# Espaços Associados à Matrizes

## JAN003A / BIAES003
## Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

# Espaços linha, coluna e nulo

# Espaços linha, coluna e nulo

## Definição

Para uma matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{r_1} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{r_2} &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \mathbf{r_m} &= \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

em $\mathbb{R}^n$ são denominados **vetores linha** de $A$.

os vetores

$$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{c_n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{R}^m$ são denominados **vetores colunas** de $A$.

# Espaços linha, coluna e nulo

**Exemplo :**

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Os vetores linha de $A$ são

$$\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e os vetores coluna de $A$ são

$$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{c_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

# Espaços linha, coluna e nulo

## Definição

Dada uma matriz $A_{m\times n}$ então:

- O subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores linha de $A$ é chamado **espaço linha** de $A$;
- O subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelos vetores linha de $A$ é chamado **espaço coluna** de $A$;
- O espaço solução do sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é subespaço de $\mathbb{R}^n$ é chamado **espaço nulo** de $A$ ou **núcleo** de $A$;

# Espaços linha, coluna e nulo

## Definição

Dada uma matriz $A_{m\times n}$ então:

- O subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores linha de $A$ é chamado **espaço linha** de $A$;
- O subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelos vetores linha de $A$ é chamado **espaço coluna** de $A$;
- O espaço solução do sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é subespaço de $\mathbb{R}^n$ é chamado **espaço nulo** de $A$ ou **núcleo** de $A$;

## Questões:

- Quais as relações entre as soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e esses espaços?
- Quais as relações desses espaços entre si?

# Espaços linha, coluna e nulo

## Quais as relações entre as soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e esses espaços?

Sendo $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c_n}$ os vetores coluna de $A$ do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Podemos escrever

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + \ldots + x_n\mathbf{c_n}$$

e reescrevemos o sistema como

$$x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + \ldots + x_n\mathbf{c_n} = \mathbf{b}.$$

# Espaços linha, coluna e nulo

## Quais as relações entre as soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e esses espaços?

Sendo $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c_n}$ os vetores coluna de $A$ do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Podemos escrever

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + \ldots + x_n\mathbf{c_n}$$

e reescrevemos o sistema como

$$x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + \ldots + x_n\mathbf{c_n} = \mathbf{b}.$$

Com isso temos que

**Teorema**

Um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ está no espaço coluna de $A$.

# Espaços linha, coluna e nulo

## Quais as relações desses espaços entre si?

### Teorema

As operações elementares com linhas:

- **não alteram** o espaço nulo de uma matriz;
- **não alteram** o espaço linha de uma matriz;
- **alteram** o espaço coluna de uma matriz.

**Exemplo :**

Encontrar uma base do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

# Espaços linha, coluna e nulo

## Quais as relações desses espaços entre si?

### Exemplo :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 6L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4/6 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 = -2x_4 \\ x_6 = 0 \end{cases} .$$

## Exemplo :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

**Teorema**

Se uma matriz $R$ está em forma escalonada reduzida por linhas:

- os vetores linhas com os pivôs (ou seja, os vetores com linhas não nulas) formam uma base do espaço linha de $R$,
- os vetores coluna com os pivôs vetores linha formam uma base do espaço coluna de $R$.

**Exemplo :**

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está reduzida. Logo, tem como base do espaço linha

$$\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{r_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e base do espaço coluna

$$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Exemplo :**

Encontrar base do espaço linha de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

# Espaços linha, coluna e nulo

## Encontrando bases

### Exemplo :

Escalonando

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como as operações em linha não alteram o espaço linha, temos que

$$\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{r_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

formam uma base para o espaço linha.

Mas, e o espaço coluna?

**Mas, e o espaço coluna?**

As operações em linhas alteram o espaço coluna, mas *não alteram a relação LI/LD entre as colunas!*

## Mas, e o espaço coluna?

As operações em linhas alteram o espaço coluna, mas *não alteram a relação LI/LD entre as colunas!*

### Teorema

Sejam $A$ e $B$ equivalentes por linhas.

a) Um conjunto qualquer de vetores colunas de $A$ é LI se, e só se, o conjunto de vetores coluna correspondente em $B$ é LI.

b) Um conjunto qualquer de vetores colunas de $A$ forma uma base do espaço coluna de $A$ se, e só se, o conjunto de vetores coluna correspondente em $B$ forma uma base do espaço coluna de $B$.

**Exemplo :**

Encontrar base do espaço coluna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

# Espaços linha, coluna e nulo

## Encontrando bases

**Exemplo :**

Escalonando $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$ temos $R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

As colunas 1, 3 e 5 de $R$ contém os pivôs dos vetores linhas. Então, suas correspondentes em $A$

$$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{c_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

formam uma base para o espaço coluna de $A$.

# Espaços linha, coluna e nulo

## Encontrando bases

Assim, temos um procedimento para encontrar bases em um espaço gerado por vetores em $\mathbb{R}^n$

Assim, temos um procedimento para encontrar bases em um espaço gerado por vetores em $\mathbb{R}^n$

### Base para o espaço gerado por $S$ : $ger(S)$

**Passo 1.** Formamos a matriz $A$ com os vetores em $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$ como vetores coluna.

**Passo 2.** Reduzimos a matriz $A$ a uma forma escalonada reduzida por linhas $R$.

**Passo 3.** Denotamos os vetores coluna de $R$ por $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_k}$.

**Passo 4.** Identificamos as colunas de $R$ com os pivôs. Os vetores coluna de $A$ correspondentes formam uma base de $ger(S)$.

# Posto e Nulidade

# Posto e Nulidade

**Teorema**

Os espaços linha e coluna de uma matriz tem uma mesmam dimensão!

# Posto e Nulidade

## Teorema

Os espaços linha e coluna de uma matriz tem uma mesmam dimensão!

## Definição

Chamamos:

**Posto de A:** A dimensão do espaço **linha** de $A$ (que coincide com a dimensão do espaço coluna). Notação $pos(A)$

**Nulidade de A:** A dimensão do espaço **nulo** de $A$. Notação $nul(A)$

# Posto e Nulidade

**Exemplo :**

Encontrar posto e nulidade de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

# Posto e Nulidade

## Exemplo :

Escalonando

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O posto é a dimensão do espaço linha. No caso, $pos(A) = 2$.

Já a nulidade depende da solução de

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0 \\ \quad\quad x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6 \\ x_2 = 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6 \end{cases}$$

# Posto e Nulidade

**Exemplo :**

$$S = \begin{bmatrix} 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6 \\ 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$nul(A) = 4.$

## Valor máximo do posto

Para uma matriz $A_{m\times n}$ o maior valor possível de posto será $\min(m,n)$. Ou ainda

$$pos(A) \leq \min(m,n)$$

## Valor máximo do posto

Para uma matriz $A_{m\times n}$ o maior valor possível de posto será $\min(m,n)$. Ou ainda

$$pos(A) \leq \min(m,n)$$

## Teorema

Para uma matriz $A_{m\times n}$ temos $pos(A) + nul(A) = n$

# Posto e Nulidade

## Relações entre posto e nulidade

### Valor máximo do posto

Para uma matriz $A_{m\times n}$ o maior valor possível de posto será $\min(m,n)$. Ou ainda

$$pos(A) \leq \min(m,n)$$

### Teorema

Para uma matriz $A_{m\times n}$ temos $pos(A) + nul(A) = n$

### Teorema

Para uma matriz $A_{m\times n}$

a) $pos(A) =$ número de variáveis líderes na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

b) $nul(A) =$ número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

# Teorema das Afirmações Equivalentes

Se $A$ for uma matriz quadrada $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $A$ é invertível.

(b) $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial.

(c) A forma escalonada reduzida por linhas de $A$ é $I_n$.

(d) $A$ pode ser expressa como produto de matrizes elementares.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}_{n\times 1}$.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada $\mathbf{b}_{n\times 1}$.

(g) $\det(A) \neq 0$.

(h) Os vetores coluna de $A$ são LI.

(i) Os vetores linha de $A$ são LI.

(j) Os vetores coluna de $A$ geram $\mathbb{R}^n$.

# Teorema das Afirmações Equivalentes

(k) Os vetores linha de $A$ geram $\mathbb{R}^n$.

(l) Os vetores coluna de $A$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(m) Os vetores linha de $A$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(n) $A$ tem posto $n$.

(o) $A$ tem nulidade 0.

# Espaços fundamentais de uma matriz

# Espaços fundamentais de uma matriz

## Espaços fundamentais

- O espaço linha de $A$
- O espaço coluna de $A$
- O espaço nulo de $A$
- O espaço linha de $A^T$
- O espaço coluna de $A^T$
- O espaço nulo de $A^T$

# Espaços fundamentais de uma matriz

## Espaços fundamentais

- O espaço linha de $A$
- O espaço coluna de $A$
- O espaço nulo de $A$
- ~~O espaço linha de $A^T$~~ = espaço coluna de $A$
- ~~O espaço coluna de $A^T$~~ = espaço linha de $A$
- O espaço nulo de $A^T$

# Espaços fundamentais de uma matriz

## Dimensõs de Espaços fundamentais

Se $pos(A) = r$, então

- $\dim(lin(A)) = r$
- $\dim(col(A)) = r$
- $nul(A) = n - r$
- $nul(A^T) = m - r$

**Bons Estudos!!!**