

Limites: Cálculo pela definição

JAN001A - Cálculo I

Prof.^o Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons “Atribuição-Compartilhalgual 4.0 Internacional”.



Exercício:

Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5$ pela definição:

R.: Primeiro: Vamos estimar, calculando $f(x) = 4x - 5$ qual é o valor para o qual a imagem se aproxima ao calcularmos $f(x)$ em valores x do domínio próximos de $a = 3$.

Pela Esquerda		Pela Direita	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
2	3	4	11
2,5	5	3,5	9
2,9	6,6	3,1	7,4
2,99	6,96	3,01	7,04
2,999	6,996	3,001	7,004

Assim, estimamos por aproximação que $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5$ deveria ser 7.

Exercício:

Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5$ pela definição:

R.: Segundo: Rascunho. A definição afirma que “para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ que atende à implicação

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Temos $a = 3$, $f(x) = 4x - 5$, esperamos que L seja 7 e precisamos de um δ (de preferência atrelado ao ϵ).

De $|f(x) - L| < \epsilon$ temos $|4x - 5 - 7| < \epsilon$
 $\implies |4x - 12| < \epsilon$. Colocando 4 em evidência, fica $|4(x - 3)| < \epsilon$. Como $|ab| = |a| \cdot |b|$, fica $|4| \cdot |x - 3| < \epsilon$.

Sendo 4 positivo, seu módulo é o próprio 4 e, dividindo por esse valor, obtemos $|x - 3| < \frac{\epsilon}{4}$. Como $a = 3$, se tomarmos $\delta = \frac{\epsilon}{4}$, é possível de $0 < |x - 3| < \delta = \frac{\epsilon}{4}$ chegar em $|f(x) - L| = |(4x - 5) - 7| < \epsilon$.

Exercício:

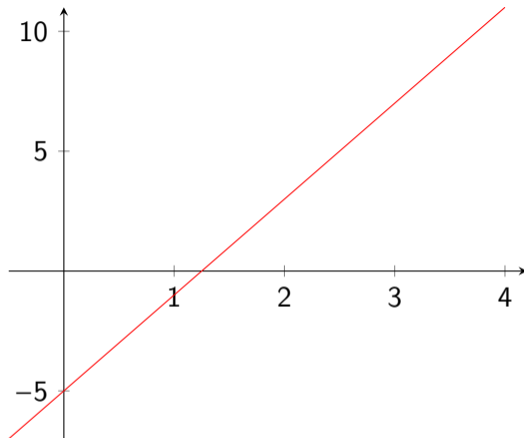
Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5$ pela definição:

R.: Terceiro: Demonstração.

Para qualquer $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ e

$$\begin{aligned} 0 < |x - 3| < \delta &\implies 0 < |x - 3| < \frac{\epsilon}{4} \quad (\text{Valor de } \delta = \frac{\epsilon}{4}) &&\implies 0 < 4|x - 3| < \epsilon \quad (\cdot 4) \\ &\implies 0 < |4(x - 3)| < \epsilon \quad (\text{prop. módulo}) &&\implies 0 < |4x - 12| < \epsilon \quad (\text{distr.}) \\ &\implies 0 < |4x - 5 - 7| < \epsilon \quad (\text{reescr. } 12 = 5 + 7) &&\implies 0 < |f(x) - 7| < \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, pela definição, $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5 = 7$.



Bons Estudos!!!