, \mathbf{p_3} = 1 + 3x - x^2$$

Definição

Ex.:

Determine se são LI ou LD os polinômios

$$\mathbf{p_1} = 1 - x, \mathbf{p_2} = 5 + 3x - 2x^2, \mathbf{p_3} = 1 + 3x - x^2$$

R.: Precisamos avaliar a equação vetorial $k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + k_3\mathbf{p_3} = \mathbf{0}$. Esta equação pode ser resscrita como $k_1(1-x) + k_2(5+3x-2x^2) + k_3(1+3x-x^2) = 0$. Fazendo as distributivas, temos $(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_2 + 3k_3)x + (-2k_2 - k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$. Podemos resolver o sistema $\begin{cases} k_1 + 5k_2 + k_3 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 0 \\ - 2k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$ ou calcular o determinante da matriz dos coeficientes $\det\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Como esse determinante é zero, o conjunto é LD.

Definição

Teorema

Um conjunto S de dois ou mais vetores é

a) LD se, e somente se, **pelo menos um** dos vetores de S pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de S.

b) LI se, e somente se, **nenhum** dos vetores de S pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de S.

Definição

Ex.:

Verificar se são LI ou LD os vetores canônicos de $\mathbb{R}^3$.

Definição

Ex.:

Verificar se são LI ou LD os vetores canônicos de $\mathbb{R}^3$.

R. : Vamos supor que existam k_1 e k_2 tais que

$$\mathbf{k} = k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j}.$$

Isso significa $(0,0,1) = (k_1, k_2, 0)$ e não existem escalares que satisfaçam essa equação. Logo, $\mathbf{k}$ não pode ser escrito como combinação de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. O mesmo ocorre ao tentar escrever $\mathbf{i}$ ou $\mathbf{j}$ como combinação dos outros dois. Os vetores são LI.

Definição

Ex.:

Verificar se são LI ou LD os vetores $\mathbf{v_1} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (5, 6, -1)$, $\mathbf{v_3} = (3, 2, 1)$.

Definição

Ex.:

Verificar se são LI ou LD os vetores $\mathbf{v_1} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (5, 6, -1)$, $\mathbf{v_3} = (3, 2, 1)$.

R. : Vimos que $t\mathbf{v_1} + t\mathbf{v_2} - 2t\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$. Assim

$$\mathbf{v_1} = -\mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3}.$$

São LD.

Definição

Teorema

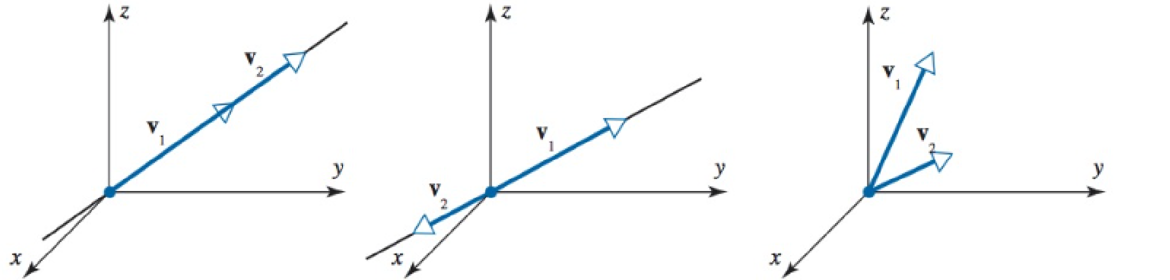
a) Um conjunto finito que contenha $\mathbf{0}$ é LD.

b) Um conjunto de exatamente um vetor é LI se, e só se, esse vetor não for $\mathbf{0}$.

c) Um conjunto de exatamente dois vetores é LI se, e só se, nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro.

Interpretação Geométrica

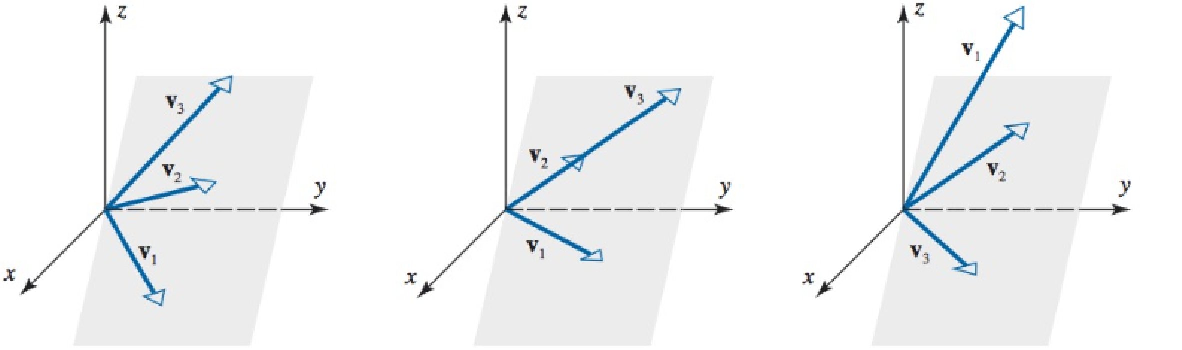
Interpretação Geométrica



(a) Linearmente dependentes (b) Linearmente dependentes (c) Linearmente independentes

Dois vetores em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ são LI se, e só se, os vetores não ficam em uma mesma reta quando seus pontos iniciais estão na origem.

Interpretação Geométrica



(*a*) Linearmente dependentes (*b*) Linearmente dependentes (*c*) Linearmente independentes

Três vetores em $\mathbb{R}^3$ são LI se, e só se, os vetores não ficam em um mesmo plano quando seus pontos iniciais estão na origem.

Interpretação Geométrica

Teorema

Seja $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$. Se $r > n$ então S é LD.

Interpretação Geométrica

Teorema

Seja $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$. Se $r > n$ então S é LD.

Assim, sempre são LD conjuntos de:

- 3 vetores em $\mathbb{R}^2$;
- 4 vetores em $\mathbb{R}^3$;
- 5 vetores em $\mathbb{R}^4$...

Independência Linear de Funções

Independência Linear de Funções

A partir de identidades conhecidas, podemos verificar se um conjunto de funções é LI ou LD. Por exemplo, $\mathbf{f_1} = \text{ sen }^2 x$, $\mathbf{f_2} = \cos^2 x$ e $\mathbf{f_3} = 5$ são LD em $F(-\infty, \infty)$, pois

$$\begin{aligned} 5\mathbf{f_1} + 5\mathbf{f_2} - \mathbf{f_3} &= 5 \text{ sen }^2 x + 5\cos^2 x - 5 \\ &= 5(\text{ sen }^2 x + \cos^2 x) - 5 = 5 - 5 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

expressa $\mathbf{0}$ como combinação de $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_3}$ sem coeficientes todos nulos.

Independência Linear de Funções

A partir de identidades conhecidas, podemos verificar se um conjunto de funções é LI ou LD. Por exemplo, $\mathbf{f_1} = \operatorname{sen}^2 x$, $\mathbf{f_2} = \cos^2 x$ e $\mathbf{f_3} = 5$ são LD em $F(-\infty, \infty)$, pois

$$\begin{aligned} 5\mathbf{f_1} + 5\mathbf{f_2} - \mathbf{f_3} &= 5 \operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x - 5 \\ &= 5(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) - 5 = 5 - 5 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

expressa $\mathbf{0}$ como combinação de $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_3}$ sem coeficientes todos nulos. Infelizmente não há um método geral para determinar se um conjunto de funções é LI ou LD. Em certas circunstâncias, o resultado a seguir pode ajudar. (**Obs.: Requer Cálculo.**)

Definição

Se $\mathbf{f_1} = f_1(x)$, $\mathbf{f_2} = f_2(x)$, $\ldots, \mathbf{f_n} = f_n(x)$ forem funções $n-1$ vezes deriváveis no intervalo $(-\infty, \infty)$, então o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

é denominado **Wronskiano** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Teorema

Se o Wronskiano de $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ não for identicamente nulo em $(-\infty, \infty)$, então essas funções formam um conjunto LI de vetores em $C^{n-1}(-\infty, \infty)$.

Ex.:

Usando o Wronskiano, verifique se $\mathbf{f_1} = x$ e $\mathbf{f_2} = \operatorname{sen} x$ são LI ou LD.

Ex.:

Usando o Wronskiano, verifique se $\mathbf{f_1} = x$ e $\mathbf{f_2} = \operatorname{sen} x$ são LI ou LD.

R. :

O wronskiano fica $W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x\cos x - \operatorname{sen} x.$

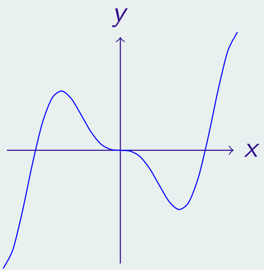
Ex.:

Usando o Wronskiano, verifique se $\mathbf{f_1} = x$ e $\mathbf{f_2} = \operatorname{sen} x$ são LI ou LD.

R. :

O wronskiano fica $W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x\cos x - \operatorname{sen} x$. Essa função se anula em alguns valores, mas não em **todos** os valores de x. Por exemplo,

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0 = \frac{\pi}{2}.$$



As funções são LI.

Ex.:

Usando o Wronskiano, verifique se $\mathbf{p_1} = 1 - x$, $\mathbf{p_2} = 5 + 3x - 2x^2$, $\mathbf{p_3} = 1 + 3x - x^2$ são LI ou LD.

Ex.:

Usando o Wronskiano, verifique se $\mathbf{p_1} = 1 - x$, $\mathbf{p_2} = 5 + 3x - 2x^2$, $\mathbf{p_3} = 1 + 3x - x^2$ são LI ou LD.

R. : O wronskiano fica $W(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 5+3x-2x^2 & 1+3x-x^2 \\ -1 & 3-4x & 3-2x \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 0 \begin{vmatrix} 5+3x-2x^2 & 1+3x-x^2 \\ 3-4x & 3-2x \end{vmatrix} \text{-(-4)} \begin{vmatrix} 1-x & 1+3x-x^2 \\ -1 & 3-2x \end{vmatrix} \text{-2} \begin{vmatrix} 1-x & 5+3x-2x^2 \\ -1 & 3-4x \end{vmatrix}$$

$$= 4(3-2x-3x+2x^2+1+3x-x^2) - 2(3-4x-3x+4x^2+5+3x-2x^2)$$

$$= 4(4-2x+x^2) - 2(8-4x+2x^2) = 16-8x+4x^2-16+8x-4x^2 = 0.$$ São LD.

Exercícios indicados ao final da aula

Exercícios indicados ao final da aula

Ex.:

Verificar se são LI ou LD:

a) $\mathbf{v_1} = (2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (3, -2)$
b) $\mathbf{v_1} = (-1, 1)$, $\mathbf{v_2} = (2, 3)$, $\mathbf{v_3} = (-3, 2)$
c) $\mathbf{v_1} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v_2} = (3, -2, -1)$, $\mathbf{v_3} = (-5, 1, -2)$
d) $\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v_3} = (2, 4, 0)$

Exercícios indicados ao final da aula

Ex.:

Verificar se são LI ou LD:

a) $\mathbf{v_1} = (2,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-2)$ **R.**: Note que, ao montar a matriz de coeficientes da equação $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$, a primeira coluna será $\mathbf{v_1}$ e a segunda $\mathbf{v_2}$. Fazendo $\det([\mathbf{v_1} \quad \mathbf{v_2}]) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$. O sistema é determinado. Os vetores são LI.

■

b) $\mathbf{v_1} = (-1,1)$, $\mathbf{v_2} = (2,3)$, $\mathbf{v_3} = (-3,2)$

c) $\mathbf{v_1} = (2,1,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-2,-1)$, $\mathbf{v_3} = (-5,1,-2)$

d) $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,1,0)$, $\mathbf{v_3} = (2,4,0)$

Exercícios indicados ao final da aula

Ex.:

Verificar se são LI ou LD:

a) $\mathbf{v_1} = (2,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-2)$ **R.** : LI.

---

b) $\mathbf{v_1} = (-1,1)$, $\mathbf{v_2} = (2,3)$, $\mathbf{v_3} = (-3,2)$ **R.** : 3 Vetores de $\mathbb{R}^2$. São LD

---

c) $\mathbf{v_1} = (2,1,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-2,-1)$, $\mathbf{v_3} = (-5,1,-2)$

d) $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,1,0)$, $\mathbf{v_3} = (2,4,0)$

Exercícios indicados ao final da aula

Ex.:

Verificar se são LI ou LD:

a) $\mathbf{v_1} = (2,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-2)$ **R.** : LI.

b) $\mathbf{v_1} = (-1,1)$, $\mathbf{v_2} = (2,3)$, $\mathbf{v_3} = (-3,2)$ **R.** : 3 Vetores de $\mathbb{R}^2$. São LD

c) $\mathbf{v_1} = (2,1,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-2,-1)$, $\mathbf{v_3} = (-5,1,-2)$ **R.** :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 0. \text{ São LD.}$$

d) $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,1,0)$, $\mathbf{v_3} = (2,4,0)$

Exercícios indicados ao final da aula

Ex.:

Verificar se são LI ou LD:

a) $\mathbf{v_1} = (2,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-2)$ **R.** : LI.

b) $\mathbf{v_1} = (-1,1)$, $\mathbf{v_2} = (2,3)$, $\mathbf{v_3} = (-3,2)$ **R.** : 3 Vetores de $\mathbb{R}^2$. São LD

c) $\mathbf{v_1} = (2,1,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-2,-1)$, $\mathbf{v_3} = (-5,1,-2)$ **R.** : São LD.

d) $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,1,0)$, $\mathbf{v_3} = (2,4,0)$ **R.** : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. São LD.

Bons Estudos!!!