Transformação Linear

JAN003A / BIAES003
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definições

Definições

Recordando:

Uma **função** é uma *regra* que associa a cada elemento de um conjunto A a um, e exatamente um, elemento de um conjunto B. Se a função associa $a \in A$ a $b \in B$ dizemos que $b = f(a)$ e b é **imagem** de a por f ou $f(a)$ é o **valor** de f em a. São importantes os conjuntos

Domínio de f: o conjunto A, onde estão os valores nos quais f é aplicada;

Contradomínio de f: o conjunto B, onde estão os possíveis resultados de f;

Imagem de f: o subconjunto de B com todos os efetivos resultados de f.

Definição

Se V e W forem espaços vetoriais e f uma função de domínio V e contradomínio W, dizemos que f é uma **transformação** de V em W, ou uma **aplicação** de V em W, que denotamos por

$$f : V \to W$$

No caso especial em que $V = W$, também dizemos que uma transformação é um **operador** em V.

Definições

Exemplo :

Supondo f_1, f_2, ..., f_m funções de n variáveis reais com

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Essas m equações associam um ponto $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ único de $\mathbb{R}^m$ a cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e assim estas funções definem uma transformação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ denotada como

$$\begin{array}{rcl} T: \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ T(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & (w_1, w_2, \ldots, w_m) \end{array}$$

Exemplo 2:

Se estas funções forem lineares, podemos escrever

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

e estas equações podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ ou ainda $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$.

Exemplo 2:

Assim, podemos ver a multiplicação à esquerda de $\mathbf{x}$ pela matriz A como uma **transformação matricial** denotada por $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e expressamos a equação matricial como

$$\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x}).$$

A matriz A é chamada **matriz canônica da transformação**.
Uma notação esquemática desta transformação é dada por

$$\mathbf{x} \xrightarrow{T_A} \mathbf{w}.$$

lida como "T_A aplica $\mathbf{x}$ em $\mathbf{w}$".

Exemplo 3:

Uma transformação de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

pode ser expressa em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Teorema

Se duas transformações matriciais $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com $T_A(\mathbf{x}) = T_B(\mathbf{x})$ para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, então $A = B$.

Exemplo 1 - A **transformação nula**:

Se 0 for a matriz nula $m \times n$, então

$$T_0(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

é a transformação que leva qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$ ao vetor nulo de $\mathbb{R}^m$, chamada de **transformação nula** ou **transformação zero** de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 1 - A **transformação nula**:

Se 0 for a matriz nula $m \times n$, então

$$T_0(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

é a transformação que leva qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$ ao vetor nulo de $\mathbb{R}^m$, chamada de **transformação nula** ou **transformação zero** de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 2 - **Operador identidade**:

Sendo I a matriz identidade $n \times n$, então

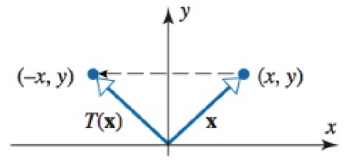
$$T_I(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

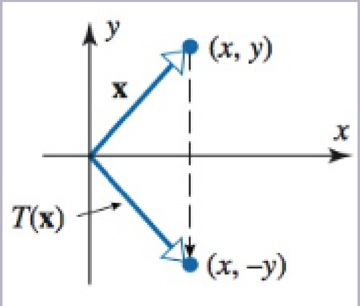
é a transformação que leva cada vetor de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo, chamado de **operador identidade** de $\mathbb{R}^n$.

Procedimento para encontrar a matriz canônica de uma transformação

Passo 1: Encontre as imagens dos vetores $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, ..., $\mathbf{e_n}$ da base canônica de $\mathbb{R}^n$ em modo de coluna.

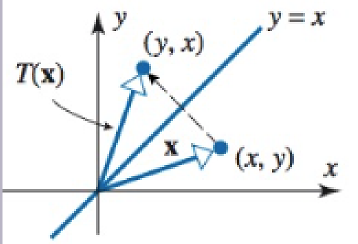
Passo 2: Construa a matriz que tem as imagens obtidas no passo anterior como colunas sucessivas. Esta será a matriz canônica da transformação.

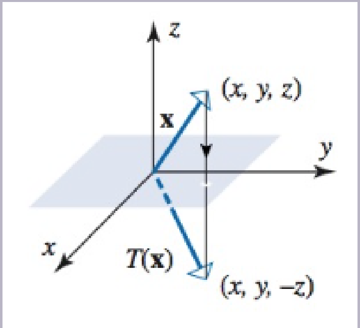
Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Reflexão no eixo y $T(x,y) = (-x,y)$		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Reflexão no eixo x $T(x,y)=(x,-y)$		$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Definições

Exemplos de Transformações Matriciais

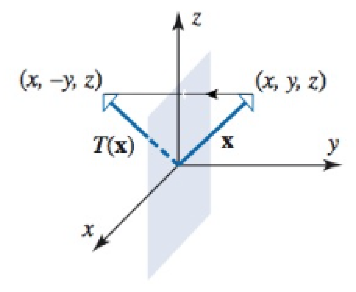
Operador	Ilustração	Matriz Canônica
Reflexão na reta $y = x$ $T(x, y) = (y, x)$		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Operador	Ilustração	Matriz Canônica
Reflexão no plano xy $T(x,y,z)=(x,y,-z)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

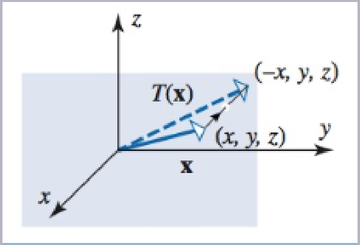
Operador | **Ilustração** | **Matriz Canônica**

Reflexão no plano xz

$$T(x,y,z) = (x,y,-z)$$



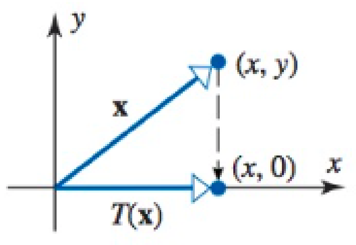
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operador	Ilustração	Matriz Canônica
Reflexão no plano *yz* $T(x,y,z)=(x,y,-z)$		$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

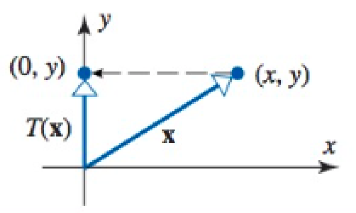
Operador | **Ilustração** | **Matriz Canônica**

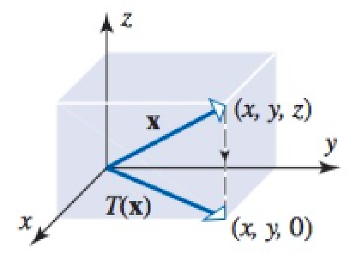
Projeção ortogonal no eixo x

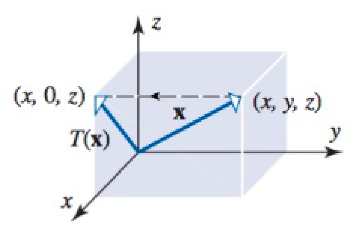
$$T(x, y) = (x, 0)$$

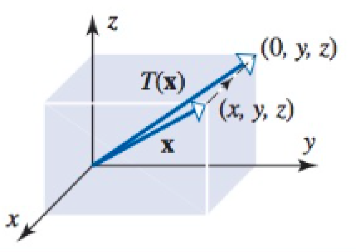


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Projeção ortogonal no eixo y $T(x,y) = (0,y)$		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Projeção ortogonal sobre o plano xy $T(x,y,z) = (x,y,0)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Projeção ortogonal sobre o plano xz $T(x,y,z)=(x,0,z)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Projeção ortogonal sobre o plano *yz* $T(x,y,z) = (0,y,z)$		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

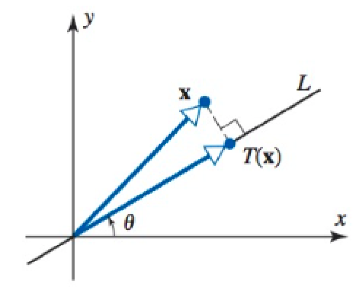
Operador

Projeção ortogonal sobre uma reta que passa pela origem e forma ângulo θ com o eixo x em $\mathbb{R}^2$

$$T(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos^2\theta + y \text{ sen}\,\theta\cos\theta \\ x \text{ sen}\,\theta\cos\theta + y \text{ sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

Ilustração



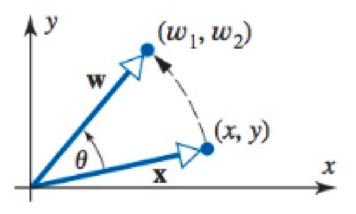
Matriz Canônica

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}\,\theta\cos\theta \\ \text{sen}\,\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Operador | **Ilustração** | **Matriz Canônica**

Rotação em $\mathbb{R}^2$ pelo ângulo θ

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\ x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$



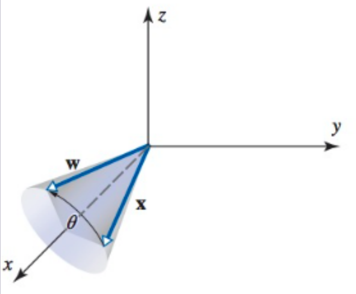
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Operador

Rotação anti-horária em torno do eixo x positivo pelo ângulo θ

$$T(x,y,z)=\begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta - z\,\text{sen}\,\theta \\ y\,\text{sen}\,\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ilustração



Matriz Canônica

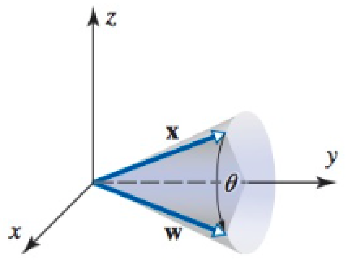
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\,\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Operador

Rotação anti-horária em torno do eixo y positivo pelo ângulo θ

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos\theta + z \operatorname{sen}\theta \\ y \\ -x \operatorname{sen}\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ilustração



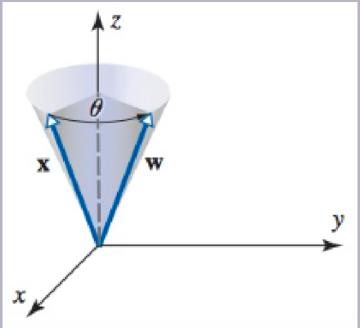
Matriz Canônica

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

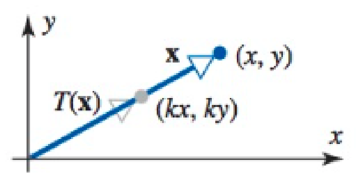
Operador | **Ilustração** | **Matriz Canônica**

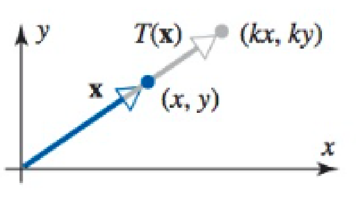
Rotação anti-horária em torno do eixo z positivo pelo ângulo θ

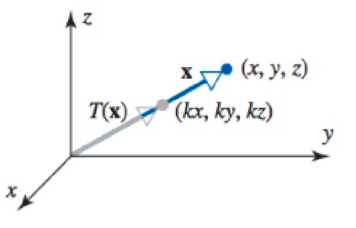
$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\ x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$$

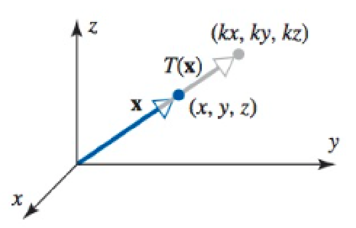


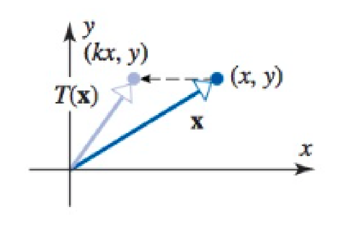
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Contração de fator k em $\mathbb{R}^2$ $(0 \leq k < 1)$ $T(x,y) = (kx, ky)$		$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Dilatação de fator k em $\mathbb{R}^2$ $(k > 1)$ $T(x, y) = (kx, ky)$		$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Operador	Ilustração	Matriz Canônica
Contração de fator k em $\mathbb{R}^3$ $(0 \leq k < 1)$ $T(x, y, z) = (kx, ky, kz)$		$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Dilatação de fator k em $\mathbb{R}^3$ $(k > 1)$ $T(x,y,z) = (kx,ky,kz)$		$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

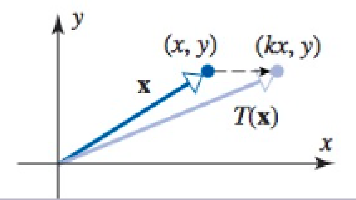
Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Compressão de $\mathbb{R}^2$ na direção x de fator k $(0 \leq k < 1)$ $T(x,y) = (kx, y)$		$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operador

Expansão de $\mathbb{R}^2$ na direção x de fator k $(k > 1)$

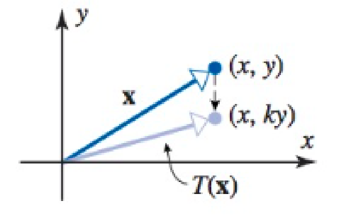
$$T(x,y) = (kx, y)$$

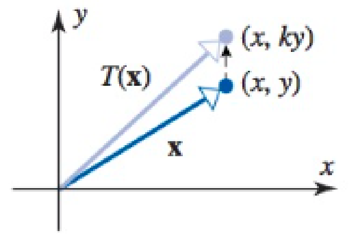
Ilustração



Matriz Canônica

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Compressão de $\mathbb{R}^2$ na direção y de fator k $(0 \leq k < 1)$ $T(x,y) = (x, ky)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

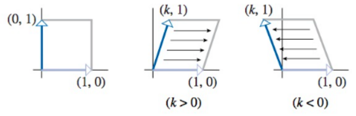
Operador	Ilustração	Matriz Canônica
Expansão de $\mathbb{R}^2$ na direção y de fator k $(k>1)$ $T(x,y)=(x,ky)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Operador

Cisalhamento de $\mathbb{R}^2$ na direção x de fator k

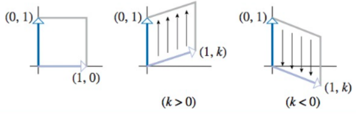
$$T(x,y) = (x + ky, y)$$

Ilustração



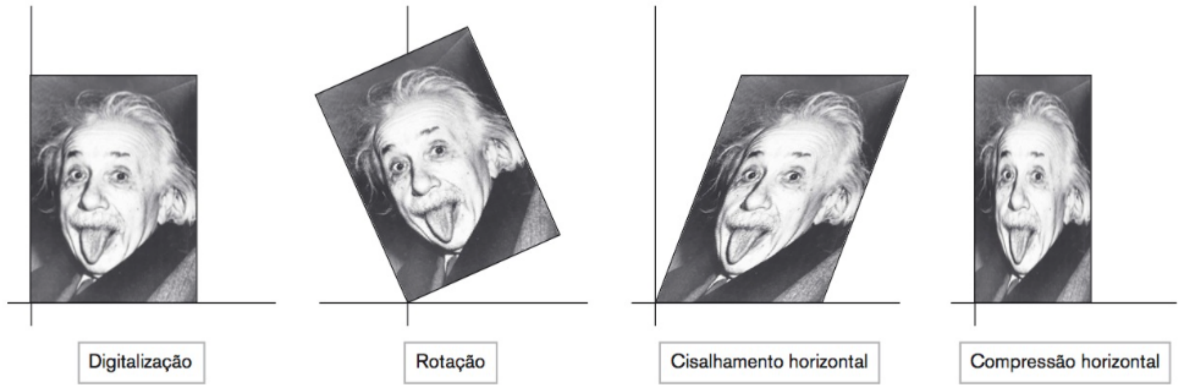
Matriz Canônica

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operador	**Ilustração**	**Matriz Canônica**
Cisalhamento de $\mathbb{R}^2$ na direção y de fator k $T(x,y) = (x, y+kx)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Definições

Exemplos de Transformações Matriciais



Transformações Lineares

Transformações Lineares

Definição

Sendo $T : V \to W$ uma transformação de um espaço V em um espaço W, diremos que é uma **transformação linear** de V em W se, para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ e escalar k, são atendidas as seguintes propriedades:

i) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ ii) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Transformações Lineares

Definição

Sendo $T: V \to W$ uma transformação de um espaço V em um espaço W, diremos que é uma **transformação linear** de V em W se, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e escalar k, são atendidas as seguintes propriedades:

i) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ ii) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Sendo α e β escalares, ambas podem ser resumidas em $T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$.

Transformações Lineares

Definição

Sendo $T : V \to W$ uma transformação de um espaço V em um espaço W, diremos que é uma **transformação linear** de V em W se, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e escalar k, são atendidas as seguintes propriedades:

i) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ ii) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Sendo α e β escalares, ambas podem ser resumidas em $T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$.

Se $V = W$, dizemos que T é **operador linear** de V

Transformações Lineares

Definição

Sendo $T: V \to W$ uma transformação de um espaço V em um espaço W, diremos que é uma **transformação linear** de V em W se, para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ e escalar k, são atendidas as seguintes propriedades:

i) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ ii) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Sendo α e β escalares, ambas podem ser resumidas em $T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$.
Se $V = W$, dizemos que T é **operador linear** de V

Teorema

As transformações matricias $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ com uma matriz A $m \times n$ são transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Propriedades

Sendo $T : V \to W$ uma transformação linear, são válidas as seguintes igualdades:

a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

b) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$

Exemplo de Transformação Linear de P_n em P_{n+1}:

Sendo $\mathbf{p} = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio de P_n e defina $T : P_n \to P_{n+1}$ por

$$T(\mathbf{p}) = x \cdot p(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1}.$$

Verificar se é linear.

Exemplo de Transformação Linear de P_n em P_{n+1}:

Sendo $\mathbf{p} = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio de P_n e defina $T: P_n \to P_{n+1}$ por

$$T(\mathbf{p}) = x \cdot p(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1}.$$

Verificar se é linear.

R. :

i) Para k escalar, temos que $k\mathbf{p} = a_0k + a_1kx + a_2kx^2 + \cdots + a_nkx^n$.
$T(k\mathbf{p}) = a_0kx + a_1kx^2 + a_2kx^3 + \cdots + a_nkx^{n+1} = k(a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1}) = kT(\mathbf{p})$.

ii) Sendo $\mathbf{p_1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ e $\mathbf{p_2} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ temos
$\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$ com
$T(\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}) = (a_0 + b_0)x + (a_1 + b_1)x^2 + (a_2 + b_2)x^3 + \cdots + (a_n + b_n)x^{n+1}$
$= a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1} + b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots + b_nx^{n+1} = T(\mathbf{p_1}) + T(\mathbf{p_2})$

Exemplo de Transformação Linear usando Produto Interno:

Dado um espaço com produto interno V e um vetor $\mathbf{v_0}$ fixo deste espaço, a transformação $T: V \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v_0} \rangle$ que associa cada vetor $\mathbf{x} \in V$ com seu produto por $\mathbf{v_0}$ é linear?

Exemplo de Transformação Linear usando Produto Interno:

Dado um espaço com produto interno V e um vetor $\mathbf{v_0}$ fixo deste espaço, a transformação $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v_0} \rangle$ que associa cada vetor $\mathbf{x} \in V$ com seu produto por $\mathbf{v_0}$ é linear?

R. :

i) Para k escalar, temos que $T(k\mathbf{v}) = \langle k\mathbf{v}, \mathbf{v_0} \rangle = k \langle \mathbf{v}, \mathbf{v_0} \rangle = kT(\mathbf{v})$.

ii) Sendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in V$ temos $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v_0} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v_0} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v_0} \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$. $\blacksquare$

Exemplo de Transformações de espaços matriciais:

Sendo M_{nn} o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, verificar se são lineares as seguintes transformações:

$$(a)\begin{array}{rcl} T_1 : M_{nn} & \rightarrow & M_{nn} \\ T_1(A) & = & A^T \end{array} \qquad (b)\begin{array}{rcl} T_2 : M_{nn} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ T_2(A) & = & \det(A) \end{array}$$

Exemplo de Transformações de espaços matriciais:

Sendo M_{nn} o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, verificar se são lineares as seguintes transformações:

$$(a) \begin{array}{rcl} T_1 : M_{nn} & \rightarrow & M_{nn} \\ T_1(A) & = & A^T \end{array} \qquad (b) \begin{array}{rcl} T_2 : M_{nn} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ T_2(A) & = & \det(A) \end{array}$$

R. :

i) Para k escalar, temos que $T_1(kA) = (kA)^T = kA^T = kT(\mathbf{v})$.

ii) Sendo A e $B \in M_{nn}$ temos $T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$. É linear

Exemplo de Transformações de espaços matriciais:

Sendo M_{nn} o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, verificar se são lineares as seguintes transformações:

$$(a) \begin{array}{rcl} T_1 : M_{nn} & \to & M_{nn} \\ T_1(A) & = & A^T \end{array} \qquad (b) \begin{array}{rcl} T_2 : M_{nn} & \to & \mathbb{R} \\ T_2(A) & = & \det(A) \end{array}$$

R. :

i) Para k escalar, temos que $T_2(kA) = \det(kA) = k^n \det(A) \neq kT(\mathbf{v})$. Não é linear.

Exemplo de Transformações de espaços matriciais:

Sendo M_{nn} o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, verificar se são lineares as seguintes transformações:

$$(a) \begin{array}{rcl} T_1 : M_{nn} & \rightarrow & M_{nn} \\ T_1(A) & = & A^T \end{array} \qquad (b) \begin{array}{rcl} T_2 : M_{nn} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ T_2(A) & = & \det(A) \end{array}$$

R. :

i) Para k escalar, temos que $T_2(kA) = \det(kA) = k^n \det(A) \neq kT(\mathbf{v})$. Não é linear.

Observe que não é preciso avaliar a segunda condição, mas ela também falha.

Exemplo de Transformações Linear de $C^1(-\infty,\infty)$ em $F(-\infty,\infty)$:

Sendo $V = C^1(-\infty,\infty)$ espaço das funções reais com derivadas contínuas em todo conjunto $\mathbb{R}$ e $W = F(-\infty,\infty)$ o espaço das funções reais definidas em todo conjunto $\mathbb{R}$. Pode-se definir $D: V \to W$ como a transformação que associa cada função à sua derivada, ou seja

$$D(\mathbf{f}) = f'(x).$$

Como derivada da soma é a soma das derivadas, temos que

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = D(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g}).$$

Temos ainda que derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função. Logo, $D(k\mathbf{f}) = (kf)'(x) = k \cdot f'(x) = kD(\mathbf{f})$. A derivação é linear.

A toda transformação linear, podemos associar uma matriz canônica, calculando a transformação nos vetores da base do espaço.

Exemplo :

Encontrar a matriz associada à transformação

$$\begin{aligned} D : P_4 &\rightarrow P_3 \\ D(\mathbf{p}) &= p'(x) \end{aligned}$$

A toda transformação linear, podemos associar uma matriz canônica, calculando a transformação nos vetores da base do espaço.

Exemplo :

Encontrar a matriz associada à transformação

$$\begin{aligned} D: P_4 &\rightarrow P_3 \\ D(\mathbf{p}) &= p'(x) \end{aligned}$$

R. : Os vetores de base de P_4 são $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Aplicando a transformação em cada um deles temos $\{0, 1, 2x, 3x^2, 4x^3\}$. Escrevendo as coordenadas como colunas da matriz temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Núcleo e Imagem

Núcleo e Imagem

Definição

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Temos dois importantes conjuntos associados à transformação:

i) O conjunto de vetores $v \in V$ que T transforma em $\mathbf{0}$ é chamado **núcleo** de T. Notação $N(T)$.

ii) O conjunto de vetores $w \in W$ que são resultado de T para algum $v \in V$ é chamado **imagem** de T. Notação $Im(T)$

Exemplo - Núcleo e Imagem de transformações matriciais:

Como o espaço nulo de uma matriz $A_{m\times n}$ é o conjunto de vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, esse espaço será o núcleo da transformação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

De modo semelhante, o espaço coluna de A é o conjunto de vetores $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para algum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Este espaço será a imagem de T_A.

Exemplo - Núcleo e imagem da transformação nula:

Seja $T: V \to W$ a transformação nula. Como T transforma **qualquer** vetor $\mathbf{v} \in V$ em $\mathbf{0}$, segue que $N(T) = V$. Além disso, como $\mathbf{0}$ é a única imagem por T de vetores em V, segque que $Im(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Exemplo - Núcleo e imagem da transformação nula:

Seja $T : V \to W$ a transformação nula. Como T transforma **qualquer** vetor $\mathbf{v} \in V$ em $\mathbf{0}$, segue que $N(T) = V$. Além disso, como $\mathbf{0}$ é a única imagem por T de vetores em V, segque que $Im(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Exemplo - Núcleo e imagem do operador identidade:

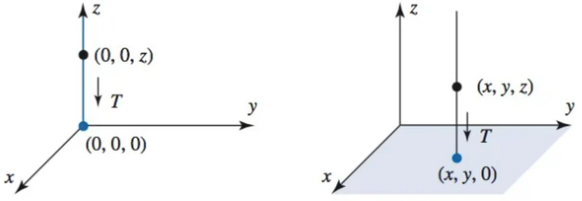
Seja $I : V \to V$ o operador identidade. Como $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ com **qualquer** vetor $\mathbf{v} \in V$, cada vetor é imagem de si mesmo e $Im(\mathbf{v}) = V$. Como o único vetor com $I(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ é $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos $N(I) = \{\mathbf{0}\}$.

Núcleo e Imagem

Exemplos

Exemplo - Núcleo e imagem de uma projeção ortogonal:

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que projeta qualquer vetor no plano xy. Ou seja, $T((x,y,z)) = (x,y,0)$. Qualquer vetor do eixo z tem a forma $(0,0,z)$ e $T((0,0,z)) = (0,0,0)$. Logo, $N(T) = \{(0,0,z), \forall z \in \mathbb{R}\}$. Já $Im(T) = \{(x,y,0), \forall x,y \in \mathbb{R}\}$.



(a) Nuc(T) é o eixo z. (b) Im(T) é todo o plano xy.

Núcleo e Imagem

Exemplos

Em todos os exemplos mostrados, Núcleo e Imagem de transformação formam subespaços. Isso se dá pois...

Em todos os exemplos mostrados, Núcleo e Imagem de transformação formam subespaços.

Teorema

Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear.

a) O núcleo de T é um subespaço de V.

b) A imagem de T é um subespaço de W.

Núcleo e Imagem

Exemplos

Exemplo de aplicação:

As equações diferenciais da forma

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \text{ uma constante positiva})$$

surgem no estudo das vibrações. O conjunto de todas as soluções dessa equação no intervalo $(-\infty, \infty)$ é o núcleo da transformação linear $D\colon C^2(-\infty,\infty) \to C(-\infty,\infty)$ dada por

$$D(y) = y'' + \omega^2 y.$$

Se obtivermos duas soluções linearmente independentes, todas as outras soluções podem ser obtidas como combinação linear dessas duas.

Exemplo de aplicação:

Tomando

$$y_1 = \cos\omega x \qquad \text{e} \qquad y_2 = \operatorname{sen}\omega x$$

são soluções, que não são múltiplas uma da outra, logo LI. Portanto,

$$y = c_1\cos\omega x + c_2 \operatorname{sen}\omega x$$

é uma solução geral.

Definição

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Se a imagem de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é o **posto de T**, denotado por $pos(T)$. Se o núcleo de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é a **nulidade de T**, denotada por $nul(T)$.

Teorema

Se $T: V \to W$ for uma transformação linear, sendo V de dimensão n, então

$$pos(T) + nul(T) = n$$

Núcleo e Imagem

Exercícios sugeridos

8.1 (pág 442): 2, 4, 6, 7, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 25.

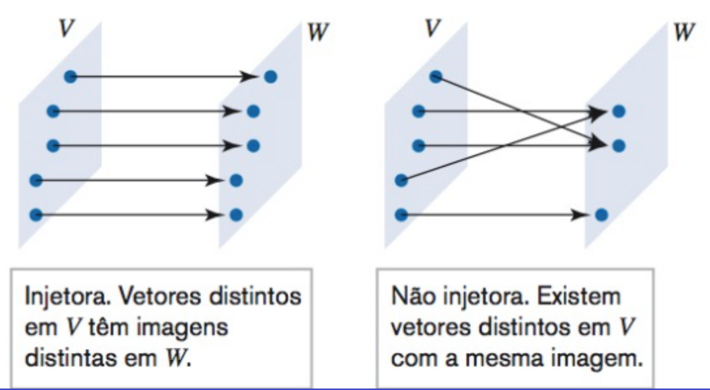
Isomorfismo

Isomorfismo

Injetora e Sobrejetora

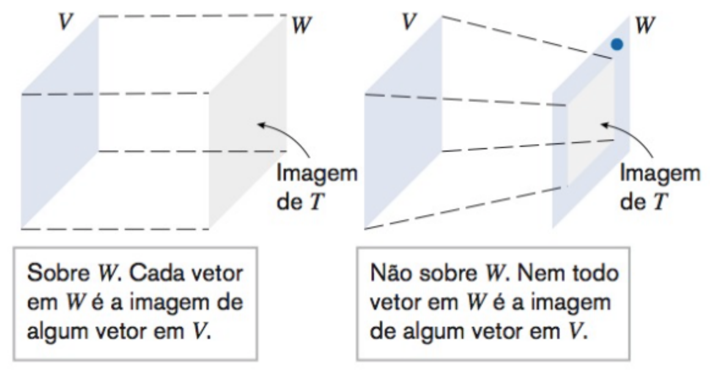
Definição

Se $T\colon V \to W$ for uma transformação linear, dizemos que T é **injetora** se T transformar vetores distintos de V em vetores distintos de W.



Definição

Se $T: V \to W$ for uma transformação linear, dizemos que T é **sobrejetora** se qualquer vetor em W for a imagem de pelo menos um vetor de V.



Teorema

Se $T : V \to W$ for uma transformação linear, as afirmações seguintes são equivalentes.

a) T é injetora.

b) $N(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Teorema

Se $T : V \to W$ for uma transformação linear, as afirmações seguintes são equivalentes.

a) T é injetora.

b) $N(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Teorema

Se V for um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$ for um operador linear, podemos adicionar ainda mais uma afirmação equivalente:

a) T é injetora.

b) $N(T) = \{\mathbf{0}\}$.

c) T é sobrejetor, ou seja $Im(T) = V$.

Exemplo 1:

Sendo c um escalar não nulo e V um espaço vetorial de dimensão finita, o operador linear $T: V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$ é injetor e sobrejetor.

Exemplo 1:

Sendo c um escalar não nulo e V um espaço vetorial de dimensão finita, o operador linear $T: V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$ é injetor e sobrejetor.

R. : O operador T é sobrejetor pois para qualquer vetor $\mathbf{v} \in V$ existe um vetor $\frac{1}{c}\mathbf{v}$ com $T\left(\frac{1}{c}\mathbf{v}\right) = c\frac{1}{c}\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Portanto, é também injetor (pelo teorema anterior).

$\blacksquare$

Exemplo 1:

Sendo c um escalar não nulo e V um espaço vetorial de dimensão finita, o operador linear $T: V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$ é injetor e sobrejetor.

R. : O operador T é sobrejetor pois para qualquer vetor $\mathbf{v} \in V$ existe um vetor $\frac{1}{c}\mathbf{v}$ com $T\left(\frac{1}{c}\mathbf{v}\right) = c\frac{1}{c}\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Portanto, é também injetor (pelo teorema anterior).

$\blacksquare$

Exemplo 2:

Se $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for o operador matricial $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, então T_A é injetor e sobrejetor se, e só se, A é invertível.

Exemplo 3:

A transformação derivação $D: C^1(-\infty,\infty) \to F(-\infty,\infty)$ **não é** injetora, pois funções que diferem apenas por uma constante tem a mesma derivada.

$$D(x^2) = D(x^2+1) = 2x.$$

Relação entre dimensões e transformações

Sendo $T: V \to W$ uma transformação linear com V e W de dimensão finita.

a) Se $\dim(W) < \dim(V)$, então T não pode ser injetora.
b) Se $\dim(V) < \dim(W)$, então T não pode ser sobrejetora.

Em outras palavras:

a) Se uma transformação for de um espaço “maior” em um espaço “menor”, alguns pontos do espaço “maior” terão a mesma imagem. Logo, não será injetora.
b) Se uma transformação for de um espaço “menor” em um espaço “maior”, nem todos os pontos do espaço “maior” serão imagem de algum ponto do espaço “menor”. Logo, não será sobrejetora.

Definição

Se uma transformação linear $T\colon V \to W$ for injetora e sobrejetora, dizemos que T é um **isomorfismo** e que os espaços vetoriais V e W são **isomorfos**.

O significado de *isomorfo* vem dos radicais gregos *iso*, que significa "idêntico" e *morfo* que significa "forma". Ou seja, espaços *isomorfos* são espaços que tem a mesma "forma algébrica", mesmo sendo objetos de tipos distintos.

Definição

Se uma transformação linear $T\colon V \to W$ for injetora e sobrejetora, dizemos que T é um **isomorfismo** e que os espaços vetoriais V e W são **isomorfos**.

O significado de *isomorfo* vem dos radicais gregos *iso*, que significa “idêntico” e *morfo* que significa “forma”. Ou seja, espaços *isomorfos* são espaços que tem a mesma “forma algébrica”, mesmo sendo objetos de tipos distintos.

Exemplo :

A transformação $T\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ que associa $a_0 + a_1x + a_2x^2 \xrightarrow{T} (a_0, a_1, a_2)$ é um isomorfismo.

Teorema

Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Uma forma de encontrarmos isomorfismos de V em W (se existirem) é encontrar uma transformação $T : V \to W$ que seja linear, injetora e sobrejetora. Para isso, se T linear aplicada a uma base de V leva a uma base de W, temos o isomorfismo.

Teorema

Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Uma forma de encontrarmos isomorfismos de V em W (se existirem) é encontrar uma transformação $T : V \to W$ que seja linear, injetora e sobrejetora. Para isso, se T linear aplicada a uma base de V leva a uma base de W, temos o isomorfismo.

Exemplo :

A aplicação

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \xrightarrow{T} (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

de P_{n-1} em $\mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.

Teorema

Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Uma forma de encontrarmos isomorfismos de V em W (se existirem) é encontrar uma transformação $T : V \to W$ que seja linear, injetora e sobrejetora. Para isso, se T linear aplicada a uma base de V leva a uma base de W, temos o isomorfismo.

Exemplo :

A aplicação

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

de M_{22} em $\mathbb{R}^4$ é um isomorfismo.

Isomorfismo

Exercícios sugeridos

8.2: (pág 451) 1,2,3,4,7.

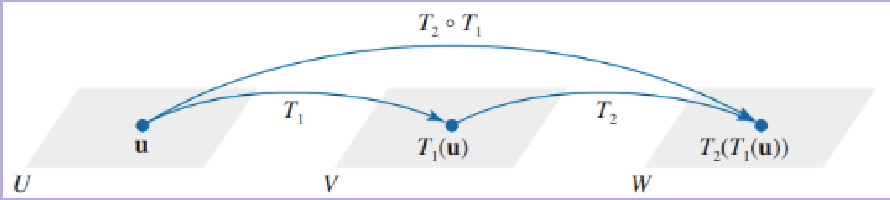
Composições e Transformações inversas

Definição

Se $T_1 : U \rightarrow V$ e $T_2 : V \rightarrow W$ forem transformações lineares, então a **composição de $\mathbf{T_2}$ com $\mathbf{T_1}$**, denotada por $T_2 \circ T_1$ (lido "T_2 bola T_1") é a aplicação definida pela forma

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u}))$$

em que $\mathbf{u} \in U$.



Composições e Transformações inversas

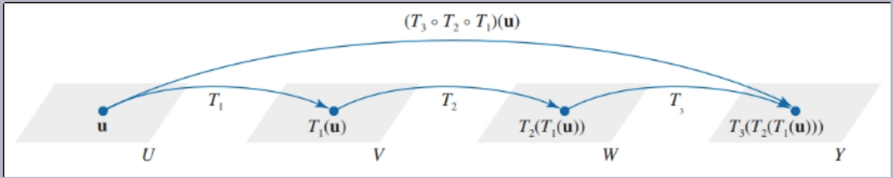
Composição

Teorema

Se $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ forem transformações lineares, $T_2 \circ T_1 : U \to W$ também é uma transformação linear.

Também é possível fazer composição com mais de duas transformações. Sendo $T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$ e $T_3 : W \to Y$ forem transformações lineares, então a composição $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ é definida por

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{u})))$$



Composições e Transformações inversas

Inversas

Se $T: V \rightarrow W$ for uma transformação linear injetora, cada vetor $\mathbf{w} \in Im(T)$ é imagem de um único vetor $\mathbf{v} \in V$. Essa unicidade permite definir uma transformação que transforma $\mathbf{w}$ em $\mathbf{v}$.

Composições e Transformações inversas

Inversas

Se $T: V \to W$ for uma transformação linear injetora, cada vetor $\mathbf{w} \in Im(T)$ é imagem de um único vetor $\mathbf{v} \in V$. Essa unicidade permite definir uma transformação que transforma $\mathbf{w}$ em $\mathbf{v}$.

Definição

Sendo $T: V \to W$ uma transformação linear injetora, define-se a **transformação inversa** de T, denotada por $T^{-1}: Im(T) \to V$ tal que

$$T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$$
$$T(T^{-1}(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

Se $T\colon V \to W$ for uma transformação linear injetora, cada vetor $\mathbf{w} \in Im(T)$ é imagem de um único vetor $\mathbf{v} \in V$. Essa unicidade permite definir uma transformação que transforma $\mathbf{w}$ em $\mathbf{v}$.

Definição

Sendo $T\colon V \to W$ uma transformação linear injetora, define-se a **transformação inversa** de T, denotada por $T^{-1}\colon Im(T) \to V$ tal que

$$T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$$
$$T(T^{-1}(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

Se $T\colon V \to W$ for injetora, o domínio de T^{-1} é a imagem de T, não necessariamente todo o W. Contudo, se $T\colon V \to V$ for um operador injetor, vimos que ele será também sobrejetor e, nesse caso, o domínio de T^{-1} será todo o espaço V.

Lembrando

Exemplo :

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operador definido por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$.

Determinar se T é injetor e, caso positivo, encontrar T^{-1}.

Exemplo :

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operador definido por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$.

Determinar se T é injetor e, caso positivo, encontrar T^{-1}.

R. : A matriz associada à T é $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Se esta matriz tem inversa, seu núcleo será só o vetor nulo e a transformação é injetora. Ora, sua inversa é $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$. Assim T é injetor e

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3 \end{bmatrix}$$

Teorema

Se $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ forem transformações lineares injetoras, então

a) $T_2 \circ T_1$ é injetora e
b) $(T_2 \circ T_1)^{-1}) = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$

Esse resultado pode ser estendido a composições de três ou mais transformações lineares, sempre atentando para a ordem das aplicações.

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}) = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1}$$

Exercícios sugeridos

8.3 (pág 457): 1,3,5,11,14,15

Bons Estudos!!!