

Autovalores e Autovetores

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.^o Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons “Atribuição-Compartilhagual 4.0 Internacional”.



Autovetores e Autovalores

Autovetores e Autovalores

Definições

Em geral, a imagem de um vetor \mathbf{x} pela multiplicação com uma matriz quadrada A difere de \mathbf{x} tanto em magnitude quanto em direção e sentido. No entanto, existem casos especiais em que a multiplicação por A deixa a direção de \mathbf{x} inalterada, apenas comprimindo ou expandindo o vetor e, eventualmente, invertendo seu sentido.

Autovetores e Autovalores

Definições

Em geral, a imagem de um vetor \mathbf{x} pela multiplicação com uma matriz quadrada A difere de \mathbf{x} tanto em magnitude quanto em direção e sentido. No entanto, existem casos especiais em que a multiplicação por A deixa a direção de \mathbf{x} inalterada, apenas comprimindo ou expandindo o vetor e, eventualmente, invertendo seu sentido.

Definição

Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo \mathbf{x} em \mathbb{R}^n é denominado **autovetor** de A se $A\mathbf{x}$ for um múltiplo escalar de \mathbf{x} , isto é,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

com algum escalar λ que é denominado **autovalor** de A , e dizemos que \mathbf{x} é um autovetor associado a λ .

Autovetores e Autovalores

Definições

Em geral, a imagem de um vetor \mathbf{x} pela multiplicação com uma matriz quadrada A difere de \mathbf{x} tanto em magnitude quanto em direção e sentido. No entanto, existem casos especiais em que a multiplicação por A deixa a direção de \mathbf{x} inalterada, apenas comprimindo ou expandindo o vetor e, eventualmente, invertendo seu sentido.

Definição

Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo \mathbf{x} em \mathbb{R}^n é denominado **autovetor** de A se $A\mathbf{x}$ for um múltiplo escalar de \mathbf{x} , isto é,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

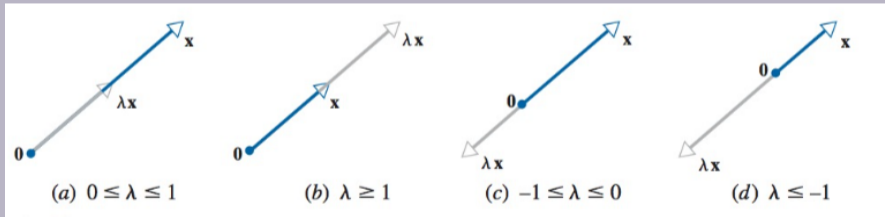
com algum escalar λ que é denominado **autovalor** de A , e dizemos que \mathbf{x} é um autovetor associado a λ .

Impomos a exigência de um autovetor ser não nulo para evitar o caso irrelevante $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$, que vale com quaisquer A e λ .

Autovetores e Autovalores

Definições

Em geral, a imagem de um vetor x pela multiplicação com uma matriz quadrada A difere de x tanto em magnitude quanto em direção e sentido. No entanto, existem casos especiais em que a multiplicação por A deixa a direção de x inalterada, apenas comprimindo ou expandindo o vetor e, eventualmente, invertendo seu sentido.



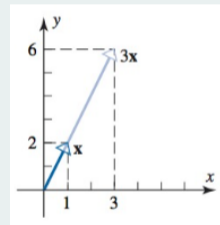
Autovetores e Autovalores

Definições

Exemplo :

O vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda = 3$, pois

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$



Geometricamente, a multiplicação por A expandiu o vetor \mathbf{x} pelo fator 3.

Autovetores e Autovalores

Procedimento para encontrar autovalores e autovetores

A equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $\lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = 0$, ou ainda $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$. Quais são as situações em que esta equação tem solução única? Queremos que isso aconteça?

Autovetores e Autovalores

Procedimento para encontrar autovalores e autovetores

A equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $\lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = 0$, ou ainda $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$.

Teorema

Se A for uma matriz $n \times n$, então λ é um autovalor de A se, e só se, λ satisfaz a equação $\det(\lambda I - A) = 0$ que é chamada **equação característica** de A .

Autovetores e Autovalores

Procedimento para encontrar autovalores e autovetores

Exemplo :

Encontrar os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Autovetores e Autovalores

Procedimento para encontrar autovalores e autovetores

Exemplo :

Encontrar os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

R. : Usamos a equação característica,

$$\det(\lambda I - A) = 0 \implies \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0 \implies (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0. \text{ Logo, } 3 \text{ e } -1 \text{ são autovalores de } A.$$

Autovetores e Autovalores

Procedimento para encontrar autovalores e autovetores

Quando o $\det(\lambda I - A) = 0$ é expandido, resulta em um polinômio $p(\lambda)$ de grau n , chamado **polinômio característico** de A .

Autovetores e Autovalores

Procedimento para encontrar autovalores e autovetores

Quando o $\det(\lambda I - A) = 0$ é expandido, resulta em um polinômio $p(\lambda)$ de grau n , chamado **polinômio característico** de A .

Exemplo :

O polinômio característico de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ é $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

Autovetores e Autovalores

Procedimento para encontrar autovalores e autovetores

Quando o $\det(\lambda I - A) = 0$ é expandido, resulta em um polinômio $p(\lambda)$ de grau n , chamado **polinômio característico** de A .

Exemplo :

O polinômio característico de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ é $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

Como um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas, segue que a equação característica tem, no máximo, n soluções distintas e, conseqüentemente, que uma matriz $n \times n$ tem, no máximo, n autovalores distintos.

Autovetores e Autovalores

Procedimento para encontrar autovalores e autovetores

Quando o $\det(\lambda I - A) = 0$ é expandido, resulta em um polinômio $p(\lambda)$ de grau n , chamado **polinômio característico** de A .

Exemplo :

O polinômio característico de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ é $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

Como um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas, segue que a equação característica tem, no máximo, n soluções distintas e, conseqüentemente, que uma matriz $n \times n$ tem, no máximo, n autovalores distintos. Como algumas dessas soluções podem ser números complexos, é possível que uma matriz tenha autovalores complexos, mesmo se a própria matriz tiver entradas reais.

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

Encontre os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

Encontre os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

R. : Calculando $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda [(\lambda)(\lambda - 8) + 17] - 4 = 0 \implies$$

$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$. Pelas relações de Girard, achamos $\lambda = 4$ uma solução inteira. Aplicando Briot-Ruffini, o polinômio fica $(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$. Resolvendo a quadrática, obtemos

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

Encontre os autovalores da matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

R. : Temos

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

e esse determinante é o produto das entradas da diagonal principal. Logo, o polinômio característico fica

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0.$$

As raízes desse polinômio são os próprios elementos da diagonal.

Teorema

Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A .

Autovetores e Autovalores

Teorema

Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A .

Exemplo :

Obter os autovalores de $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Autovetores e Autovalores

Teorema

Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A .

Exemplo :

Obter os autovalores de $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

R. : Pelo teorema acima, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$

Autovetores e Autovalores

Teorema

Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A .

Teorema

Se A for uma matriz $n \times n$, são equivalentes as afirmações seguintes.

- λ é um autovalor de A
- O sistema $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ de equações tem soluções não triviais.
- Existe algum vetor não nulo \mathbf{x} tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
- λ é uma solução da equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$

Autovetores e Autovalores

Autoespaço associado

Sabendo encontrar os autovalores, precisamos encontrar os autovetores associados. Como os autovetores associados a um autovalor λ de uma matriz A são os vetores não nulos que satisfazem a equação $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ esses autovetores são os vetores não nulos do espaço nulo da matriz $(\lambda I - A)$. Dizemos que esse espaço nulo é o autoespaço de A associado a λ .

Autovetores e Autovalores

Autoespaço associado

Sabendo encontrar os autovalores, precisamos encontrar os autovetores associados. Como os autovetores associados a um autovalor λ de uma matriz A são os vetores não nulos que satisfazem a equação $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ esses autovetores são os vetores não nulos do espaço nulo da matriz $(\lambda I - A)$. Dizemos que esse espaço nulo é o autoespaço de A associado a λ .

Enunciado de outra forma,

O autoespaço de A associado ao autovalor λ é o espaço solução do sistema homogêneo

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0.$$

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

Encontre bases dos autoespaços da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

Encontre bases dos autoespaços da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

R. : Como temos dois autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ associados, teremos dois autoespaços: Um para cada autovalor. Para $\lambda_1 = 3$:

$$(3I - A)\mathbf{x} = 0 \implies \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies -8x_1 + 4x_2 = 0 \implies x_1 = tx_2 = 2t.$$

Assim, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é o autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

Encontre bases dos autoespaços da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

R. : Como temos dois autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ associados, teremos dois autoespaços: Um para cada autovalor. Para $\lambda_2 = -1$:

$$(-I - A)\mathbf{x} = 0 \implies \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -4x_1 = 0 \\ -8x_1 = 0 \end{cases} \implies x_1 = 0, x_2 = t.$$

Assim, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é o autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = -1$.

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

Encontre as bases dos autoespaços associados a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

$$\begin{aligned} \mathbf{R.}: \det(\lambda I - A) = 0 &\implies \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0. \text{ Expandindo por cofatores pela 2a coluna,} \\ (\lambda - 2)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 &\implies (\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 3) + 2] = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \implies \\ \implies (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0. &\text{ Os autovalores s\~{a}o } \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = \lambda_3 = 2. \end{aligned}$$

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

R.: Para $\lambda = 1$,

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1-2 & -1 \\ -1 & 0 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Autovetores e Autovalores

Exemplo :

R.: Para $\lambda = 2$,

$$(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2-2 & -1 \\ -1 & 0 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x_1 + x_3 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Autovetores e Autovalores

Multiplicidades

Este exemplo apresenta uma situação interessante. Temos um autovalor $\lambda = 2$ que se repete. Isso nos leva às seguintes definições:

Definição

Se λ_0 é um autovalor de A chamamos:

Multiplicidade algébrica de λ_0 (MA) a quantidade de vezes que o fator $\lambda - \lambda_0$ aparece na fatoração do polinômio característico, e;

Multiplicidade geométrica de λ_0 (MG) a dimensão do autoespaço associado ao autovalor λ_0 .

Autovetores e Autovalores

Multiplicidades

Este exemplo apresenta uma situação interessante. Temos um autovalor $\lambda = 2$ que se repete. Isso nos leva às seguintes definições:

Definição

Se λ_0 é um autovalor de A chamamos:

Multiplicidade algébrica de λ_0 (MA) a quantidade de vezes que o fator $\lambda - \lambda_0$ aparece na fatoração do polinômio característico, e;

Multiplicidade geométrica de λ_0 (MG) a dimensão do autoespaço associado ao autovalor λ_0 .

Teorema

Dado qualquer autovalor de A , a multiplicidade geométrica sempre será menor do que ou igual à multiplicidade algébrica.

$$MG \leq MA$$

Autovetores e Autovalores

Potências de Matriz

Teorema

Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e \mathbf{x} um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e \mathbf{x} é um autovetor associado.

Autovetores e Autovalores

Potências de Matriz

Teorema

Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e \mathbf{x} um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e \mathbf{x} é um autovetor associado.

Exemplo :

Obtenha os autovalores de A^7 sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Autovetores e Autovalores

Potências de Matriz

Teorema

Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e \mathbf{x} um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e \mathbf{x} é um autovetor associado.

Exemplo :

Obtenha os autovalores de A^7 sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

R.: Pelo teorema, como $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ são autovalores de A , então $1^7 = 1$ e $2^7 = 128$ são autovalores de A^7 .

Autovetores e Autovalores

Potências de Matriz

Teorema

Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e \mathbf{x} um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e \mathbf{x} é um autovetor associado.

Teorema

Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\lambda = 0$ não é um autovalor de A .

Autovetores e Autovalores

Potências de Matriz

Teorema

Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e \mathbf{x} um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e \mathbf{x} é um autovetor associado.

Teorema

Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\lambda = 0$ não é um autovalor de A .

Isso se dá pois A invertível equivale a $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(0 \cdot I - A) \neq 0$ que significa que 0 não é autovalor de A .

Em outras palavras, 0 é autovalor de A equivale a $\det(0I - A) = 0$, que é o mesmo que $\det(A) = 0$ o que equivale a A ser não invertível.

Diagonalização

Problemas

Problema 1: Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existe alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Problema 2: Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existem n autovetores de A linearmente independentes?

Diagonalização

Problemas

Problema 1: Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existe alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Problema 2: Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existem n autovetores de A linearmente independentes?

Definição

Se A e B forem matrizes quadradas, dizemos que B é **semelhante** a A se existir alguma matriz invertível P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Diagonalização

Invariantes

Algumas propriedades se mantêm entre matrizes semelhantes. Estas são chamadas de **invariantes**, sendo os mais importantes listados a seguir:

| Propriedade | Descrição |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Determinante | A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo determinante. |
| Invertibilidade | A é invertível se, e só se, $P^{-1}AP$ é invertível. |
| Posto | A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo posto. |
| Nulidade | A e $P^{-1}AP$ têm a mesma nulidade. |
| Traço | A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo traço. |
| Polinomio característico | A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinomio característico. |
| Autovalores | A e $P^{-1}AP$ têm os mesmos autovalores. |
| Dimensão de autoespaço | Se λ for um autovalor de A e, portanto, de $P^{-1}AP$, então o autoespaço de A associado a λ e o autoespaço de $P^{-1}AP$ associado a λ têm a mesma dimensão |

Diagonalização

Definição

Uma matriz quadrada A é dita **diagonalizável** se for semelhante a alguma matriz diagonal, ou seja, se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Nesse caso, dizemos que a matriz P **diagonaliza** A .

Diagonalização

Definição

Uma matriz quadrada A é dita **diagonalizável** se for semelhante a alguma matriz diagonal, ou seja, se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Nesse caso, dizemos que a matriz P **diagonaliza** A .

Temos um resultado bastante útil:

Teorema

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ forem autovetores de uma matriz A associados a autovalores distintos, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto linearmente independente.

Diagonalização

Definição

Uma matriz quadrada A é dita **diagonalizável** se for semelhante a alguma matriz diagonal, ou seja, se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Nesse caso, dizemos que a matriz P **diagonaliza** A .

Temos um resultado bastante útil:

Teorema

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ forem autovetores de uma matriz A associados a autovalores distintos, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto linearmente independente.

Usando as terminologias de diagonalização e semelhança, podemos interpretar os dois problemas iniciais como um mesmo problema com o seguinte teorema:

Teorema

Se A for uma matriz $n \times n$, são equivalentes as afirmações seguintes.

- A é diagonalizável.
- A tem n autovetores linearmente independentes.

Como consequência deste último teorema, temos ainda mais alguns resultados importantes:

Teorema

Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Teorema

A é diagonalizável se, e somente se, a multiplicidade algébrica de cada autovalor for **igual** a sua multiplicidade geométrica.

Diagonalização

Procedimento para diagonalização de uma matriz

Procedimento para diagonalização de uma matriz

Passo 1. Confirme que a matriz é realmente diagonalizável encontrando n autovetores linearmente independentes. Uma maneira de fazer isso é encontrar uma base de cada autoespaço e juntar todos esses vetores num único conjunto S . Se esse conjunto tiver menos do que n elementos, a matriz não é diagonalizável.

Passo 2. Forme a matriz $P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$ que tem os vetores de S como vetores coluna.

Passo 3. A matriz $P^{-1}AP$ será diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ correspondentes aos autovetores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ como entradas diagonais sucessivas.

Diagonalização

Exemplo :

$$\text{Diagonalizar } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

Exemplo :

Diagonalizar $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **R.:** Já vimos que, $\lambda = 1$ tem autoespaço associado $S = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

e $\lambda = 2$ tem $S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Como ambos os autovalores tem $MA = MG$, já temos que ela é

diagonalizável. $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculando a inversa, obtemos $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o

produto

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

Diagonalização de matrizes triangulares

Exemplo :

$$\text{Diagonalizar } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalização

Diagonalização de matrizes triangulares

Exemplo :

Diagonalizar $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **R. :** Já vimos que os autovalores da matriz triangular são as entradas

da diagonal principal. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ e $\lambda_4 = -2$. Calculando os autovetores, obtemos a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 242 \\ 0 & 2 & 3 & -41 \\ 0 & 0 & 6 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} \text{ cuja inversa fica } P^{-1} = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 420 & -210 & -245 & -3430 \\ 0 & 210 & -105 & 126 \\ 0 & 0 & 70 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

Calculando potências de uma matriz

Teorema

Se A é diagonalizável, k um natural e $D = P^{-1}AP$, temos que

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Diagonalização

Calculando potências de uma matriz

Teorema

Se A é diagonalizável, k um natural e $D = P^{-1}AP$, temos que

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Exemplo :

Usando o teorema acima, calcular A^{13} para $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Diagonalização

Calculando potências de uma matriz

Teorema

Se A é diagonalizável, k um natural e $D = P^{-1}AP$, temos que

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Exemplo :

R. : A matriz que diagonaliza A é $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Logo

$$A^{13} = PD^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix}$$

Teorema das Afirmações Equivalentes

Se A for uma matriz quadrada $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) A é invertível.
- (b) $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n .
- (d) A pode ser expressa como produto de matrizes elementares.
- (e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}_{n \times 1}$.
- (f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada $\mathbf{b}_{n \times 1}$.
- (g) $\det(A) \neq 0$.
- (h) Os vetores coluna de A são LI.
- (i) Os vetores linha de A são LI.
- (j) Os vetores coluna de A geram \mathbb{R}^n .

Teorema das Afirmações Equivalentes

- (k) Os vetores linha de A geram \mathbb{R}^n .
- (l) Os vetores coluna de A formam uma base de \mathbb{R}^n .
- (m) Os vetores linha de A formam uma base de \mathbb{R}^n .
- (n) A tem posto n .
- (o) A tem nulidade 0.
- (p) $\lambda = 0$ não é um autovalor de A .

Bons Estudos!!!