

# Derivadas: Derivação Logarítmica

JLC062 \ JCE025

---

Prof.<sup>o</sup> Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul  
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons “Atribuição-Compartilhalgual 4.0 Internacional”.



# Derivação Logarítmica

# Derivação Logarítmica

Usar propriedades para facilitar o trabalho

---

$$\text{Derivar } y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \quad \text{R.:}$$

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \left( \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \right) = \ln \left( x^{3/4}\sqrt{x^2+1} \right) - \ln (3x+2)^5 = \ln \left( x^{3/4} \right) + \ln \left( x^2+1 \right)^{1/2} - \ln (3x+2)^5 \\ &= \frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{2} \ln \left( x^2+1 \right) - 5 \ln (3x+2)\end{aligned}$$

Derivando

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - 5 \cdot \frac{3}{3x+2} = \frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}$$

# Derivação Logarítmica

Usar propriedades para facilitar o trabalho

---

$$\text{Derivar } y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{3(x^2+1)(3x+2) + x \cdot 4x(3x+2) - 15 \cdot 4x(x^2+1)}{4x(x^2+1)(3x+2)}$$

$$= \frac{9x^3 + 6x^2 + 9x + 6 + 12x^3 + 8x^2 - 60x^3 - 60x}{4x(x^2+1)(3x+2)} = \frac{-39x^3 + 14x^2 - 51x + 6}{4x(x^2+1)(3x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{-39x^3 + 14x^2 - 51x + 6}{4x(x^2+1)(3x+2)} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \cdot \frac{-39x^3 + 14x^2 - 51x + 6}{4x(x^2+1)(3x+2)}$$

$$= \frac{-39x^3 + 14x^2 - 51x + 6}{4(3x+2)^6 \sqrt[4]{x}\sqrt{x^2+1}}$$

# Derivação Logarítmica

## Passos

---

### Sequência para Derivação Logarítmica

- De  $y = f(x)$  tome o logaritmo natural, obtendo  $\ln y = \ln(f(x))$ ;
- Use todas as propriedades possíveis de  $\ln$  para simplificar as expressões;
- Derive implicitamente em relação à  $x$ ;
- Isole  $y'$  na equação resultante.

# Refazendo

# Refazendo

## Derivada do Produto

---

$$y = f \cdot g$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln(f \cdot g) = \ln f + \ln g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = \frac{f'g + fg'}{fg}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{f'g + fg'}{fg} = fg \cdot \frac{f'g + fg'}{fg} = f'g + fg'$$

# Refazendo

## Derivada do Quociente

---

$$y = \frac{f}{g}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{f}{g}\right) = \ln f - \ln g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = \frac{f'g - fg'}{fg}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{f}{g} \cdot \frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

## Potência de Função $f(x)^{g(x)}$

## Potência de Função $f(x)^{g(x)}$

---

$$y = f^g$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln(f^g) = g \ln f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = g' \ln f + g \cdot \frac{f'}{f} = \frac{fg' \ln f + f'g}{f}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left( \frac{fg' \ln f + f'g}{f} \right) = f^g \left( \frac{fg' \ln f + f'g}{f} \right)$$

Derivar  $y = x^{\sqrt{x}}$

## Constante $e$ como um limite

## Constante e como um limite

De  $f(x) = \ln x$ , temos  $f'(x) = \frac{1}{x}$  e  $f'(1) = 1$ . Calculando o limite:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\ln(1+h))$$
$$\Rightarrow 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \ln(1+h)^{1/h} \right) = \ln \left( \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} \right) \Rightarrow e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$$

Fazendo  $n = \frac{1}{h}$  temos que  $h \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$  e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

# Ganhos da Derivação Logarítmica

# Ganhos da Derivação Logarítmica

---

- Produto vira soma
- Quociente vira diferença
- Potência de Funções vira Produto

**Bons Estudos!!!**