Aplicações de Integral: Volume de Sólidos

Fatiamento e Cascas Cilíndricas

Prof.º Carlos Galvão

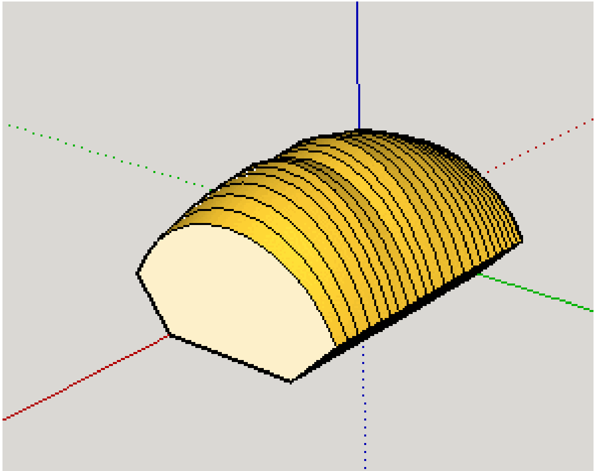
Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Estrutura

1. Volume de Sólidos
   - Introdução
   - Volume de Sólidos por fatiamento
2. Sólidos de Revolução
   - Rotação em torno de um eixo
   - Volume por Fatiamento
   - Volume por Cascas Cilíndricas

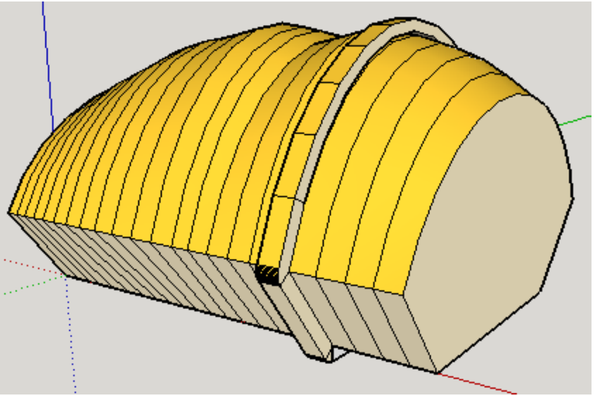
Introdução

Uma aplicação das integrais de uma variável é o cálculo de volume de um sólido.

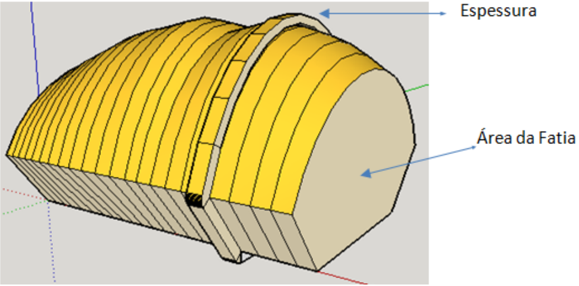


Volume de Sólidos por fatiamento

A primeira técnica que apresentamos aqui é o "fatiamento". Nesta técnica, "fatiamos" um sólido, sabendo que o volume do sólido será a soma do volume de cada fatia.



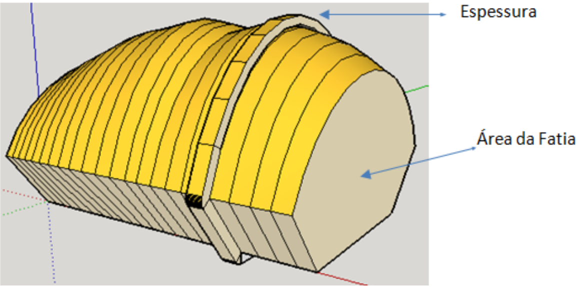
Nesta técnica, "fatiamos" um sólido, sabendo que o volume do sólido será a soma do volume de cada fatia. O Volume de cada fatia é aproximadamente a sua espessura vezes a área da fatia.



Sendo $A(x)$ uma função que calcule a área da face, e Δx a espessura da fatia, temos o volume da fatia dado por $V_i = A(x)\Delta x$.

Assim, o volume do sólido todo será a soma dos volumes das n fatias

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x$$

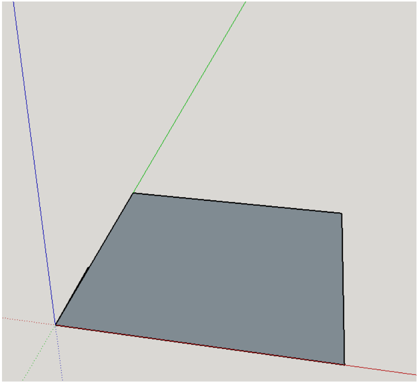


Considerando que, no gráfico, a primeira fatia começa em a e a última termina em b e fazendo o número de fatias crescer ($n \to \infty$), a espessura das fatias tende a 0 ($\Delta x \to dx$) e

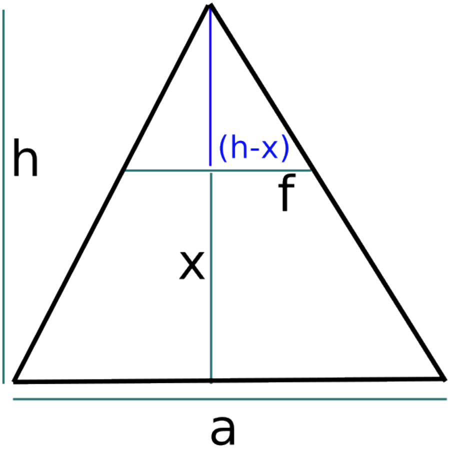
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Assim, calculando uma integral, conseguimos obter o volume do sólido.

Mostrar a fórmula de cálculo de volume de uma pirâmide de base quadrada, com aresta da base *a*.



A fórmula da área do quadrado é a^2. O tamanho das arestas diminui de forma linear. Para $x = 0$, a aresta é a e a área a^2. Para $x = h$ temos o vértice, ou seja área 0. Precisamos da relação entre a posição da fatia e sua aresta.



Sendo f a aresta da fatia em uma certa altura, temos que

$$\frac{h}{a} = \frac{h-x}{f}$$

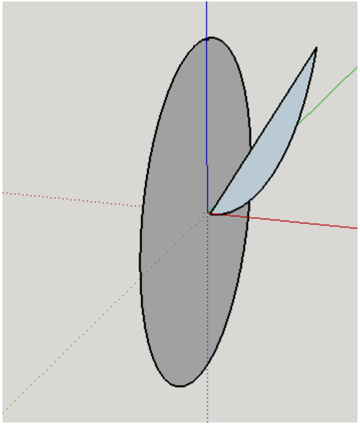
Assim, $f = \dfrac{a(h-x)}{h}$ e a área da fatia que está na altura x será

$$A(x) = \left(\frac{a(h-x)}{h}\right)^2$$

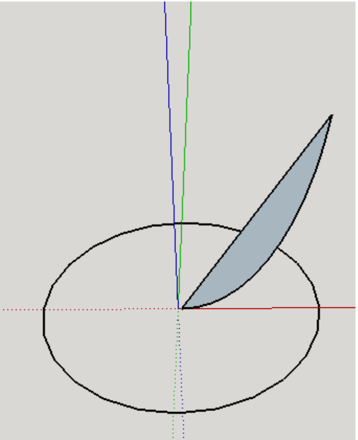
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^h A(x)dx = \int_0^h \left(\frac{a(h-x)}{h}\right)^2 dx = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h (x-h)^2 dx \\
&= \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2 - 2hx - h^2 dx = \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3} - 2h\frac{x^2}{2} + h^2 x\right]_0^h \\
&= \frac{a^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - \cancel{2}h\frac{h^2}{\cancel{2}} + h^2 \cdot h\right) = \frac{a^2}{\cancel{h^2}} \cdot h^{\cancel{3}}\left(\frac{1}{3}\cancel{-1+1}\right) = \frac{a^2 h}{3}
\end{aligned}
$$

Rotação em torno de um eixo

Uma área pode ser rotacionada em torno dos eixos, ou em torno de alguma outra reta no gráfico, gerando um sólido



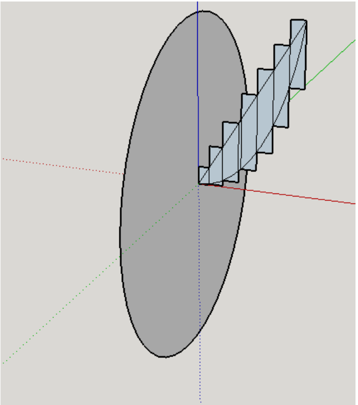
Em torno do eixo x



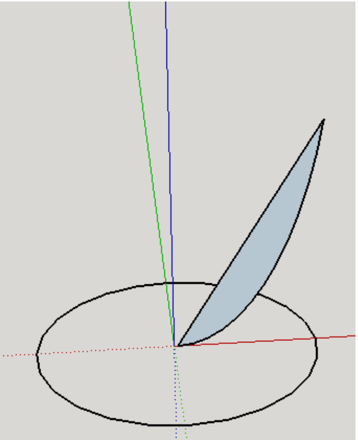
Em torno do eixo y

Volume por Fatiamento

As fatias de um sólido de revolução normalmente são círculos, ou "arruelas" (roscas). Área do Círculo: πr^2



Em torno do eixo x



Em torno do eixo y

Em torno do eixo x, a posição das fatias varia em um intervalo no eixo x.
Se a fatia for um círculo

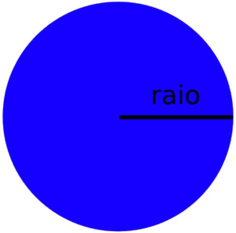
$$V = \int_a^b \pi(\text{raio})^2 dx$$

sendo o raio uma função de x.

Em torno do eixo y, a posição das fatias varia em um intervalo no eixo y.
Se a fatia for um círculo

$$V = \int_a^b \pi(\text{raio})^2 dy$$

sendo o raio uma função de y.



Em torno do eixo x, a posição das fatias varia em um intervalo no eixo x.
Se a fatia for uma rosca

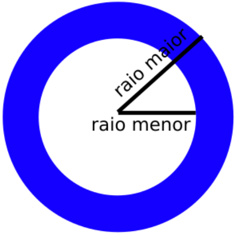
$$V = \int_a^b \pi \left[(\text{r. maior})^2 - (\text{r. menor})^2 \right] dx$$

sendo os raios funções de x.

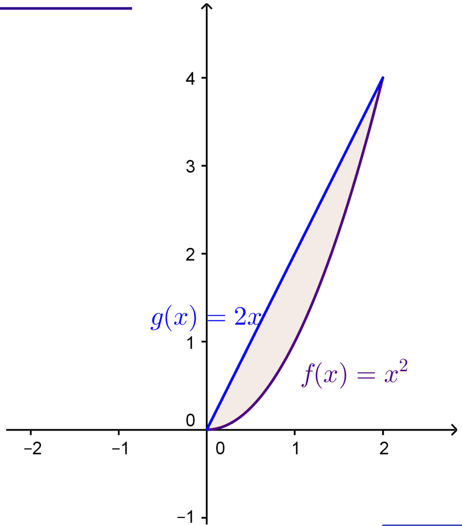
Em torno do eixo y, a posição das fatias varia em um intervalo no eixo y.
Se a fatia for uma rosca

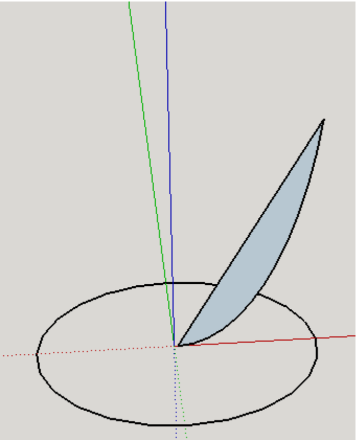
$$V = \int_a^b \pi \left[(\text{r. maior})^2 - (\text{r. menor})^2 \right] dy$$

sendo os raios funções de y.



Calcular o volume do sólido gerado pela rotação da diferença entre as funções $g(x) = 2x$ e $f(x) = x^2$ em torno do eixo y pelo método do Fatiamento.





Precisamos achar os pontos de interseção das funções para obter o intervalo.

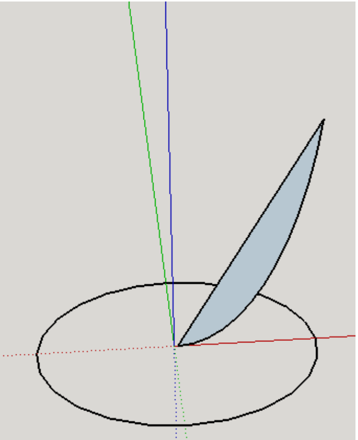
$$2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Como a rotação é em torno de y, as fatias tem uma variação em y, em formato de rosca. Temos:

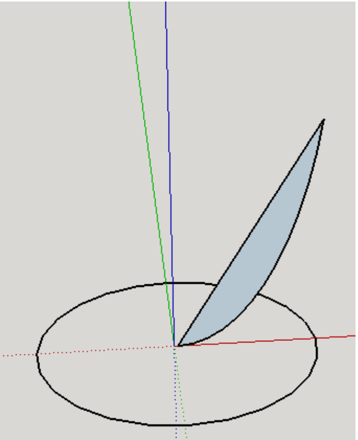
$$\begin{cases} x = 0 & \Longrightarrow \quad y = 0 \\ x = 2 & \Longrightarrow \quad y = 4 \end{cases}$$

E este intervalo $[0, 4]$ será nosso intervalo de integração.



Para as variações dos raios (as funções que usaremos), é preciso reescrever as funções que temos (que estão em x) para a variável que usaremos (no caso, y).

$$\begin{cases} \text{r. menor} : y = 2x & \implies x = \dfrac{y}{2} \\ \text{r. maior} : y = x^2 & \implies x = \sqrt{y} \end{cases}$$



Assim,

$$V = \int_0^4 \pi \left[(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \right] dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4} \right) dy$$

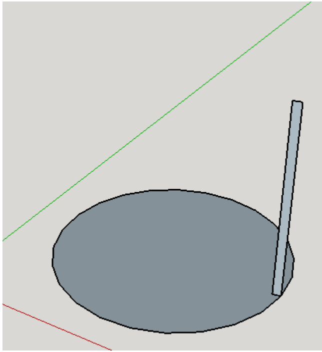
$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{3} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{12} - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{12} \right)$$

$$= \pi \left(8 - \frac{16}{3} \right) = \frac{8\pi}{3}$$

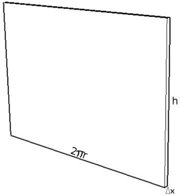
Volume por Cascas Cilíndricas

Outra forma de se calcular volumes de sólidos de revolução é através do método das cascas cilíndricas

Outra forma de se calcular volumes de sólidos de revolução é através do método das cascas cilíndricas



Formação da casca



Planificação da Casca

O volume do sólido é a soma dos volumes das cascas.
Cada casca pode ser planificada.
Comprimento da casca: $2\pi r$, sendo r raio da casca.
Altura: h, normalmente dada como função.
Espessura: Δx, que tende a dx quando o número de fatia tende ao infinito.

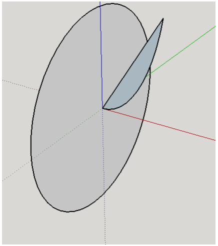
Temos então uma forma para cálculo de volume:

$$V_i = 2\pi(\text{raio da casca}) \cdot (\text{altura da casca}) \cdot \Delta x \text{ e } V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Semelhante ao fatiamento, teremos uma integral que pode ser expressa genericamente como

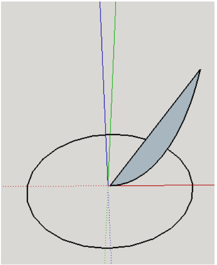
$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca}) \cdot (\text{altura da casca})d(\text{``variável''})$$

O raio da casca é a distância entre a casca calculada e o eixo de rotação. O intervalo de integração $[a, b]$ é dado pela variação deste raio, sendo **a** o menor raio possível e **b** o maior raio.
A altura da casca muitas vezes tem relação com a função que originou o sólido, mas nem sempre é a própria função.
A "variável" depende do eixo/reta no qual foi feita a rotação



Em torno do eixo x

$$V = \int_a^b 2\pi \cdot r(y) \cdot (\text{altura da casca}) dy$$



Em torno do eixo y

$$V = \int_a^b 2\pi \cdot r(x) \cdot (\text{altura da casca}) dx$$

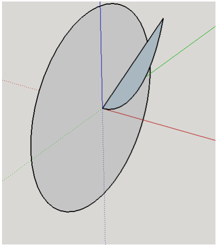
Temos então uma forma para cálculo de volume:

$$V_i = 2\pi(\text{raio da casca}) \cdot (\text{altura da casca}) \cdot \Delta x \text{ e } V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Semelhante ao fatiamento, teremos uma integral que pode ser expressa genericamente como

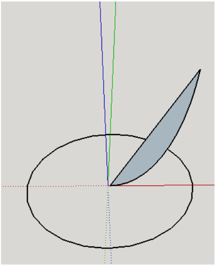
$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca}) \cdot (\text{altura da casca}) d(\text{“variável”})$$

O raio da casca é a distância entre a casca calculada e o eixo de rotação. O intervalo de integração $[a, b]$ é dado pela variação deste raio, sendo **a** o menor raio possível e **b** o maior raio.
A altura da casca muitas vezes tem relação com a função que originou o sólido, mas nem sempre é a própria função. A “variável” depende do eixo/reta no qual foi feita a rotação



Em torno do eixo x

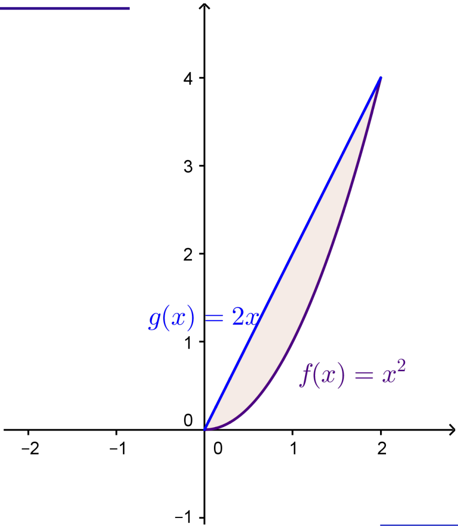
$$V = \int_a^b 2\pi \cdot r(y) \cdot (\text{altura da casca})dy$$



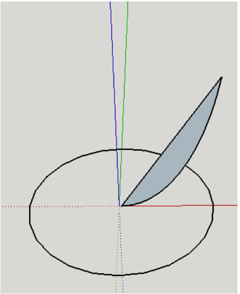
Em torno do eixo y

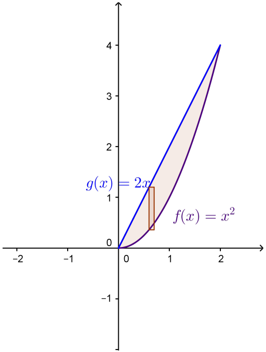
$$V = \int_a^b 2\pi \cdot r(x) \cdot (\text{altura da casca})dx$$

Calcular o volume do sólido gerado pela rotação da diferença entre as funções $g(x) = 2x$ e $f(x) = x^2$ em torno do eixo y pelo método de Cascas Cilíndricas. Já temos que os pontos de interseção são $x = 0$ e $x = 2$. Este será o intervalo de variação do raio da casca e, por isso, o intervalo de integração.

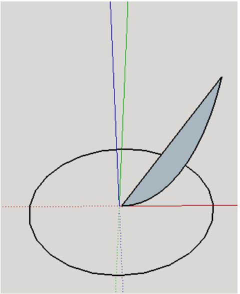


A altura da função deve ser analisada pelo gráfico (esboço).





Para o caso em questão, a altura da casca será $g(x) - f(x)$



Para este caso o raio da casca será o próprio x, por ser uma rotação em torno de y com a figura começando em 0, à direita do eixo. Para cada caso é preciso analisar (desenhar uma casca) para compreender o tamanho do raio.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 2\pi \cdot x \cdot (g(x) - f(x))dx = 2\pi \int_0^2 x \cdot \left(2x - x^2\right) dx \\
&= 2\pi \int_0^2 2x^2 - x^3 dx = 2\pi \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \left(2\frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4}\right) \\
&= 2\pi \left(\frac{16}{3} - 4\right) = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Bons Estudos!!!