Base e Dimensão

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

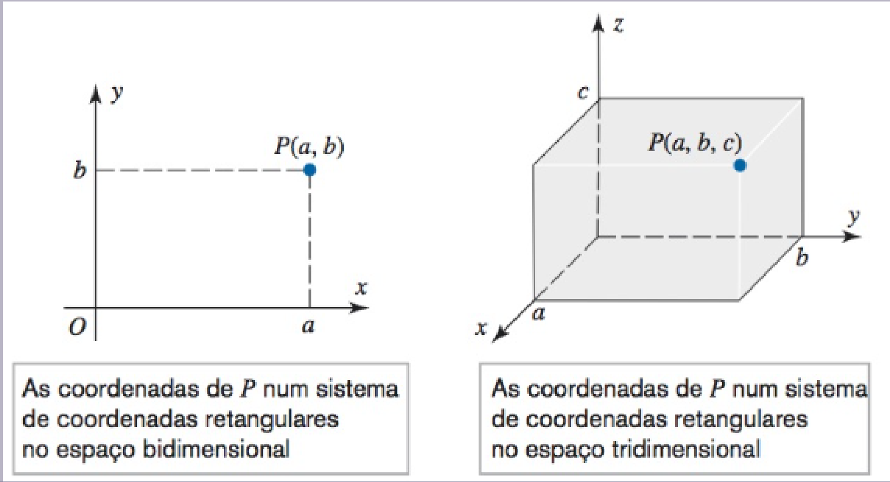
Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

O que são Coordenadas?

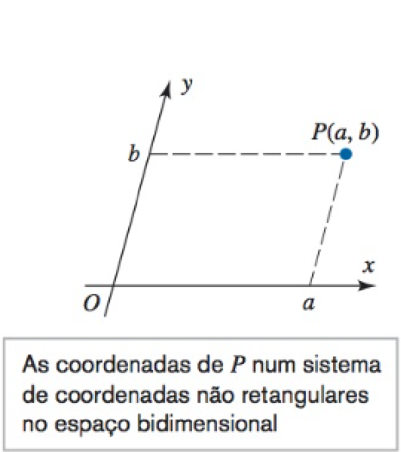
O que são Coordenadas?

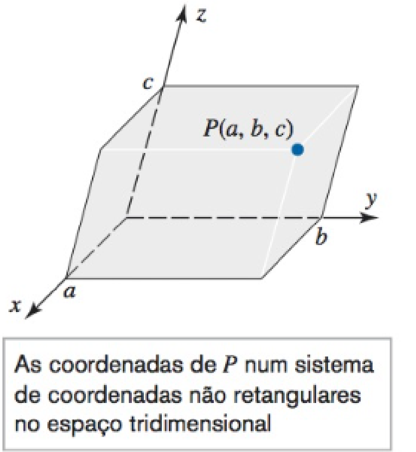
Para cada ponto do espaço $\mathbb{R}^2$ associamos um par ordenado de números reais, assim como pontos de $\mathbb{R}^3$ são associados a ternos de números reais, usando um sistema de coordenadas *retangular*.



O que são Coordenadas?

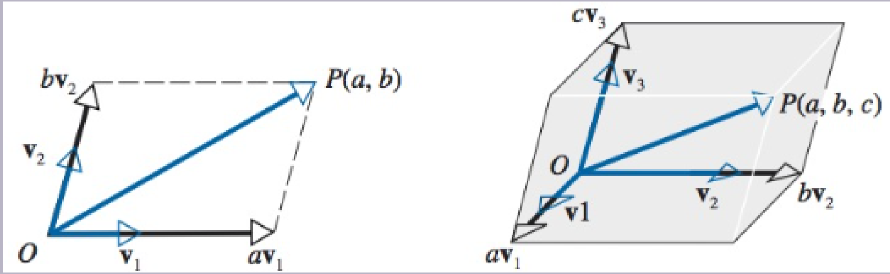
Ocorre que não precisamos necessariamente termos um sistema de coordenadas retangulares.





O que são Coordenadas?

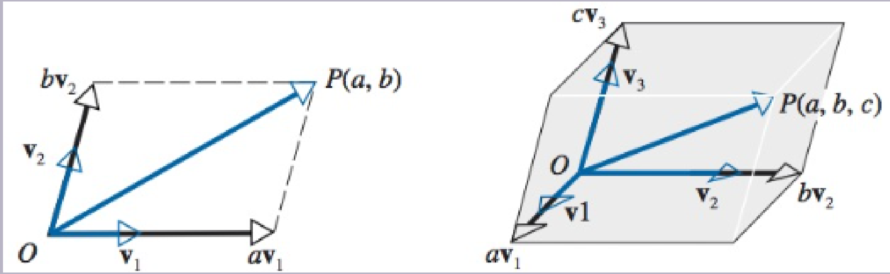
Na Álgebra Linear, podemos usar vetores no lugar dos eixos coordenados para especificar sistemas de coordenadas.



Na primeira figura, $\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2}$. Na segunda, $\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2} + c\mathbf{v_3}$.

O que são Coordenadas?

Na Álgebra Linear, podemos usar vetores no lugar dos eixos coordenados para especificar sistemas de coordenadas.



Na primeira figura, $\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2}$. Na segunda, $\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2} + c\mathbf{v_3}$.

Entretanto, vimos na aula passada que a existência de "vetores excedentes" acabam com a unicidade das combinações lineares. Como resolver isso?

Base

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se valerem ambas as condições:

a) S é linearmente independente.   b) S gera V.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se valerem ambas as condições:

a) S é linearmente independente. b) S gera V.

Exemplo 1:

Os vetores unitários canônicos de $\mathbb{R}^n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se valerem ambas as condições:

a) S é linearmente independente. b) S gera V.

Exemplo 1:

Os vetores unitários canônicos de $\mathbb{R}^n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$.

R. : (a) O conjunto é LI? Se tentarmos escrever $\mathbf{0} = k_1\mathbf{e_1} + k_2\mathbf{e_2} + \ldots + k_n\mathbf{e_n}$, necessariamente $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. São LI.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se valerem ambas as condições:

a) S é linearmente independente.   b) S gera V.

Exemplo 1:

Os vetores unitários canônicos de $\mathbb{R}^n$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$.
R. : (b) Um vetor genérico $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ pode ser escrito como $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e_1} + b_2\mathbf{e_2} + \dots + b_n\mathbf{e_n}$.
Gera $\mathbb{R}^n$.
Portanto, é base para $\mathbb{R}^n$.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se valerem ambas as condições:

a) S é linearmente independente. b) S gera V.

Exemplo 2:

O conjunto $S = \left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}$ formam uma base para P_n.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se valerem ambas as condições:

a) S é linearmente independente. b) S gera V.

Exemplo 2:

O conjunto $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ formam uma base para P_n.

R. : (a) O conjunto é LI? Se tentarmos escrever $\mathbf{0} = a_0 \cdot \mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} + \ldots + a_n\mathbf{x^n}$, necessariamente $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. São LI.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se valerem ambas as condições:

a) S é linearmente independente. b) S gera V.

Exemplo 2:

O conjunto $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ formam uma base para P_n.
R. : (b) Um polinômio genérico $\mathbf{p} \in P_n$ pode ser escrito como $\mathbf{p} = a_0 \cdot \mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} + \ldots + a_n\mathbf{x^n}$.
Gera P_n.
Portanto, é base para P_n.

Exemplo 3:

Mostrar que os vetores $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3:

Mostrar que os vetores $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

R. : (a) O conjunto é LI? Se tentarmos escrever $\mathbf{0} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3}$, temos

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 = 0 \end{cases}$$

Exemplo 3:

Mostrar que os vetores $\mathbf{v_1} = (1,2,1)$, $\mathbf{v_2} = (2,9,0)$ e $\mathbf{v_3} = (3,3,4)$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

R. : (b) Um vetor genérico $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ pode ser escrito como $\mathbf{b} = b_1\mathbf{v_1} + b_2\mathbf{v_2} + b_3\mathbf{v_3}$ se o sistema

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = b_2 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 = b_3 \end{cases}$$

tiver solução única!

Exemplo 3:

Mostrar que os vetores $\mathbf{v_1} = (1,2,1)$, $\mathbf{v_2} = (2,9,0)$ e $\mathbf{v_3} = (3,3,4)$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

R. : Ambos os sistemas tem a mesma matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Se esta matriz tiver inversa, ambas as situações serão atendidas!

Exemplo 3:

Mostrar que os vetores $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

R. : Ambos os sistemas tem a mesma matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Se esta matriz tiver inversa, ambas as situações serão atendidas!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0$$

É base!

Base

Teorema

Se $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \mathbf{v_n}\}$ for uma base de um espeço vetorial V, então cada vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser expresso na forma $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \dots c_n\mathbf{v_n}$ de maneira **única**.

Base

Teorema

Se $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_n}\}$ for uma base de um espeço vetorial V, então cada vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser expresso na forma $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots c_n\mathbf{v_n}$ de maneira **única**.

E, por essa unicidade podemos definir:

Definição

Se $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_n}\}$ for uma base de um espeço vetorial V, e

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots c_n\mathbf{v_n}$$

é a expressão de um vetor $\mathbf{v}$ em termos da base S, então os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são denominados **coordenadas** de $\mathbf{v}$ em relação à base S.
Notação: $(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

Base

Ex.:

Vimos que $S = \{\mathbf{v_1} = (1,2,1), \mathbf{v_2} = (2,9,0), \mathbf{v_3} = (3,3,4)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

a) Encontre o vetor de coordenadas $\mathbf{v} = (5,-1,9)$ em relação à base S.

b) Encontre o vetor de $\mathbb{R}^3$ que, em relação à base S tem como coordenadas $(\mathbf{v})_S = (-1,3,2)$.

Base

Ex.:

Vimos que $S = \{\mathbf{v_1} = (1,2,1), \mathbf{v_2} = (2,9,0), \mathbf{v_3} = (3,3,4)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

R. : a) Precisamos encontrar (c_1, c_2, c_3) tais que $(5,-1,9) = c_1(1,2,1) + c_2(2,9,0) + c_3(3,3,4)$ ou ainda

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 = 9 \end{cases} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5 \\ 5c_2 - 3c_3 = -11 \\ -2c_2 + \ \ c_3 = 4 \end{cases} \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{5}L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{5}L_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{cases} c_1 \qquad + \frac{21}{5}c_3 = \frac{47}{5} \\ c_2 - \ \frac{3}{5}c_3 = -\frac{11}{5} \\ \qquad - \ \frac{1}{5}c_3 = -\frac{2}{5} \end{cases} \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{21}{5}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{5}L_3 \\ L_3 \leftarrow -5L_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} c_1 \qquad\qquad = 1 \\ \quad c_2 \qquad = -1 \\ \qquad c_3 = 2 \end{cases} \therefore (\mathbf{v})_S = (1,-1,2).$$

■

Base

Ex.:

Vimos que $S = \{\mathbf{v_1} = (1,2,1), \mathbf{v_2} = (2,9,0), \mathbf{v_3} = (3,3,4)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

R. : b) Pela definição de $(\mathbf{v})_S$

$$\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3} = (-1)(1,2,1) + 3(2,9,0) + 2(3,3,4) = (11,31,7).$$

Dimensão

Dimensão

Teorema

Todas as bases de um espaço de dimensão finita tem o mesmo número de vetores.

Dimensão

Teorema

Todas as bases de um espaço de dimensão finita tem o mesmo número de vetores.

Definição

A **dimensão** de um espaço vetorial de dimensão finita V é definida como o número de vetores em uma base de V.
Notação: $\dim(V)$.

Dimensão

Teorema

Todas as bases de um espaço de dimensão finita tem o mesmo número de vetores.

Definição

A **dimensão** de um espaço vetorial de dimensão finita V é definida como o número de vetores em uma base de V.
Notação: $\dim(V)$.

Dimensões de alguns espaços vetoriais

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ $\quad\quad$ $\dim(P_n) = n + 1$ $\quad\quad$ $\dim(M_{mn}) = mn$

Ex.:

Encontre uma base e a dimensão do espaço solução do sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Dimensão

Dimensão de um espaço solução

Ex.:

Trocando de início $L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_3 \qquad + x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_4 \qquad = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = -t \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como estes vetores não são múltiplos um do outro, são LI e geram o espaço de soluções deste sistema homogêneo. Logo, o espaço de solução tem dimensão 2.

Alguns Teoremas

Alguns Teoremas

Teorema do Mais/Menos

Seja S um conjunto não vazio de vetores em um espaço vetorial V.

a) Se S for um conjunto LI e $\mathbf{v} \in V$ um vetor fora do espaço gerado por S, então o conjunto $S \cup \{\mathbf{v}\}$, que resulta do acréscimo de $\mathbf{v}$ a S ainda é LI.

b) Se $\mathbf{v} \in S$ pode ser expresso como combinação linear dos outros vetores de S e $S - \{\mathbf{v}\}$ representa o conjunto obtido retirando $\mathbf{v}$ de S, então S e $S - \{\mathbf{v}\}$ geram o mesmo espaço.

Alguns Teoremas

Teorema

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e S um conjunto em V com exatamente n vetores. Então S é uma base de V se, e só se, S gera V ou S é LI.

Alguns Teoremas

Teorema

Seja S um conjunto finito de vetores num espaço vetorial V de dimensão finita:

a) Se S gerar V, mas não for uma base de V, então S pode ser reduzido a uma base de V removendo vetores apropriados de S.

b) Se S for um conjunto LI, mas não for uma base de V, então S pode ser ampliado a uma base de V acrescentando vetores apropriados a S.

Alguns Teoremas

Teorema

Se W for um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita, então:

a) W tem dimensão finita.

b) $\dim(W) \leq \dim(V)$.

c) $W = V$ se, e só se, $\dim(W) = \dim(V)$.

Mudança de bases

Mudança de bases

Uma base conveniente para um problema pode não ser conveniente para outro. Desta forma, precisamos de uma maneira de efeturamos mudança de uma base para outra em um mesmo espaço.

Problema:

Se $\mathbf{v}$ for um vetor em um espaço vetorial V de dimensão finita e mudamos de uma base B de V para uma base B', qual a relação entre os vetores de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ e $[\mathbf{v}]_{B'}$?

Mudança de bases

Avaliando para espaços bidimensionais

Chamemos B de "base velha" e B' de "base nova" e tomemos

$$B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\} \quad \text{e} \quad B' = \{\mathbf{u_1'}, \mathbf{u_2'}\}$$

Mudança de bases

Avaliando para espaços bidimensionais

Chamemos B de "base velha" e B' de "base nova" e tomemos

$$B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\} \quad \text{e} \quad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

Precisamos dos vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha. Tomamos

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_1 = a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2} \\ \mathbf{u}'_2 = c\mathbf{u_1} + d\mathbf{u_2} \end{cases}$$

Mudança de bases

Chamemos B de "base velha" e B' de "base nova" e tomemos

$$B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\} \qquad \text{e} \qquad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

Precisamos dos vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha. Tomamos

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_1 = a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2} \\ \mathbf{u}'_2 = c\mathbf{u_1} + d\mathbf{u_2} \end{cases}$$

Seja, agora, $\mathbf{v}$ um vetor qualquer em V com $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ o novo vetor de coordenadas, isto é

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}'_1 + k_2\mathbf{u}'_2$$

Mudança de bases

Avaliando para espaços bidimensionais

Para encontrar as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base velha, devemos escrevê-lo como combinação dos vetores de B. Ou seja

$$\mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2}) + k_2(c\mathbf{u_1} + d\mathbf{u_2}) = (k_1a + k_2c)\mathbf{u_1} + (k_1b + k_2d)\mathbf{u_2}$$

Mudança de bases

Avaliando para espaços bidimensionais

Para encontrar as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base velha, devemos escrevê-lo como combinação dos vetores de B. Ou seja

$$\mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2}) + k_2(c\mathbf{u_1} + d\mathbf{u_2}) = (k_1 a + k_2 c)\mathbf{u_1} + (k_1 b + k_2 d)\mathbf{u_2}$$

Então, as coordenadas velhas de $\mathbf{v}$ ficam

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{B'}$$

Mudança de bases

Avaliando para espaços bidimensionais

Para encontrar as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base velha, devemos escrevê-lo como combinação dos vetores de B. Ou seja

$$\mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2}) + k_2(c\mathbf{u_1} + d\mathbf{u_2}) = (k_1 a + k_2 c)\mathbf{u_1} + (k_1 b + k_2 d)\mathbf{u_2}$$

Então, as coordenadas velhas de $\mathbf{v}$ ficam

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{B'}$$

Portanto, as coordenadas na base velha são obtidas pela multiplicação do vetor de coordenadas na base nova à esquerda pela matriz $P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, que tem como colunas as coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha.

Matriz mudança de base

Se mudarmos a base de um espaço vetorial V de alguma base velha $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ para uma nova base $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$, então, dado qualquer vetor $\mathbf{v} \in V$, o velho vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ está relacionado com o novo vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ pela equação

$$[\mathbf{v}]_B = P\,[\mathbf{v}]_{B'}$$

onde as colunas de P são os vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha. Ou seja,

$$P = \left([\mathbf{u}'_1]_B \quad [\mathbf{u}'_2]_B \quad \cdots \quad [\mathbf{u}'_n]_B \right)$$

Essa matriz é chamada de **matriz de transição** de B' para B.

As colunas da matriz de transição de uma base velha para uma base nova são os vetores de coordenadas da base velha em relação à base nova.

Mudança de bases

Ex.:

Considere as bases $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ e $B' = \{\mathbf{u_1'}, \mathbf{u_2'}\}$ com

$$\mathbf{u_1} = (1,0), \mathbf{u_2} = (0,1), \mathbf{u_1'} = (1,1), \mathbf{u_2'} = (2,1)$$

a) Encontre a matriz de transição de B' para B

b) Encontre a matriz de transição de B para B'

c) Encontre $[\mathbf{v}]_B$ sabendo que $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Mudança de bases

Ex.:

Considere as bases $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ com

$$\mathbf{u_1} = (1,0), \mathbf{u_2} = (0,1), \mathbf{u}'_1 = (1,1), \mathbf{u}'_2 = (2,1)$$

R. : a) Base velha: $B' = \{(1,1),(2,1)\}$. Base nova: $B = \{(1,0),(0,1)\}$. Queremos escrever as coordenadas dos vetores da base velha na base nova.

É fácil vermos que

$$\mathbf{u}'_1 = (1,1) = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}$$
$$\mathbf{u}'_2 = (2,1) = 2\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}$$

e podemos escrever

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mudança de bases

Ex.:

Considere as bases $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ e $B' = \{\mathbf{u'_1}, \mathbf{u'_2}\}$ com

$$\mathbf{u_1} = (1,0), \mathbf{u_2} = (0,1), \mathbf{u'_1} = (1,1), \mathbf{u'_2} = (2,1)$$

R. : b) Base velha: $B = \{(1,0),(0,1)\}$. Base nova: $B' = \{(1,1),(2,1)\}$. Queremos escrever as coordenadas dos vetores da base velha na base nova.

Queremos

$$\begin{cases} \mathbf{u_1} = a\mathbf{u'_1} + b\mathbf{u'_2} \\ \mathbf{u_2} = c\mathbf{u'_1} + d\mathbf{u'_2} \end{cases} \implies \begin{cases} (1,0) = (-1)(1,1) + 1(2,1) \\ (0,1) = 2(1,1) + (-1)(2,1) \end{cases}$$

e podemos escrever

$$[\mathbf{u'_1}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u'_2}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Mudança de bases

Ex.:

Considere as bases $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ com

$$\mathbf{u_1} = (1,0), \mathbf{u_2} = (0,1), \mathbf{u}'_1 = (1,1), \mathbf{u}'_2 = (2,1)$$

R. : c) Temos $[\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B} [\mathbf{v}]_{B'}$ e $[\mathbf{v}]_{B'} = P_{B \to B'} [\mathbf{v}]_B$. Assim

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Mudança de bases

Qual a relação entre $P_{B' \to B}$ e $P_{B \to B'}$?

Mudança de bases

Teorema

Se P for a matriz de transição de uma base B' para uma base B de um espaço vetorial V de dimensão finita, então P é invertível e P^{-1} é a matriz de transição de B para B'.

Mudança de bases

Teorema

Se P for a matriz de transição de uma base B' para uma base B de um espaço vetorial V de dimensão finita, então P é invertível e P^{-1} é a matriz de transição de B para B'.

Um procedimento para calcular P de B para B'

Passo 1: Montamos a matriz $\left[B' \quad | \quad B\right]$

Passo 2: Reduzimos essa matriz à forma escalonada reduzida, usando operações elementares com as linhas.

Passo 3: A matriz resultante é $\left[I \quad | \quad P\right]$

Mudança de bases

Teorema

Se P for a matriz de transição de uma base B' para uma base B de um espaço vetorial V de dimensão finita, então P é invertível e P^{-1} é a matriz de transição de B para B'.

Um procedimento para calcular P de B para B'

Passo 1: Montamos a matriz $\left[B' \quad | \quad B\right]$

Passo 2: Reduzimos essa matriz à forma escalonada reduzida, usando operações elementares com as linhas.

Passo 3: A matriz resultante é $\left[I \quad | \quad P\right]$

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] \xrightarrow{\text{operações com linhas}} [I \mid P]$$

Mudança de bases

Ex.:

Considere as bases $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ com

$$\mathbf{u_1} = (1,0), \mathbf{u_2} = (0,1), \mathbf{u}'_1 = (1,1), \mathbf{u}'_2 = (2,1)$$

Usando o procedimento anterior:

a) Encontre a matriz de transição de B' para B

b) Encontre a matriz de transição de B para B'

Mudança de bases

Ex.:

Considere as bases $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ com

$$\mathbf{u_1} = (1,0), \mathbf{u_2} = (0,1), \mathbf{u}'_1 = (1,1), \mathbf{u}'_2 = (2,1)$$

Usando o procedimento anterior:

R. : a) De B' para B: [base nova | base velha] $\Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

Já temos a identidade no primeiro bloco. Logo,

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mudança de bases

Ex.:

Considere as bases $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ e $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\}$ com

$$\mathbf{u_1} = (1,0), \mathbf{u_2} = (0,1), \mathbf{u}_1' = (1,1), \mathbf{u}_2' = (2,1)$$

Usando o procedimento anterior:

R.: b) De B para B':

[base nova | base velha] $\Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] L_2 \leftarrow (-1)L_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$

Temos a identidade no primeiro bloco. Logo,

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Mudança de bases

Transição para a base canônica

Teorema

Sejam $B' = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ uma base qualquer do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e $S' = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Se os vetores dessas bases forem escritos em formas de colunas, então

$$P_{B' \to S} = \left[\mathbf{u_1} \quad | \quad \mathbf{u_2} \quad | \quad \cdots \quad | \quad \mathbf{u_n}\right]$$

Bons Estudos!!!