Funções Trigonométricas

JLC048 \ JCE023

Prof.º Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Definição

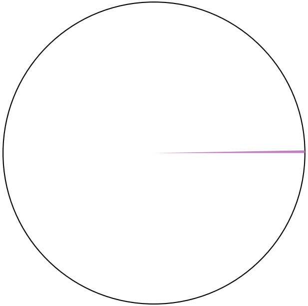
A palavra trigonometria vem do grego

- *tri* - três
- *gonos* - ângulos
- *metron* - medida

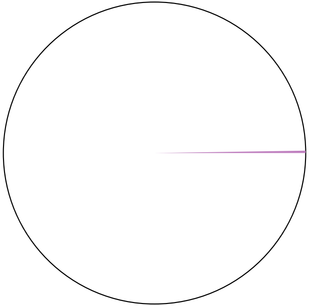
O objeto de estudo da trigonometria são medidas de elementos de triângulos, em especial ângulos e lados, e suas relações.

Medidas de ângulos

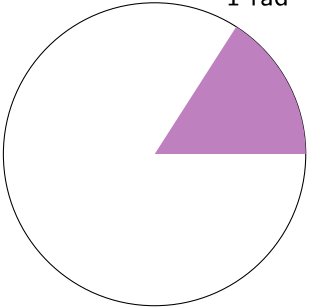
Grau: (Degree)
$^1/_{360}$ da circunferência



Grado: (Grad)
$^1/_{400}$ da circunferência



Radiano: (Rad)
$^1/_{2\pi}$ da circunferência

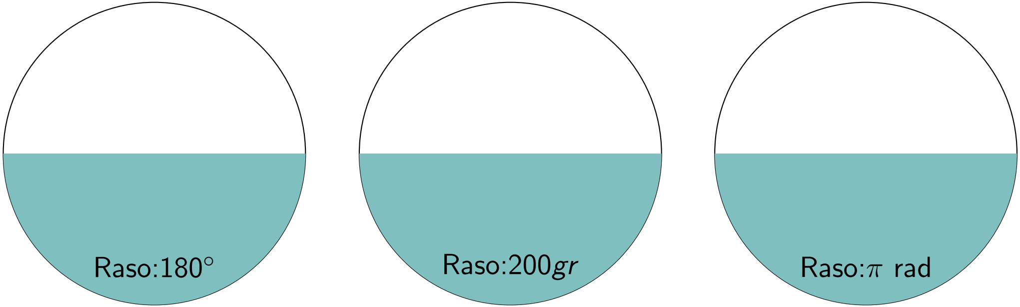


A medida do arco de 1 rad tem comprimento igual ao raio da circunferência

Medidas de ângulos

Ângulos especiais

Ângulo Raso: Metade da circunferência

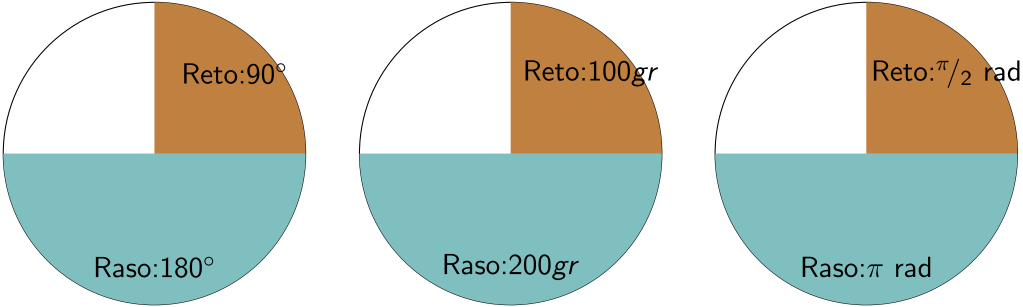


Medidas de ângulos

Ângulos especiais

Ângulo Raso: Metade da circunferência

Ângulo Reto: Metade do ângulo raso

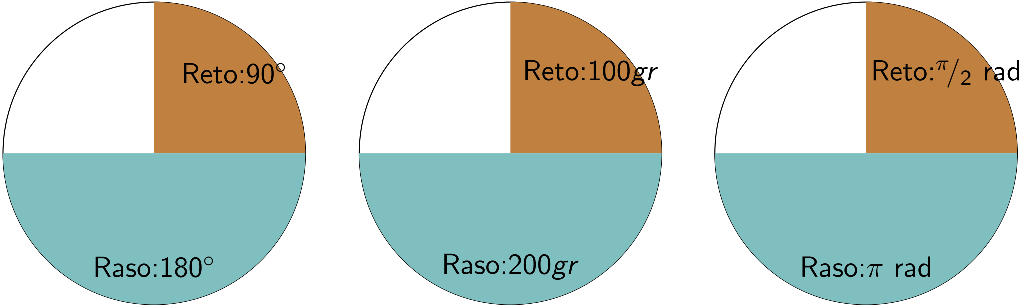


Medidas de ângulos

Ângulos especiais

Ângulo Raso: Metade da circunferência

Ângulo Reto: Metade do ângulo raso



Importante:

Para Geometria: Use Graus

Para Funções: Use Radianos

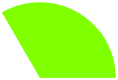
Classificações de ângulos

Ângulo Agudo: qualquer ângulo menor que um ângulo reto (entre 0° e 90°).

Classificações de ângulos

Ângulo Agudo: qualquer ângulo menor que um ângulo reto (entre 0° e 90°).

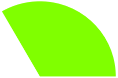
Ângulo Obtuso: qualquer ângulo maior que um reto e menor que um raso (entre 90° e 180°).



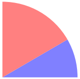
Classificações de ângulos

Ângulo Agudo: qualquer ângulo menor que um ângulo reto (entre 0° e 90°).

Ângulo Obtuso: qualquer ângulo maior que um reto e menor que um raso (entre 90° e 180°).



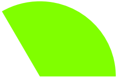
Ângulos Complementares: dois ângulos cuja soma seja um ângulo reto.



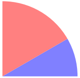
Classificações de ângulos

Ângulo Agudo: qualquer ângulo menor que um ângulo reto (entre 0° e 90°).

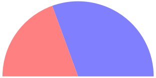
Ângulo Obtuso: qualquer ângulo maior que um reto e menor que um raso (entre 90° e 180°).



Ângulos Complementares: dois ângulos cuja soma seja um ângulo reto.



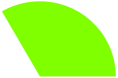
Ângulos Suplementares: dois ângulos cuja soma seja um ângulo raso.



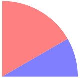
Classificações de ângulos

Ângulo Agudo: qualquer ângulo menor que um ângulo reto (entre 0° e 90°).

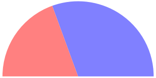
Ângulo Obtuso: qualquer ângulo maior que um reto e menor que um raso (entre 90° e 180°).



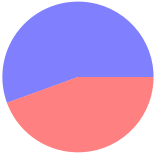
Ângulos Complementares: dois ângulos cuja soma seja um ângulo reto.



Ângulos Suplementares: dois ângulos cuja soma seja um ângulo raso.



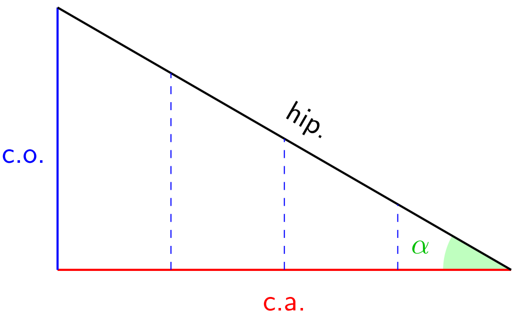
Ângulos Replementares: dois ângulos cuja soma seja uma volta.



Relações entre lados e ângulos

Dado um triângulo **retângulo**, os lados que formam o ângulo reto são chamados *catetos* e o lado oposto ao ângulo reto é a *hipotenusa (hip.)*. Como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°, tendo um ângulo reto, os outros dois são necessariamente *agudos*.

Com isso, para um ângulo agudo α do triângulo retângulo, temos um **cateto oposto (c.o.)** a este ângulo e um **cateto adjacente (c.a.)**.



Relações entre lados e ângulos

Seno

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Cosseno

$$\cos \alpha = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}}$$

Tangente

$$\tan \alpha = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Relações entre lados e ângulos

Seno

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Cosseno

$$\cos\alpha = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}}$$

Tangente

$$\tan\alpha = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

Relação entre elas

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{c.o.}/\text{hip.}}{\text{c.a.}/\text{hip.}} = \frac{\text{c.o.}}{\cancel{\text{hip.}}} \cdot \frac{\cancel{\text{hip.}}}{\text{c.a.}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \tan\alpha$$

$\tan\alpha$ ou tg α, mas não tang α

Relações entre lados e ângulos

Seno

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}}$$

Cosseno

$$\cos \alpha = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}}$$

Tangente

$$\tan \alpha = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$$

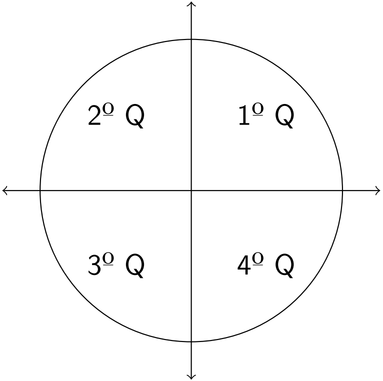
Relação entre elas

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{c.o.}/\text{hip.}}{\text{c.a.}/\text{hip.}} = \frac{\text{c.o.}}{\cancel{\text{hip.}}} \cdot \frac{\cancel{\text{hip.}}}{\text{c.a.}} = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \tan \alpha$$

$\tan \alpha$ ou $\text{tg } \alpha$, mas não $\cancel{\text{tang } \alpha}$

(tangente é "*co-ca*", não é *Tang*)

Circunferência Trigonométrica



Circunferência de centro na origem e raio 1.
Todos os ângulos menores do que uma volta podem ser marcados

Medida Vertical: Seno do Ângulo.
Medida Horizontal: Cosseno do Ângulo

Quadrantes

1° **Quadrante:**
$0^\circ \leq x \leq 90^\circ$

2° **Quadrante:**
$90^\circ \leq x \leq 180^\circ$

3° **Quadrante:**
$180^\circ \leq x \leq 270^\circ$

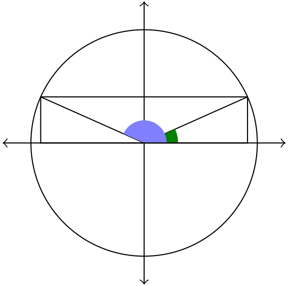
4° **Quadrante:**
$270^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Circunferência Trigonométrica

Quadrante	Graus	Radianos	Sinal		
			sen	cos	tan
1º	$0 \vdash 90$	$0 \vdash \pi/2$	$+$	$+$	$+$
2º	$90 \vdash 180$	$\pi/2 \vdash \pi$	$+$	$-$	$-$
3º	$180 \vdash 270$	$\pi \vdash 3\pi/2$	$-$	$-$	$+$
4º	$270 \vdash 360$	$3\pi/2 \vdash 2\pi$	$-$	$+$	$-$

Valores de sen e cos para ângulos acima de um ângulo reto

Ângulos acima do ângulo reto: Rebate para um ângulo correspondente do $1^{\underline{o}}$ Quadrante



Para x no $2^{\underline{o}}$ Quadrante:

$\text{sen } x = \text{sen}(180^\circ - x) \qquad \cos x = -\cos(180^\circ - x)$

Ex.: $\text{sen } 156^\circ = \text{sen } 24^\circ \qquad \cos 156^\circ = -\cos 24^\circ$

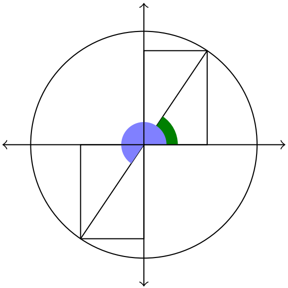
Valores de sen e cos para ângulos acima de um ângulo reto

Ângulos acima do ângulo reto: Rebate para um ângulo correspondente do 1º Quadrante

Para x no 3º Quadrante:

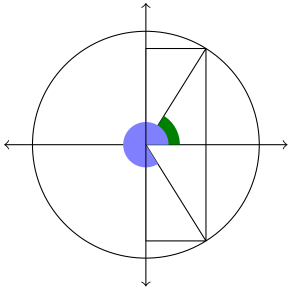
$\text{sen } x = -\text{sen}(180° + x)$ $\quad \cos x = -\cos(180° + x)$

Ex.: $\text{sen } 236° = -\text{sen } 56°$ $\quad \cos 236° = -\cos 56°$



Valores de sen e cos para ângulos acima de um ângulo reto

Ângulos acima do ângulo reto: Rebate para um ângulo correspondente do 1º Quadrante

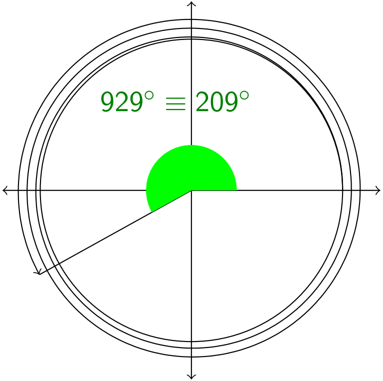


Para x no 4º Quadrante:

$\text{sen } x = -\text{sen}(360^\circ - x) \quad \cos x = \cos(360^\circ - x)$

Ex.: $\text{sen } 302^\circ = -\text{sen } 58^\circ \quad \cos 302^\circ = \cos 58^\circ$

Ângulos Congruentes



Para valores acima de 360° é preciso retirar as voltas excedentes e obter o ângulo congruente. Uma forma possível é tomar o *resto* da divisão:

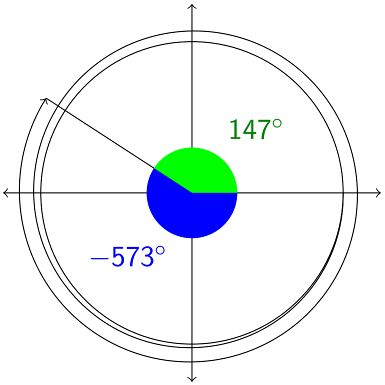
$$\begin{array}{r|l} 929^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} -720^\circ & 2 \text{ voltas} \\ \hline 209^\circ & \end{array}$$

Ângulos Congruentes

Para valores abaixo de 0°, somamos 360 tantas vezes quanto for necessário para chegar em um valor positivo. Será uma volta a mais que o *resultado* da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 573^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} -360^\circ & \quad 1 \\ \hline 213^\circ & \end{array}$$

$$-573^\circ + (1+1)\cdot 360^\circ = -573^\circ + 720^\circ = 147^\circ$$

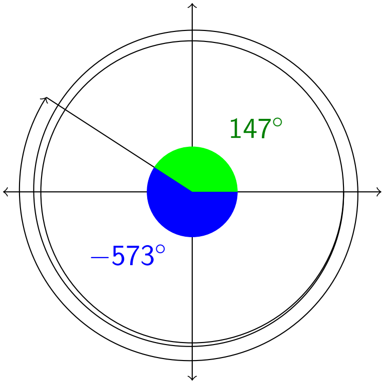


Ângulos Congruentes

Para valores abaixo de 0°, somamos 360 tantas vezes quanto for necessário para chegar em um valor positivo. Será uma volta a mais que o *resultado* da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 573^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} -360^\circ & \quad 1 \\ \hline 213^\circ & \end{array}$$

$$-573^\circ + (1+1)\cdot 360^\circ = -573^\circ + 720^\circ = 147^\circ$$



Forma Geral

Para x em graus, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$: $x = \theta + k \cdot 360^\circ$, $(k \in \mathbb{Z})$

Para x em radianos, $0 \leq \theta \leq 2\pi$: $x = \theta + k \cdot 2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	°	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°			
$\pi/4$	45°			
$\pi/3$	60°			

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	°	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°	1		
$\pi/4$	45°			
$\pi/3$	60°			

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	$^\circ$	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°	1		
$\pi/4$	45°	2		
$\pi/3$	60°			

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	°	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°	1		
$\pi/4$	45°	2		
$\pi/3$	60°	3		

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	°	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°	1	3	
$\pi/4$	45°	2		
$\pi/3$	60°	3		

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	°	sen	cos	tan
$^{\pi}/_{6}$	30°	1	3	
$^{\pi}/_{4}$	45°	2	2	
$^{\pi}/_{3}$	60°	3		

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	$^\circ$	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°	1	3	
$\pi/4$	45°	2	2	
$\pi/3$	60°	3	1	

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	°	sen	cos	tan
$\pi/6$	$30°$	$1/2$	$3/2$	
$\pi/4$	$45°$	$2/2$	$2/2$	
$\pi/3$	$60°$	$3/2$	$1/2$	

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	$^\circ$	sen	cos	tan
$^{\pi}/_{6}$	30°	$^{1}/_{2}$	$^{3}/_{2}$	
$^{\pi}/_{4}$	45°	$^{\sqrt{2}}/_{2}$	$^{\sqrt{2}}/_{2}$	
$^{\pi}/_{3}$	60°	$^{3}/_{2}$	$^{1}/_{2}$	

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	°	sen	cos	tan
$\pi/6$	$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	
$\pi/4$	$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	
$\pi/3$	$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	$^\circ$	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	$^\circ$	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	

Ângulos Notáveis

Ângulos do 1º Quadrante

rad	$^\circ$	sen	cos	tan
$^{\pi}/_{6}$	30°	$^{1}/_{2}$	$^{\sqrt{3}}/_{2}$	$^{\sqrt{3}}/_{3}$
$^{\pi}/_{4}$	45°	$^{\sqrt{2}}/_{2}$	$^{\sqrt{2}}/_{2}$	1
$^{\pi}/_{3}$	60°	$^{\sqrt{3}}/_{2}$	$^{1}/_{2}$	$\sqrt{3}$

Ângulos Notáveis

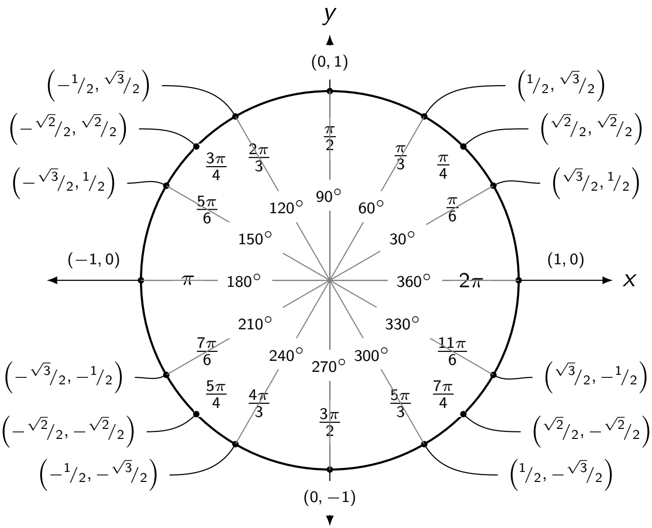
Ângulos do 1º Quadrante

rad	°	sen	cos	tan
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Quartos de Volta

rad	°	sen	cos	tan
0 ou 2π	0° ou 360°	0	1	0
$\pi/2$	90°	1	0	$\nexists$
π	180°	0	-1	0
$3\pi/2$	270°	-1	0	$\nexists$

Ângulos Notáveis



Minha terra tem palmeiras...

Minha terra tem palmeiras...

... onde canta o sabiá ...

Minha terra tem palmeiras...

... onde canta o sabiá ...

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Soma de Arcos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

Soma de Arcos

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}a \cdot \cos b \pm \text{sen}b \cdot \cos a \qquad \cos\,(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}a \cdot \text{sen}b$$

$$\text{sen}2a = 2 \cdot \text{sen}a \cdot \cos a \qquad \begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \text{sen}^2 a = 1 - 2\text{sen}^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \end{aligned}$$

Soma de Arcos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a \qquad \cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

Outras fórmulas, obtidas das anteriores

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Soma de Arcos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a \qquad \cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a \qquad \begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1\end{aligned}$$

Outras fórmulas, obtidas das anteriores

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

(seno é ímpar) (cosseno é par)

Soma de Arcos

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}a \cdot \cos b \pm \text{sen}b \cdot \cos a \qquad \cos\,(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}a \cdot \text{sen}b$$

$$\text{sen}2a = 2 \cdot \text{sen}a \cdot \cos a \qquad \begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \text{sen}^2 a = 1 - 2\text{sen}^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \end{aligned}$$

Outras fórmulas, obtidas das anteriores

$$\tan\,(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \qquad \tan\,(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$$
(seno é ímpar)

$$\cos(-x) = \cos x$$
(cosseno é par)

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}x$$
(Período do seno 2π)

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$
(Período do cosseno 2π)

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$
(Período da tangente π)

Soma de Arcos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a \qquad \cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a \qquad \begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \end{aligned}$$

Outras fórmulas, obtidas das anteriores

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$
(seno é ímpar)

$$\cos(-x) = \cos x$$
(cosseno é par)

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$$
(Período do seno 2π)

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$
(Período do cosseno 2π)

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$
(Período da tangente π)

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$
para qualquer x

Outras funções trigonométricas

Secante:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Cossecante:

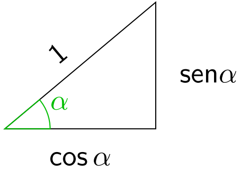
$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Cotangente:

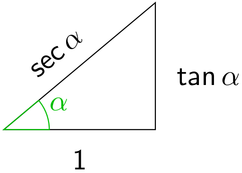
$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Obs.: Ainda é possível escrever $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\csc x}{\sec x}$

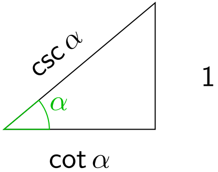
Identidades Trigonométricas



$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$



$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Manipulações:

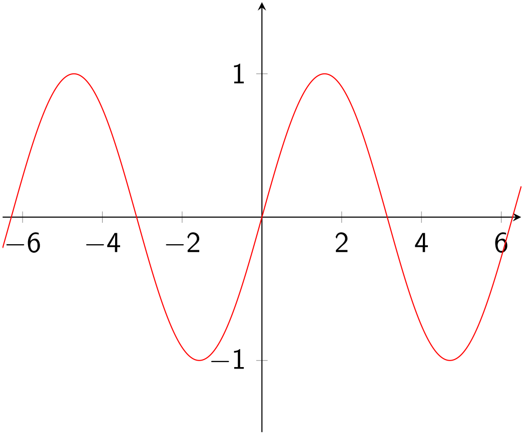
- Dividindo $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\cos^2\alpha$, temos

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

- Dividindo $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\text{sen}^2\alpha$, temos

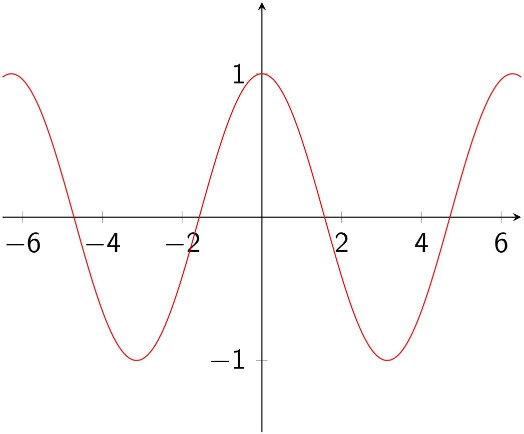
$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \Longrightarrow 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Gráficos



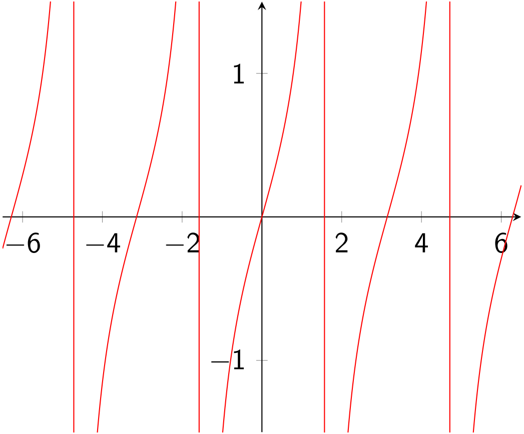
$$f(x) = \text{sen } x$$

Gráficos



$$f(x) = \cos x$$

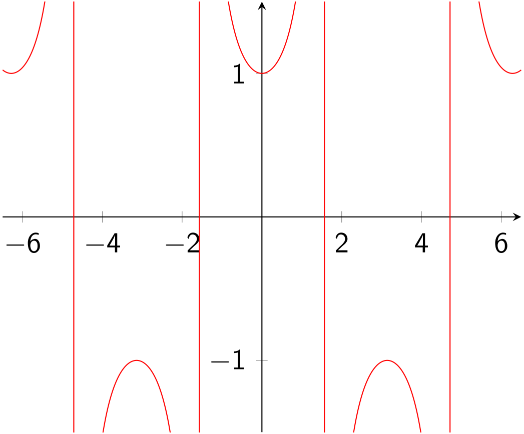
Gráficos



$$f(x) = \tan x$$

As linhas verticais são os valores onde as funções não são definidas. São chamadas **assíntotas**

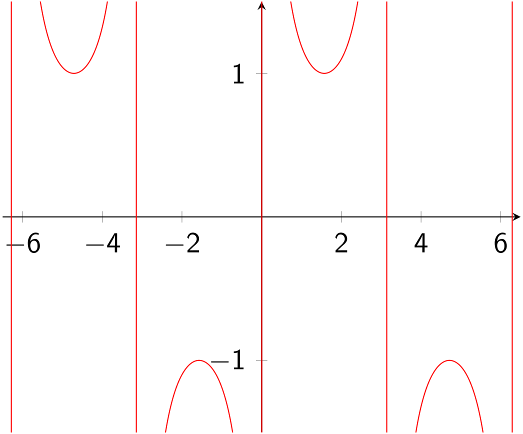
Gráficos



$$f(x) = \sec x$$

As linhas verticais são os valores onde as funções não são definidas. São chamadas **assíntotas**

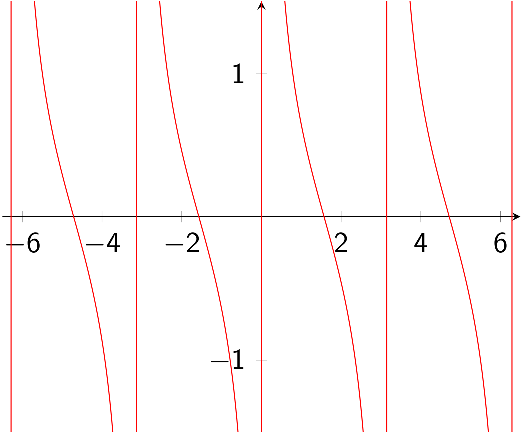
Gráficos



$$f(x) = \csc x$$

As linhas verticais são os valores onde as funções não são definidas. São chamadas **assíntotas**

Gráficos



$$f(x) = \cot x$$

As linhas verticais são os valores onde as funções não são definidas. São chamadas **assíntotas**

Funções Trigonométricas Inversas

Arco seno $\operatorname{sen}\theta = x \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arcsen} x$: θ é o arco cujo seno vale x $(\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$;

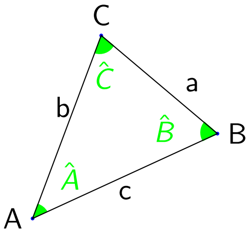
Arco cosseno $\cos\theta = x \Leftrightarrow \theta = \arccos x$: θ é o arco cujo cosseno vale x $(0 \leq \theta \leq \pi)$;

Arco tangente $\tan\theta = x \Leftrightarrow \theta = \arctan x$: θ é o arco cuja tangente vale x $(\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$.

Leis Trigonométricas Gerais

Lei dos Senos

$$\frac{\text{sen } \hat{\mathrm{A}}}{a} = \frac{\text{sen } \hat{\mathrm{B}}}{b} = \frac{\text{sen } \hat{\mathrm{C}}}{c}$$



Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{\mathrm{A}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{\mathrm{B}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{\mathrm{C}}$$

Até a próxima!!!