Álgebra Linear e Geometria Analítica — Exercícios Seção 1.4

Questão 1 *Considere $a = 4$, $b = -7$ e as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Mostre que

a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

b) $(AB)C = A(BC)$

c) $(a + b)C = aC + bC$

d) $a(B - C) = aB - aC$

e) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

f) $A(B - C) = AB - AC$

g) $(B + C)A = BA + CA$

h) $a(bC) = (ab)C$

i) $(A^T)^T = A$

j) $(A + B)^T = A^T + B^T$

k) $(aC)^T = aC^T$

l) $(AB)^T = B^T A^T$

Questão 2 *Usando que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $ad - bc \neq 0$ implica $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, calcular as inversas de:*

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$

Questão 3 *Para os seguintes itens, use a informação dada para calcular A*

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

d) $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Questão 4 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

calcular

a) A^3 e A^{-3}

b) B^3 e B^{-3}

c) C^3 e D^3

d) $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ e $p(D)$ sendo $p(x) = x^2 - 2x + 1$

e) $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ e $p(D)$ sendo $p(x) = x - 2$

f) $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ e $p(D)$ sendo $p(x) = 2x^2 + x + 1$

g) $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ e $p(D)$ sendo $p(x) = x^3 - 2x + 4$

Questão 5 *Sendo A, B, C e D matrizes $n \times n$ invertíveis, resolva para D:*

a) $ABC^T DBA^T C = AB^T$

b) $C^T B^{-1} A^2 BAC^{-1} DA^{-2} B^T C^{-2} = C^T$

Questão 6 *Simplifique*

a) $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$

b) $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$

Questão 7 *Dizemos que uma matriz A é* ***idempotente*** *se $A^2 = A$*

a) *Mostre que se A for idempotente, $I - A$ também é.*

b) *Mostre que se A for idempotente, $2A - I$ é invertível e sua própria inversa.*