

Derivadas: Funções Hiperbólicas

JLC062 \ JCE025

Prof.^o Carlos Galvão

Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Esta obra tem a licença Creative Commons “Atribuição-Compartilhual 4.0 Internacional”.



Definições

Definições

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\tanh x}$$

Definições

Identities Hiperbólicas

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \sinh y \cdot \cosh x$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$

Derivadas

Derivadas

Derivar $\sinh x$

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x - e^{-x}/2)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(e^x - e^{-x})}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{de^x}{dx} - \frac{de^{-x}}{dx} \right) = \frac{1}{2} (e^x - (-e^{-x})) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Derivadas

Derivar $\cosh x$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x + e^{-x}/2)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(e^x + e^{-x})}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{de^x}{dx} + \frac{de^{-x}}{dx} \right) = \frac{1}{2} (e^x + (-e^{-x})) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Trigonométricas Hiperbólicas Inversas

Trigonométricas Hiperbólicas Inversas

arcsenh x

$$y = \operatorname{arcsenh} x \implies \sinh y = x$$

$$\implies \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \implies e^y - \frac{1}{e^y} = 2x \implies e^{2y} - 1 = 2xe^y. \text{ Fazendo } z = e^y, \text{ temos } z^2 - 2xz - 1 = 0.$$

$$\implies z = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Para $x \geq 0$ temos $x = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$ e, para $x < 0$, $x < \sqrt{(x)^2} < \sqrt{x^2 + 1}$. Assim $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ e, como não há expoente que torne $e^y < 0$, esse valor é desconsiderado.

$$\text{Portanto } z = e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \implies y = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right|.$$

$$\therefore \operatorname{arcsenh} x = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right|$$

Trigonométricas Hiperbólicas Inversas

arccosh x

$$y = \operatorname{arccosh} x \implies \cosh y = x$$

$$\cosh y + \sinh y = e^y \text{ e } \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \implies \sinh y = e^y - x \text{ e } \sinh^2 y = x^2 - 1.$$

$$\text{Assim, } (e^y - x)^2 = x^2 - 1 \implies e^y - x = \sqrt{x^2 - 1} \implies e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \operatorname{arccosh} x = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right|$$

Trigonométricas Hiperbólicas Inversas

Derivadas de Trigonométricas Hiperbólicas Inversas

Pela Função inversa:

$$y = \operatorname{arcsenh} x \implies \operatorname{senh} y = x$$

$$\implies \frac{d(\operatorname{senh} y)}{dx} = \frac{dx}{dx} \implies \operatorname{cosh} y \frac{dy}{dx} = 1 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{cosh} y}$$

Como $\operatorname{cosh}^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \implies \operatorname{cosh}^2 y - x^2 = 1 \implies \operatorname{cosh} y = \sqrt{1+x^2}$ temos

$$\therefore \frac{d(\operatorname{arcsenh} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Trigonômicas Hiperbólicas Inversas

Derivadas de Trigonômicas Hiperbólicas Inversas

Pela definição da função inversa com ln:

$$y = \operatorname{arcsenh} x = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| \right)}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{d\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\therefore \frac{d(\operatorname{arcsenh} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Para as demais, segue-se da mesma forma.

Resumo Derivadas de Trigonométricas Hiperbólicas

Resumo Derivadas de Trigonométricas Hiperbólicas

$$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x$$

$$\frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x$$

$$\frac{d \tanh x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d \operatorname{arcsinh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d \operatorname{arcosh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d \operatorname{arctanh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

Bons Estudos!!!