

Espaços com Produto Interno

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.^o Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons “Atribuição-Compartilhagual 4.0 Internacional”.



Produtos Internos

Produtos Internos

Definição

Já vimos um produto interno entre vetores, o produto escalar. Agora veremos características de distintas operações que podem ser classificadas como produtos internos, generalizando o produto interno para distintos espaços.

Produtos Internos

Definição

Já vimos um produto interno entre vetores, o produto escalar. Agora veremos características de distintas operações que podem ser classificadas como produtos internos, generalizando o produto interno para distintos espaços.

Definição

Um **produto interno** num espaço vetorial real V é uma função que associa um número real $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ a cada par de vetores em V de tal maneira que são atendidos os seguintes axiomas, com quaisquer \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} de V e a escalar:

$$1) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

Axioma de Simetria

$$2) \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

Axioma de Aditividade

$$3) \langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Axioma de Homogeneidade

$$4) \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \text{ e } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Axioma de Positividade

Um espaço vetorial real com produto interno é chamado **espaço com produto interno real**.

Produtos Internos

Definição

Exemplo :

O produto escalar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

atende aos quatro axiomas.

Este produto costuma ser denominado **produto interno euclidiano** ou **produto interno canônico** em \mathbb{R}^n .

Produtos Internos

Norma

Os produtos internos permitem a definição de normas.

Definição

Se V for um espaço com produto interno real, então a **norma** (ou **comprimento**) de um vetor \mathbf{v} em V é definida por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

e a **distância** entre dois vetores é denotada por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}.$$

Dizemos que um vetor de norma 1 é um **vetor unitário**.

Teorema

Se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores em um espaço com produto interno real V e k um escalar, então

- a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- b) $\|k\mathbf{v}\| = |k| \|\mathbf{v}\|$
- c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
- d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ e $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$

Produtos Internos

Ponderação

Existem situações em que podemos incluir pesos para cada termo no produto interno euclidiano.

Produto interno euclidiano ponderado

Se w_1, w_2, \dots, w_n forem números reais positivos denominados **pesos** com \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores em \mathbb{R}^n , a fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \dots + w_n u_n v_n$$

define um **produto interno ponderado**.

Produtos Internos

Ponderação

Existem situações em que podemos incluir pesos para cada termo no produto interno euclidiano.

Produto interno euclidiano ponderado

Se w_1, w_2, \dots, w_n forem números reais positivos denominados **pesos** com \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores em \mathbb{R}^n , a fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \dots + w_n u_n v_n$$

define um **produto interno ponderado**.

Exemplo :

Sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, verificar que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

é um produto interno.

Produtos Internos

Ponderação

Exemplo :

R. :

$$1) \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_w = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w$$

Produtos Internos

Ponderação

Exemplo :

R. :

$$1) \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_w = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w$$

$$2) \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle_w = 3(u_1 + v_1)z_1 + 2(u_2 + v_2)z_2 = 3u_1z_1 + 3v_1z_1 + 2u_2z_2 + 2v_2z_2 = \\ 3u_1z_1 + 2u_2z_2 + 3v_1z_1 + 2v_2z_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle_w + \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle_w$$

Produtos Internos

Ponderação

Exemplo :

R. :

$$1) \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_w = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w$$

$$2) \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle_w = 3(u_1 + v_1)z_1 + 2(u_2 + v_2)z_2 = 3u_1z_1 + 3v_1z_1 + 2u_2z_2 + 2v_2z_2 = \\ 3u_1z_1 + 2u_2z_2 + 3v_1z_1 + 2v_2z_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle_w + \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle_w$$

$$3) \langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w = 3(au_1)v_1 + 2(au_2)v_2 = a(3u_1v_1 + 2u_2v_2) = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w$$

Produtos Internos

Ponderação

Exemplo :

R. :

$$1) \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_w = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w$$

$$2) \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle_w = 3(u_1 + v_1)z_1 + 2(u_2 + v_2)z_2 = 3u_1z_1 + 3v_1z_1 + 2u_2z_2 + 2v_2z_2 = \\ 3u_1z_1 + 2u_2z_2 + 3v_1z_1 + 2v_2z_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle_w + \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle_w$$

$$3) \langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w = 3(au_1)v_1 + 2(au_2)v_2 = a(3u_1v_1 + 2u_2v_2) = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w$$

$$4) \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_w = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0 \text{ e } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_w = 0 \Leftrightarrow 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0 \Leftrightarrow 3v_1^2 = -2v_2^2 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Produtos Internos

Ponderação

Importante:

Como a norma é definida por produto interno, se usarmos um produto interno ponderado, a norma também é afetada por esse produto interno.

Produtos Internos

Produto interno Matricial

Produto interno em \mathbb{R}^n gerado por A

Sendo A $n \times n$ invertível, \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores de \mathbb{R}^n em forma de coluna, a operação

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A = \mathbf{Au} \cdot \mathbf{Av}$$

define um produto interno em \mathbb{R}^n gerado por A .

Como o produto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} colunas significa $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$, podemos reescrever

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A = \mathbf{Au} \cdot \mathbf{Av} = (\mathbf{Au})^T \mathbf{Av} = \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Av}$$

Produtos Internos

Produto interno Matricial

Exemplo :

Avalie o produto gerado pela matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Produtos Internos

Produto interno Matricial

Exemplo :

Avalie o produto gerado pela matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

R. : Calculando $A^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Dados $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, temos

$$\mathbf{u}^T A^T A \mathbf{v} = [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

o produto interno ponderado que vimos anteriormente.

Produtos Internos

Produto interno Matricial

Exemplo :

Se U e V forem matrizes $n \times n$ a fórmula $\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V)$ define um produto interno no espaço vetorial de matrizes M_{nn} .

Por exemplo, tomando $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ temos

$$U^T V = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 + u_3 v_3 & u_1 v_2 + u_3 v_4 \\ u_2 v_1 + u_4 v_3 & u_2 v_2 + u_4 v_4 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\text{tr}(U^T V) = u_1 v_1 + u_3 v_3 + u_2 v_2 + u_4 v_4$$

Produtos Internos

Produto interno em outros espaços

Exemplo :

Para o espaço de polinômios, sendo

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \text{ e } \mathbf{q} = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

o **produto interno canônico** desse espaço é

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

Produtos Internos

Produto interno em outros espaços

Exemplo :

Para o espaço de funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sendo $\mathbf{f} = f(x)$ e $\mathbf{g} = g(x)$ podemos definir

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Nesse caso,

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

Teorema

Se \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} forem vetores em um espaço com produto interno real V e k escalar, então

a) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$

b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

d) $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

e) $k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle$

Ângulos e Ortogonalidade

Ângulos e Ortogonalidade

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Vimos, entre vetores de \mathbb{R}^n que o ângulo θ formado entre eles pode ser expresso por

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right)$$

A validade dessa fórmula vem da desigualdade abaixo

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores em um espaço com produto interno real V , então

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Ângulos e Ortogonalidade

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Usando as definições de produto interno e norma para um espaço vetorial com produto interno, a desigualdade é válida e podemos definir

Definição

Sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores de um espaço vetorial com produto interno V , o **ângulo** (em radianos) entre \mathbf{u} e \mathbf{v} é dado por

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right)$$

Ângulos e Ortogonalidade

Propriedades

Teorema

Se \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} forem vetores em um espaço com produto interno real, então

a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Desigualdade triangular de vetores)

b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (Desigualdade triangular de distâncias)

Ângulos e Ortogonalidade

Ortogonalidade

Definição

Dizemos que dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} de um espaço com produto interno são **ortogonais** se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

Ângulos e Ortogonalidade

Ortogonalidade

Definição

Dizemos que dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} de um espaço com produto interno são **ortogonais** se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

Importante:

A ortogonalidade depende do produto interno que está sendo utilizado!

Sendo $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1)$, para o produto interno canônico,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0$$

Porém, com o produto ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ eles não são, pois

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_w = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

Ângulos e Ortogonalidade

Ortogonalidade

Exemplo :

Verificar o ângulo entre as matrizes $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ângulos e Ortogonalidade

Ortogonalidade

Exemplo :

Verificar o ângulo entre as matrizes $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

R. : Usamos $\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V)$. $U^T V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo $\text{tr}(U^T V) = 0 + 0 = 0$. As matrizes são ortogonais.

Teorema de Pitágoras Generalizado

Se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores ortogonais em um espaço com produto interno, então

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Ângulos e Ortogonalidade

Complemento Ortogonal

Definição

Se W for um subespaço de um espaço com produto interno V , então o conjunto de todos os vetores de V ortogonais a cada vetor de W é denominado **complemento ortogonal** de W e denotado por W^\perp

Ângulos e Ortogonalidade

Complemento Ortogonal

Definição

Se W for um subespaço de um espaço com produto interno V , então o conjunto de todos os vetores de V ortogonais a cada vetor de W é denominado **complemento ortogonal** de W e denotado por W^\perp

Teorema

Se W um subespaço de um espaço com produto interno V , então

- W^\perp também é um subespaço de V .
- O único vetor comum a W e W^\perp é $\mathbf{0}$, ou seja $W \cap W^\perp = \mathbf{0}$.
- O complemento ortogonal de W^\perp é W .

Ângulos e Ortogonalidade

Complemento Ortogonal

Alguns espaços que são complementos ortogonais

Se A for uma matriz $m \times n$

- a) O espaço nulo de A e o espaço linha de A são complementos ortogonais em \mathbb{R}^n
- b) O espaço nulo de A^T e o espaço coluna de A são complementos ortogonais em \mathbb{R}^m

Ângulos e Ortogonalidade

Complemento Ortogonal

Exemplo :

Encontrar uma base do complemento ortogonal do espaço W gerado pelos vetores

$$\mathbf{w}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0)$$

$$\mathbf{w}_2 = (2, 6, -5, -2, 4, -3)$$

$$\mathbf{w}_3 = (0, 0, 5, 10, 0, 15)$$

$$\mathbf{w}_4 = (2, 6, 0, 8, 4, 18)$$

Ângulos e Ortogonalidade

Complemento Ortogonal

Exemplo :

R. : O espaço W é o espaço linha da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$. Como o espaço nulo de A é

complemento ortogonal desse espaço linha, buscamos $Ax = \mathbf{0}$. Escalonando,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{array} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 6L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4 \\ \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4}{6} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

Ângulos e Ortogonalidade

Complemento Ortogonal

Exemplo :

R. : O espaço W é o espaço linha da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$. Como o espaço nulo de A é complemento ortogonal desse espaço linha, buscamos $Ax = \mathbf{0}$. Tiramos disso que

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Teorema das Afirmações Equivalentes

Se A for uma matriz quadrada $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) A é invertível.
- (b) $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n .
- (d) A pode ser expressa como produto de matrizes elementares.
- (e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}_{n \times 1}$.
- (f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada $\mathbf{b}_{n \times 1}$.
- (g) $\det(A) \neq 0$.
- (h) Os vetores coluna de A são LI.
- (i) Os vetores linha de A são LI.
- (j) Os vetores coluna de A geram \mathbb{R}^n .

Teorema das Afirmações Equivalentes

- (k) Os vetores linha de A geram \mathbb{R}^n .
- (l) Os vetores coluna de A formam uma base de \mathbb{R}^n .
- (m) Os vetores linha de A formam uma base de \mathbb{R}^n .
- (n) A tem posto n .
- (o) A tem nulidade 0.
- (p) $\lambda = 0$ não é um autovalor de A .
- (q) O complemento ortogonal do espaço nulo de A é \mathbb{R}^n .
- (r) O complemento ortogonal do espaço linha de A é $\mathbf{0}$.

Conjuntos Ortonormais

Conjuntos Ortonormais

Definição

Dizemos que um conjunto de dois ou mais vetores num espaço com produto interno real é **ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto forem ortogonais. Se cada vetor desse conjunto tiver norma 1, ele é dito **ortonormal**.

Conjuntos Ortonormais

Definição

Dizemos que um conjunto de dois ou mais vetores num espaço com produto interno real é **ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto forem ortogonais. Se cada vetor desse conjunto tiver norma 1, ele é dito **ortonormal**.

Exemplo :

Com o produto interno euclidiano de \mathbb{R}^3 , $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ temos que

$$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$$

é um conjunto ortogonal.

Conjuntos Ortonormais

Ao multiplicar um vetor \mathbf{v} por $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}$, obtemos um vetor unitário. Esse processo é denominado **normalização** de um vetor. Assim, um conjunto ortogonal pode ser convertido em ortonormal!

Exemplo :

Como $\|\mathbf{u}_1\| = 1$, $\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}$ e $\|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{2}$ podemos normalizar S .

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|} \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|} \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Conjuntos Ortonormais

Teorema

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço vetorial com produto interno, então S é LI.

Conjuntos Ortonormais

Teorema

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço vetorial com produto interno, então S é LI.

Com esse resultado, temos que um conjunto ortonormal de k vetores em um espaço V é **base** de um subespaço de V com dimensão k .

Exemplo :

O conjunto $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

Conjuntos Ortonormais

Por formar uma base, podemos estabelecer coordenadas de um vetor \mathbf{u} em relação à $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Teorema

- a) Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base **ortogonal** de um espaço com produto interno V e \mathbf{u} um vetor qualquer de V , então

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \mathbf{v}_n$$

- b) Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base **ortonormal** de um espaço com produto interno V e \mathbf{u} um vetor qualquer de V , então

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Conjuntos Ortonormais

Exemplo :

Escrever as coordenadas de $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ em relação à base $S = [(0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})]$

Conjuntos Ortonormais

Exemplo :

Escrever as coordenadas de $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ em relação à base $S = [(0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})]$

R. : Fazendo os produtos internos:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = 1 \cdot \left(\frac{-4}{5}\right) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = 1 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

Portanto

$$(\mathbf{u})_S = \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

Conjuntos Ortonormais

Teorema da Projeção

Teorema da Projeção

Se W for um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V , então, cada vetor \mathbf{u} de V pode ser expresso de maneira única como

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

em que \mathbf{w}_1 é um vetor em W e \mathbf{w}_2 é um vetor em W^\perp .

Esses vetores são chamados de **projeção ortogonal de \mathbf{u} em W** e **projeção ortogonal de \mathbf{u} em W^\perp** e costumam ser denotados por

$$\mathbf{w}_1 = \text{proj}_W \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_2 = \text{proj}_{W^\perp} \mathbf{u}$$

Conjuntos Ortonormais

Teorema da Projeção

Teorema

Seja W um subespaço de dimensão finita de em espaço com produto interno V

a) Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base **ortogonal** de W e \mathbf{u} um vetor qualquer, então

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \mathbf{v}_n$$

b) Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base **ortonormal** de W e \mathbf{u} um vetor qualquer, então

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Ou seja, escrever \mathbf{u} em coordenadas da base S é encontrar a projeção ortogonal de \mathbf{u} em W , espaço para o qual S é base.

Processo de Gram-Schmidt

Teorema

Cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita tem alguma base ortonormal. O algoritmo para encontrar essa base é chamado de **Processo de Gram-Schmidt**.

Teorema

Cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita tem alguma base ortonormal. O algoritmo para encontrar essa base é chamado de **Processo de Gram-Schmidt**.

Seja $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ uma base de um espaço W . A partir desta base, vamos produzir uma base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ ortogonal (que, para se tornar ortonormal depois, basta normalizar os vetores).

Processo de Gram-Schmidt

Processo de Gram-Schmidt

Passo 1: Tomamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

Processo de Gram-Schmidt

Processo de Gram-Schmidt

Passo 1: Tomamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

Passo 2: O vetor \mathbf{v}_2 será a componente de \mathbf{u}_2 ortogonal ao espaço W_1 gerado por \mathbf{v}_1 .

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1$$

Processo de Gram-Schmidt

Processo de Gram-Schmidt

Passo 1: Tomamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

Passo 2: O vetor \mathbf{v}_2 será a componente de \mathbf{u}_2 ortogonal ao espaço W_1 gerado por \mathbf{v}_1 .

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1$$

Passo 3: O vetor \mathbf{v}_3 será a componente de \mathbf{u}_3 ortogonal ao espaço W_2 gerado por \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2$$

Processo de Gram-Schmidt

Processo de Gram-Schmidt

Passo 1: Tomamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

Passo 2: O vetor \mathbf{v}_2 será a componente de \mathbf{u}_2 ortogonal ao espaço W_1 gerado por \mathbf{v}_1 .

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1$$

Passo 3: O vetor \mathbf{v}_3 será a componente de \mathbf{u}_3 ortogonal ao espaço W_2 gerado por \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2$$

Próximos passos: O vetor \mathbf{v}_k será a componente de \mathbf{u}_k ortogonal ao espaço W_{k-1} gerado pelos vetores já obtidos.

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k-1} \rangle}{\|\mathbf{v}_{k-1}\|^2} \mathbf{v}_{k-1}$$

Processo de Gram-Schmidt

Note-se que, se a cada passo o vetor for normalizado, já obtemos uma base **ortonormal** e simplificamos um pouco as fórmulas.

Processo de Gram-Schmidt com normalização

Passo 1: Tomamos $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1$.

Passo 2: O vetor \mathbf{v}_2 será a componente de \mathbf{u}_2 ortogonal ao espaço W_1 gerado por \mathbf{v}_1 .

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1. \text{ Normalize } \mathbf{v}_2.$$

Passo 3: O vetor \mathbf{v}_3 será a componente de \mathbf{u}_3 ortogonal ao espaço W_2 gerado por \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2. \text{ Normalize } \mathbf{v}_3.$$

Próximos passos: O vetor \mathbf{v}_k será a componente de \mathbf{u}_k ortogonal ao espaço W_{k-1} gerado pelos vetores já obtidos.

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \cdots - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k-1} \rangle \mathbf{v}_{k-1}. \text{ Normalize } \mathbf{v}_k.$$

O conjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ é uma base ortonormal de W .

Processo de Gram-Schmidt

Exemplo :

Aplicar o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal a partir de

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$$

Processo de Gram-Schmidt

Exemplo :

Aplicar o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal a partir de

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$$

R. : Vamos fazer a normalização dentro dos passos.

$$\text{Passo 1: } \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} (1, 1, 1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Passo 2: } \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = (0, 1, 1) - \left\langle (0, 1, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = (0, 1, 1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \text{ Normalizando } \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Passo 3: } \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= (0, 0, 1) - \left\langle (0, 0, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \left\langle (0, 0, 1), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right\rangle \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \\ &= (0, 0, 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \frac{\sqrt{6}}{6} \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) = (0, 0, 1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \\ \text{Normalizando } \mathbf{v}_3 &= \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \end{aligned}$$

Decomposição QR

Problema

Se A for uma matriz $n \times n$ com vetores colunas LI e Q matriz formada pelo resultado da aplicação de Gram-Schmidt nas colunas de A . Há alguma relação entre A e Q ?

Decomposição QR

Problema

Se A for uma matriz $n \times n$ com vetores colunas \mathbf{u}_i e Q matriz formada pelo resultado da aplicação de Gram-Schmidt nas colunas de A . Há alguma relação entre A e Q ?

Sejam $A = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ e $Q = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n]$. Podemos escrever os vetores \mathbf{u}_k como combinação dos vetores de Q .

$$\mathbf{u}_1 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n$$

$$\mathbf{u}_2 = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n$$

\vdots

$$\mathbf{u}_n = \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n$$

Decomposição QR

Problema

Se A for uma matriz $n \times n$ com vetores colunas LI e Q matriz formada pelo resultado da aplicação de Gram-Schmidt nas colunas de A . Há alguma relação entre A e Q ?

Sejam $A = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ e $Q = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n]$. Estas equações podem ser reescritas matricialmente

$$\underbrace{[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]}_A = \underbrace{[\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n]}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix}}_R$$

Decomposição QR

Problema

Se A for uma matriz $n \times n$ com vetores colunas LI e Q matriz formada pelo resultado da aplicação de Gram-Schmidt nas colunas de A . Há alguma relação entre A e Q ?

Sejam $A = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ e $Q = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n]$. Pelo próprio processo de Gram-Schmidt, o vetor \mathbf{q}_j para $j \geq 2$ é ortogonal a todos os vetores \mathbf{u}_i com $i < j$. Logo, todas as entradas abaixo da diagonal de R são nulas.

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Teorema

Se A é uma matriz $m \times n$ com vetores coluna linearmente independentes, então A pode ser fatorada como

$$A = QR$$

onde Q é uma matriz $m \times n$ com vetores coluna ortonormais e R é uma matriz $n \times n$ triangular superior invertível.

Teorema

Se A é uma matriz $m \times n$ com vetores coluna linearmente independentes, então A pode ser fatorada como

$$A = QR$$

onde Q é uma matriz $m \times n$ com vetores coluna ortonormais e R é uma matriz $n \times n$ triangular superior invertível.

Teorema

Uma matriz Q $m \times n$ formada por colunas ortonormais, temos que $QQ^T = I_m$ e $Q^T Q = I_n$. Se for quadrada será invertível e será dita **matriz ortogonal** pois $Q^{-1} = Q^T$.

Decomposição QR

Exemplo :

Encontrar a decomposição de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Decomposição QR

Exemplo :

Encontrar a decomposição de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ R. : Já fizemos a base ortonormal gerada das colunas de A,

obtendo $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$. Da fórmula de $R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$

Teorema das Afirmações Equivalentes

Se A for uma matriz quadrada $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) A é invertível.
- (b) $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n .
- (d) A pode ser expressa como produto de matrizes elementares.
- (e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}_{n \times 1}$.
- (f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada $\mathbf{b}_{n \times 1}$.
- (g) $\det(A) \neq 0$.
- (h) Os vetores coluna de A são LI.
- (i) Os vetores linha de A são LI.
- (j) Os vetores coluna de A geram \mathbb{R}^n .

Teorema das Afirmações Equivalentes

- (k) Os vetores linha de A geram \mathbb{R}^n .
- (l) Os vetores coluna de A formam uma base de \mathbb{R}^n .
- (m) Os vetores linha de A formam uma base de \mathbb{R}^n .
- (n) A tem posto n .
- (o) A tem nulidade 0.
- (p) $\lambda = 0$ não é um autovalor de A .
- (q) O complemento ortogonal do espaço nulo de A é \mathbb{R}^n .
- (r) O complemento ortogonal do espaço linha de A é $\mathbf{0}$.
- (s) A tem uma fatoração QR .

Bons Estudos!!!