

Diagonalização e formas quadráticas

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.^o Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons “Atribuição-Compartilhalgual 4.0 Internacional”.



Matrizes Ortogonais

Matrizes Ortogonais

Vimos na aula anterior sobre matrizes ortogonais. Vamos retomar

Definição

Uma matriz é dita **ortogonal** se sua transposta for sua inversa, ou seja

$$A^{-1} = A^T \text{ ou ainda } A^T A = AA^T = I$$

Exemplo :

A matriz $A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ é ortogonal pois

$$A^T A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix} = I$$

Exemplo :

A matriz de rotação anti-horária em \mathbb{R}^2 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ é ortogonal pois

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta & (-\sin \theta)^2 + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

Teorema

Seja A matriz $n \times n$ são equivalentes as seguintes afirmações:

- a) A é ortogonal
- b) Os vetores linha de A formam um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^n em relação ao produto interno euclidiano.
- c) Os vetores coluna de A formam um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^n em relação ao produto interno euclidiano.

Teorema

Seja A matriz $n \times n$ são equivalentes as seguintes afirmações:

- A é ortogonal
- Os vetores linha de A formam um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^n em relação ao produto interno euclidiano.
- Os vetores coluna de A formam um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^n em relação ao produto interno euclidiano.

Temos ainda que

- A inversa de uma ortogonal é ortogonal
- Um produto de matrizes ortogonais é ortogonal
- O determinante de uma matriz ortogonal vale 1 ou -1 .

Matrizes Ortogonais

Exemplo :

Verificar se $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ é ortogonal e calcule o determinante.

Matrizes Ortogonais

Exemplo :

Verificar se $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ é ortogonal e calcule o determinante. As colunas de A formam um conjunto ortonormal. Logo, A é ortogonal.

Calculando o determinante: $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Teorema

Seja A matriz $n \times n$ são equivalentes as seguintes afirmações:

- a) A é ortogonal
- b) $\|Ax\| = \|x\|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$
- c) $Ax \cdot Ay = x \cdot y$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Matrizes Ortogonais

Bases ortonormais

As bases ortonormais de espaços com produto interno são convenientes, pois muitas fórmulas que já usamos são válidas nessas bases.

Teorema

Se S for uma base ortonormal de um espaço com produto interno V de dimensão n e

$$[\mathbf{u}]_S = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{e} \quad [\mathbf{v}]_S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

então

$$\text{a) } \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

$$\text{b) } d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

$$\text{c) } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Matrizes Ortogonais

Bases ortonormais

Teorema

Se V é um espaço com produto interno de dimensão finita. Se P for matriz de transição de uma base ortonormal de V para outra base ortonormal de V , então P é ortogonal.

Diagonalização Ortogonal

Definição

Sejam A e B duas matrizes quadradas. Dizemos que A e B são **ortogonalmente semelhantes** se existir uma matriz ortogonal P tal que $P^T A P = B$.

Se A for ortogonalmente semelhante a uma matriz diagonal D , dizemos que A é **ortogonalmente diagonalizável**.

Diagonalização Ortogonal

Exemplo :

$$\text{Diagonalizar } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonalização Ortogonal

Exemplo :

$$\text{Diagonalizar } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R.}: \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ \lambda - 4 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda - 4)[(\lambda - 4)(\lambda - 4) - 4] - (-2)[-2(\lambda - 4) - 4] + (-2)[4 - (-2(\lambda - 4))] = \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 4 + 2)(\lambda - 4 - 2) + 2(-2\lambda + 4) - 2(-4 + 2\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 6) - 8(\lambda - 2) = \\ &= (\lambda - 2)[(\lambda - 4)(\lambda - 6) - 8] = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 24 - 8) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8\lambda + 16) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8). \end{aligned}$$

São autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 8$

Diagonalização Ortogonal

Exemplo :

$$\text{Diagonalizar } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

R.: Para $\lambda = 2$,

$$(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \{x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3\}$$

$$\therefore N(2I - A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Diagonalização Ortogonal

Exemplo :

$$\text{Diagonalizar } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

R. : Aplicando Gram-Schmidt a estes vetores:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(-1, 1, 0)\|} (-1, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (-1, 0, 1) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right). \text{ Normalizando}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Diagonalização Ortogonal

Exemplo :

$$\text{Diagonalizar } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R. :} \quad \text{Para } \lambda = 8, (8I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \therefore N(8I - A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \text{ Normalizando, } \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Diagonalização Ortogonal

Exemplo :

$$\text{Diagonalizar } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

R. : Usando os vetores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 como colunas de P , temos que $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ e

$$P^T A P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Teorema

Para qualquer matriz A quadrada, são equivalentes as seguintes afirmações:

- a) A é ortogonalmente diagonalizável
- b) A tem um conjunto ortonormal de autovetores
- c) A é simétrica

Teorema

Para qualquer matriz A quadrada, são equivalentes as seguintes afirmações:

- a) A é ortogonalmente diagonalizável
- b) A tem um conjunto ortonormal de autovetores
- c) A é simétrica

Temos ainda que, sendo A simétrica

- a) Seus autovalores são sempre reais
- b) Autovetores de autoespaços distintos são ortogonais.

Diagonalização Ortogonal

Decomposição Espectral

Seja A matriz simétrica ortogonalmente diagonalizada por $P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalores associados a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ sabemos que $D = P^T A P$. Podemos escrever A como

$$\begin{aligned} A = P D P^T &= [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} = [\lambda_1 \mathbf{u}_1 \ \lambda_2 \mathbf{u}_2 \ \dots \ \lambda_n \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T \end{aligned}$$

que é denominada **Decomposição Espectral de A** .

Diagonalização Ortogonal

Decomposição Espectral

Exemplo :

Fazer a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Diagonalização Ortogonal

Decomposição Espectral

Exemplo :

Fazer a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

R. : Começamos pelos autovalores.

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0.$$

$$\text{Para } \lambda = -3, N(-3I - A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \{2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \end{cases} \Rightarrow N(-3I - A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Diagonalização Ortogonal

Decomposição Espectral

Exemplo :

Fazer a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

R. : Começamos pelos autovalores.

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0.$$

$$\text{Para } \lambda = 2, N(2I - A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \{x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$N(2I - A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Diagonalização Ortogonal

Decomposição Espectral

Exemplo :

Fazer a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

R.: Aplicando Gram-Schmidt na base de autovetores: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{5} \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}. \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 1 = 0 \quad \mathbf{u}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Normalizando, } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Diagonalização Ortogonal

Decomposição Espectral

Exemplo :

Fazer a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

R.: A decomposição espectral fica $A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Até agora vimos formas lineares $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$. Veremos agora formas quadráticas, onde temos produtos de variáveis.

Em \mathbb{R}^2 : $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2$

Em \mathbb{R}^3 : $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3$

Formas Quadráticas

Até agora vimos formas lineares $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$. Veremos agora formas quadráticas, onde temos produtos de variáveis.

$$\text{Em } \mathbb{R}^2: a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2$$

$$\text{Em } \mathbb{R}^3: a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3$$

Podemos reescrever essas expressões de forma matricial:

$$\text{Em } \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

$$\text{Em } \mathbb{R}^3: \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Em ambos os casos, a matriz A é simétrica.

Formas Quadráticas

Exemplo :

Expressar a forma quadrática em notação matricial.

a) $2x^2 + 6xy - 5y^2$

Formas Quadráticas

Exemplo :

Expressar a forma quadrática em notação matricial.

$$a) 2x^2 + 6xy - 5y^2 = [x \quad y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo :

Expressar a forma quadrática em notação matricial.

$$\text{a) } 2x^2 + 6xy - 5y^2 = [x \quad y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

Exemplo :

Expressar a forma quadrática em notação matricial.

$$\text{a) } 2x^2 + 6xy - 5y^2 = [x \quad y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo :

Expressar a forma quadrática em notação matricial.

$$\text{a) } 2x^2 + 6xy - 5y^2 = [x \quad y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$$

Formas Quadráticas

Exemplo :

Expressar a forma quadrática em notação matricial.

$$\text{a) } 2x^2 + 6xy - 5y^2 = [x \quad y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz diagonal não tem termos mistos.

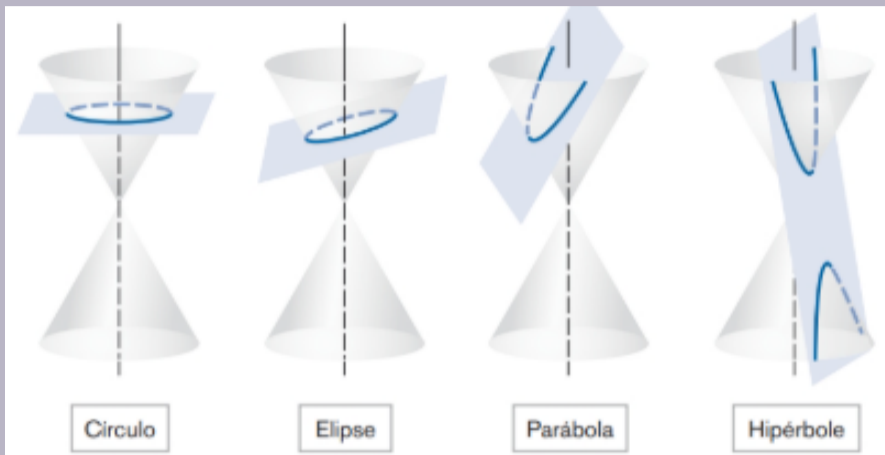
Formas Quadráticas

Se a matriz A for diagonalizável, podemos fazer uma **mudança de variáveis**, nas quais os termos mistos são eliminados. Fazendo $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ com P matriz que diagonaliza ortogonalmente A ,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= (P\mathbf{y})^T A (P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T A P \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2\end{aligned}$$

Formas Quadráticas

Seção Cônica



Formas Quadráticas

Seção Cônica

Uma equação da forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ com a, b, c não todos nulos, representa uma **seção cônica**.

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Uma equação da forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ com a, b, c não todos nulos, representa uma **seção cônica**. Se não tiverem termos lineares ($d = e = 0$), a equação se reduz a $ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$ chamada **cônica central** ou **cônica reduzida**.

Formas Quadráticas

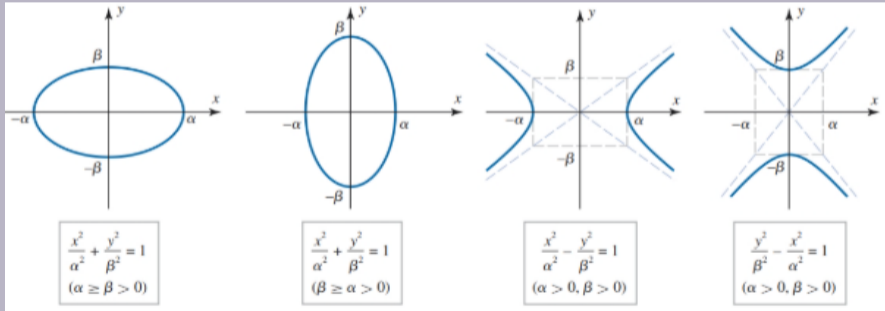
Seção Cônica

Uma equação da forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ com a, b, c não todos nulos, representa uma **seção cônica**. Se não tiverem termos lineares ($d = e = 0$), a equação se reduz a $ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$ chamada **cônica central** ou **cônica reduzida**. Se $b = 0$, não há termos mistos e a equação fica $ax^2 + cy^2 + f = 0$ que representa **cônica central em posição canônica**.

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Uma equação da forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ com a, b, c não todos nulos, representa uma **seção cônica**. Se não tiverem termos lineares ($d = e = 0$), a equação se reduz a $ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$ chamada **cônica central** ou **cônica reduzida**. Se $b = 0$, não há termos mistos e a equação fica $ax^2 + cy^2 + f = 0$ que representa **cônica central em posição canônica**.



Formas Quadráticas

Seção Cônica

Definição

Reescrevendo a cônica de modo matricial, podemos classificar a forma quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é

positiva se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq 0$.

negativa se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq 0$.

indefinida se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos.

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Definição

Reescrevendo a cônica de modo matricial, podemos classificar a forma quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é

positiva se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq 0$.

negativa se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq 0$.

indefinida se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos.

Teorema

Sendo A uma matriz simétrica

- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva se, e só se, todos os autovalores de A são positivos.
- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é negativa se, e só se, todos os autovalores de A são negativos.
- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é indefinida se, e só se, A tem pelo menos um autovalor positivo e pelo menos um autovalor negativo.

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Se temos $\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = k$, com $k \neq 0$, podemos reescrever como $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$ sendo $A = \frac{1}{k} B$. O tipo de cônica dependerá dos sinais dos autovalores.

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Se temos $\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = k$, com $k \neq 0$, podemos reescrever como $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$ sendo $A = \frac{1}{k} B$. O tipo de cônica dependerá dos sinais dos autovalores.

Teorema

Para A 2×2 simétrica, valem as seguintes afirmações:

- a) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$ representa uma **elipse** se A for positiva.
- b) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$ não tem gráfico se A for negativa.
- c) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$ representa uma **hipérbole** se A for indefinida.

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Exemplo :

Esboçar o gráfico de $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Exemplo :

Esboçar o gráfico de $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

R.: Dividindo tudo por 36, reescrevemos $\frac{5}{36}x^2 - \frac{1}{9}xy + \frac{2}{9}y^2 = 1$. A matriz associada é $\begin{bmatrix} 5/36 & -1/18 \\ -1/18 & 2/9 \end{bmatrix}$.

Buscamos os autovalores de A :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5/36 & 1/18 \\ 1/18 & \lambda - 2/9 \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{5}{36})(\lambda - \frac{2}{9}) - \frac{1}{324} = \lambda^2 - \frac{13}{36}\lambda + \frac{1}{36} = (\lambda - \frac{1}{4})(\lambda - \frac{1}{9}) \therefore \lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{9}.$$

Como os autovalores são positivos, temos uma elipse.

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Exemplo :

Esboçar o gráfico de $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

R. : Autovetores de A :

$$N\left(\frac{\lambda}{4} - A\right) = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/18 \\ 1/18 & 1/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \{2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{\lambda}{4} - A\right) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right]$$

Formas Quadráticas

Seção Cônica

Exemplo :

Esboçar o gráfico de $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

R.: Autovetores de A :

$$N\left(\frac{\lambda}{9} - A\right) = \begin{bmatrix} -1/36 & 1/18 \\ 1/18 & -1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \{-x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{\lambda}{9} - A\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Os Autovetores formam um novo eixo de coordenadas (x', y') onde a cônica é reescrita como

$$\frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{9}y'^2 = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

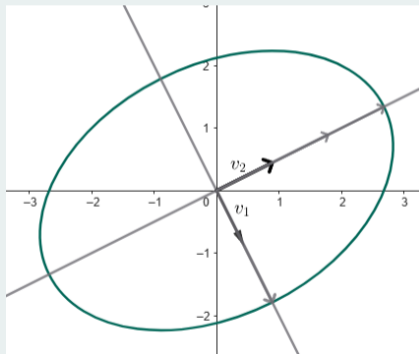
Formas Quadráticas

Seção Cônica

Exemplo :

Esboçar o gráfico de $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

R. :



Bons Estudos!!!