MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
Departamento de Geomática

Disciplina: PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS II
Código: GA144

CH Total:45 h

CH Semanal 03 h

Morfologia Matemática

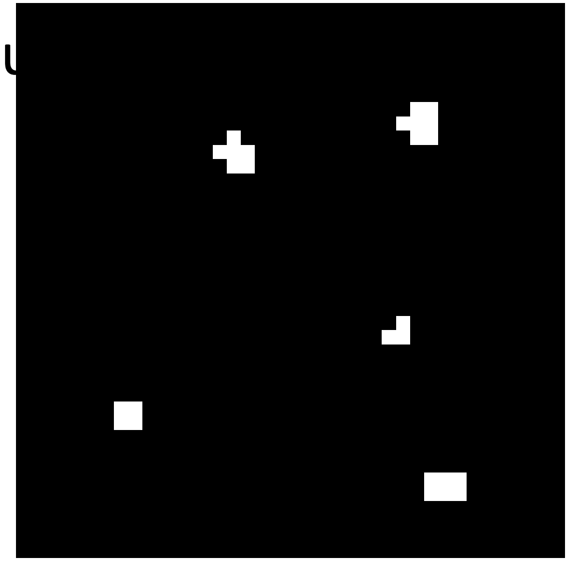
Morfologia Matemática

- morfologia – análise da forma e as formas dos objetos presentes na imagem.
- Matemática - análise baseada em princípios matemáticos como a teoria dos conjuntos, ..
- Teoria para análise de estruturas espaciais em imagens.
-

origem

- Matheron e Serra (nos anos 60) estudavam meios porosos e perceberam que estes podiam ser representados por dois estados a) poro b) não poro.
- Representando o meio como uma matriz, os poros são as células ocupadas onde eles ocorrem, estes locais conformariam um "conjunto" de pontos na matriz.

- Esta situação pode ser processada aplicando a teoria de conju como união, interseção, complemento e translação.

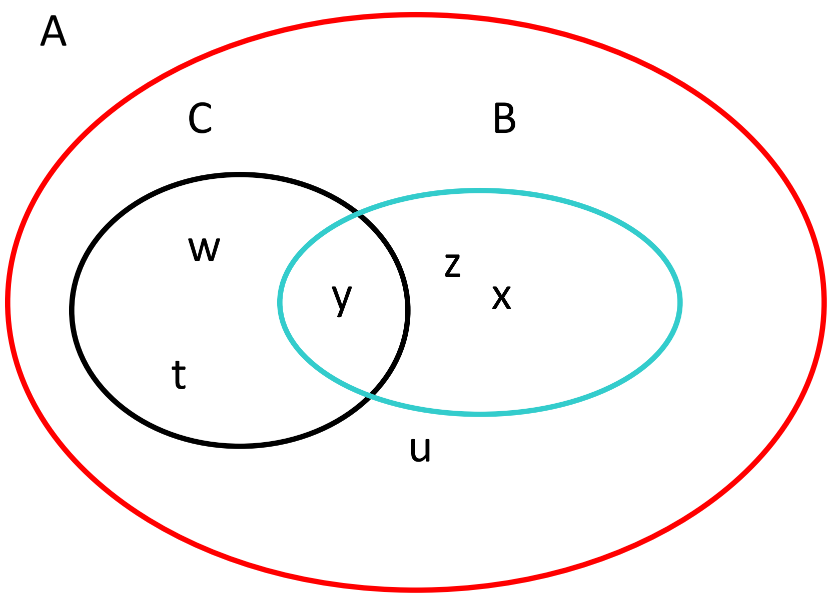


- *Elements pour une theorie des milieux poreux* (1967), G. Matheron
- Propôs usar a morfologia matemática para
- processar imagens binárias.

Morfologia matemática

- Então:
- A morfologia matemática é uma aplicação da teoria de conjuntos no processamento de imagens.
- Serve para manipular a forma dos objetos presentes na imagem (Morfologia), usando lógica de conjuntos (Matemática).
- É principalmente usada para:
  - pré-processamento
  - realce (esqueleto, redução, engrossamento..)
  - segmentação de objetos do fundo;
  - Obtenção de descritores de segmentos

Teoria de conjuntos



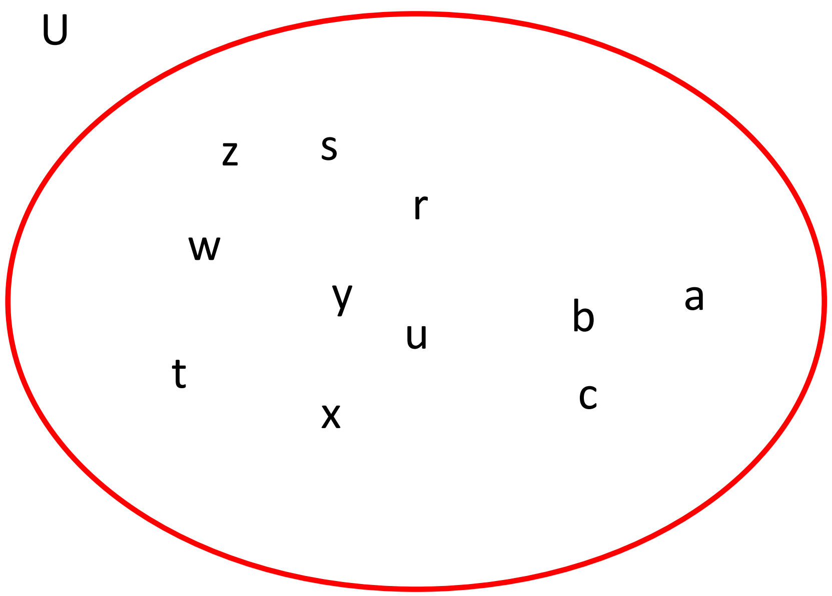
x Є A
w Є C e z Є B

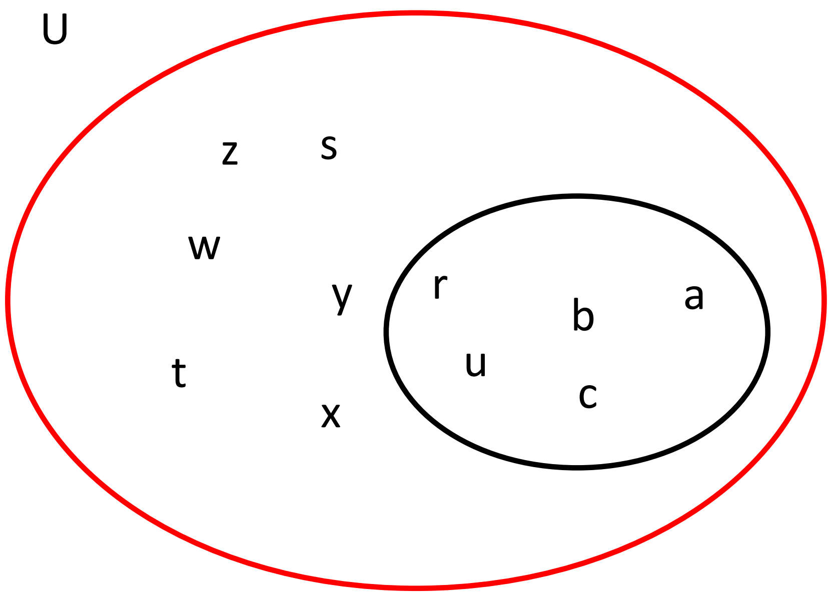
C /\ B = y
A \/ B = w,x,y,z
A /\ C = ø
B Є A

- A relação entre os elementos de conjuntos pode ser analisada em termos de
- união (\/), intercessão (/\) e negação (~) e a relação de subconjunto (Є)

Teoria de conjuntos

- Dado um universo de elementos “U”, pode-se dizer que todos os elementos pertencem a este universo
- Também pode-se definir um subconjunto dentro deste Universo
- A={a,b,c,r,u}





- A pertinência (ou grau de associação) entre os elementos e o conjunto é binária e pode ser formalizada com a lógica Booleana.

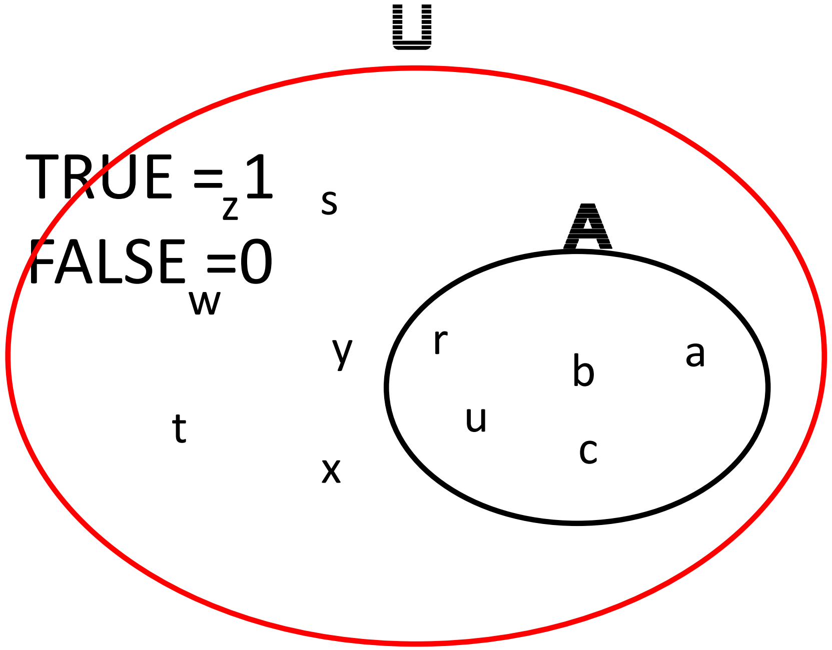
∉

a) O elemento pertence ao conjunto “b” □ “A”

b) O elemento não pertence ao conjunto “x” “A”

Vamos usar a notação “x” ~□ “A”

- a) O elemento pertence ao conjunto: TRUE =1
- b) O elemento não pertence ao conjunto: FALSE =0



a) F(b,A)=1

b) F(X,A)=0

- Dados dois conjuntos dentro de um universo,
- A={a, b, c, r, u}
- B={r, t, u, w, x, y }
- podem existir elementos que:

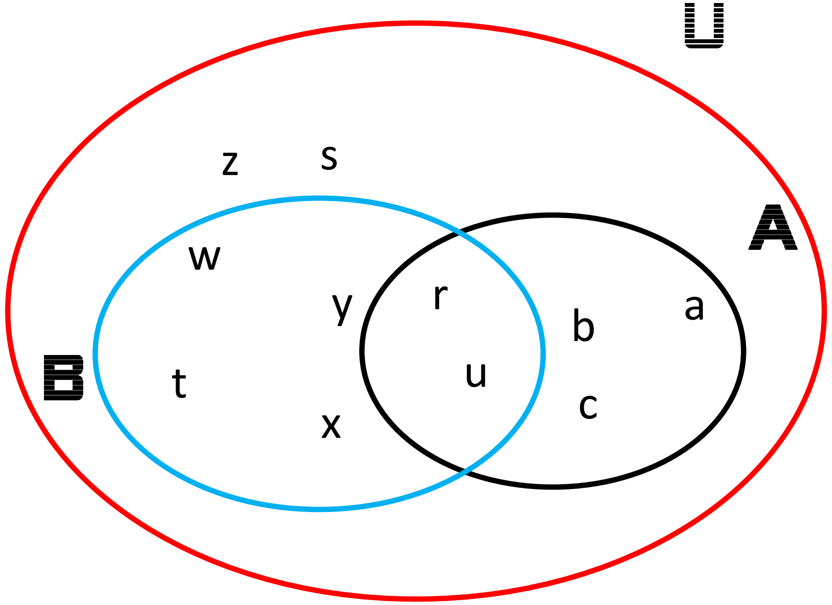
a) Pertencem apenas ao primeiro conjunto “A”: b ⍰ A

b) Pertencem apenas ao segundo conjunto “B”: y ⍰ B

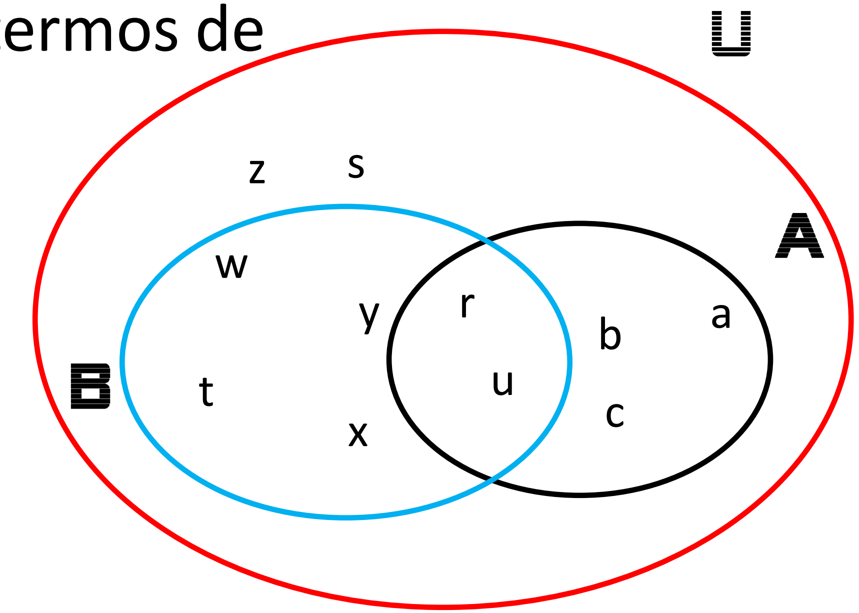
c) Pertencem aos dois conjuntos r ⍰ A and r ⍰ b

d) Não pertencem a nenhum conjunto

```
a.  F(b,A)= 1        F(b,B)= 0
b.  F(y,A)= 0        F(y,B)= 1
c.  F(r,A)= 1        F(r,B)= 1
d.  F(s,A)= 0        F(s,B)= 0
```

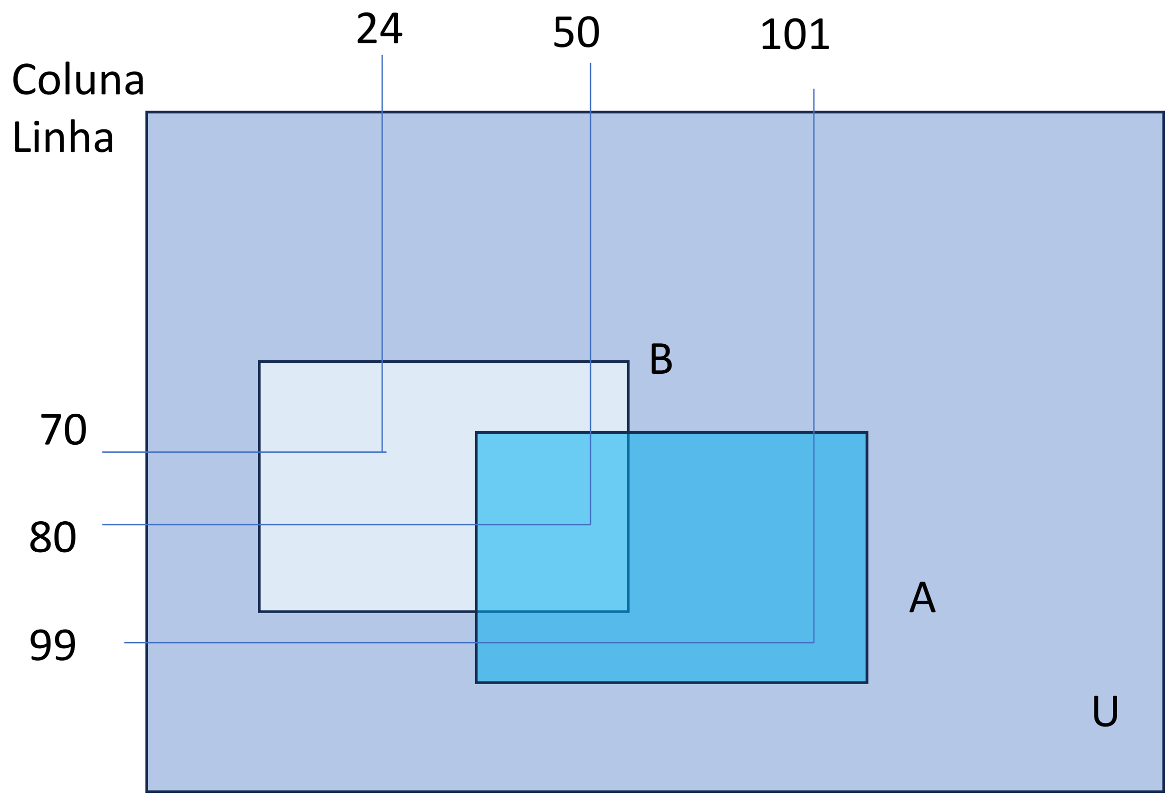


- Além da relação de pertinência (∈) e a negação (~) , a relação entre os elementos de conjuntos pode ser analisada em termos de
- união (U) e a intercessão (∩)
- Exemplo: Dados dois conjuntos
- A={a, b, c, r, u}
- B={r, t, u, w, x, y }



- A união dos dois conjuntos é formada por
- todos os elementos que pertencem a um destes conjuntos ou a ambos.
- (A U B) = {a, b, c, r, u, t, w, x, y }
- interseção dos dois conjuntos é formada pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos
- (A ∩ B) = { r, u}

Se o universo fosse uma matriz?



As mesmas relações podem ser aplicadas

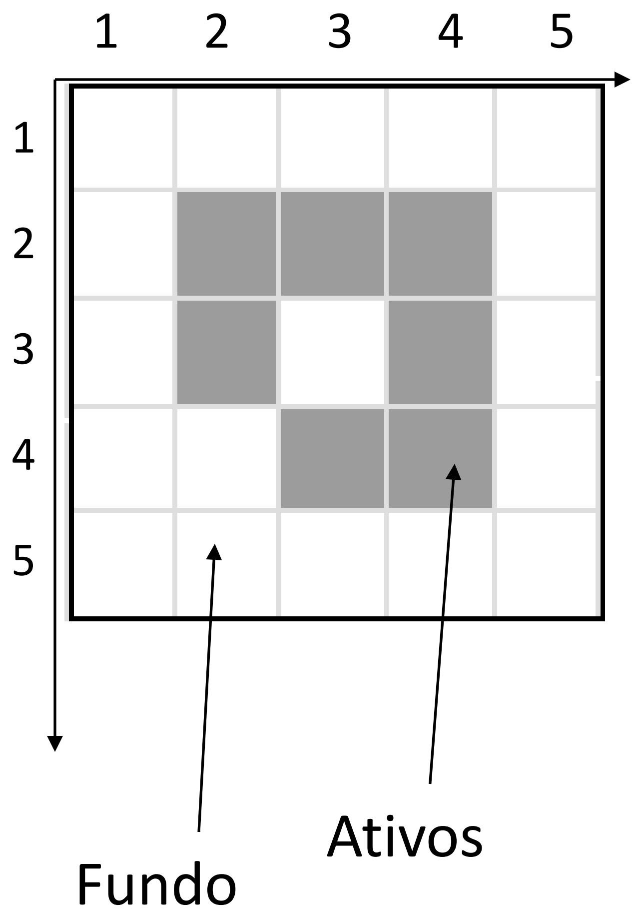
Os elementos, neste caso, são os pixels e eles podem ser descritos pelas suas coordenadas Linha, Coluna: Ex: (70,24) (linha, coluna)

- (70,24) ∈ B
- (99,101) ∈ A
- (80,50) ∈ A (80,50) ∈ B ... ou também (80,50) ∈ A ∩ B

Imagem digital binária como conjunto...

- A imagem pode ser entendida como um conjunto de pixels com valores diferentes do fundo (ativos), dentro do sistema definido pelas coordenadas linha coluna da imagem (l,c).
- Exemplo:
- Conjunto de pixels ativos na imagem:

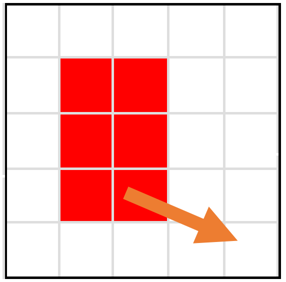
A={(2,2) (2,3) (2,4) (3,2) (3,4) ,(4,3) (4,4) }



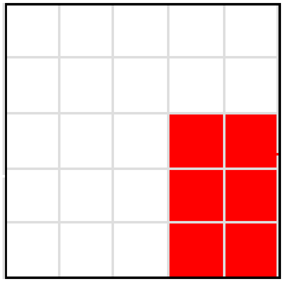
Translação

- Um conjunto pode sofrer o efeito da translação.
- Neste caso, todas as posições dos elementos do conjunto são deslocadas (em linhas e/ou colunas) Isto pode ser realizado, matematicamente, somando/diminuindo um vetor de translação ao conjunto
- Ex:
- v = vetor translação (Δl,Δc)
- v =(+1, +2)'

- (A+) = (A + v)



A



A+

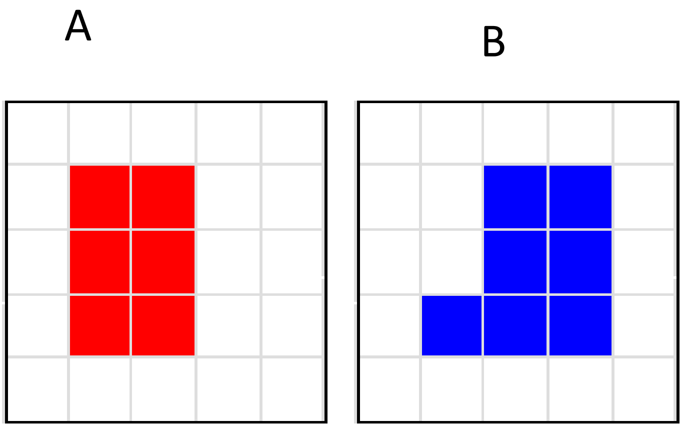
Operadores: ex União

Dois conjuntos (grades) podem ser combinados para gerar um terceiro, por exemplo através dos operadores

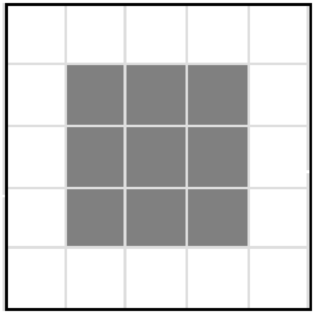
união (U) e a intercessão (∩)

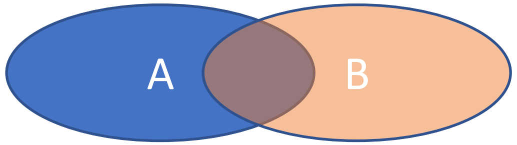
A U B

- Quais elementos (locais) tem valor ativo na imagem A **OU** na imagem B, u em ambas?

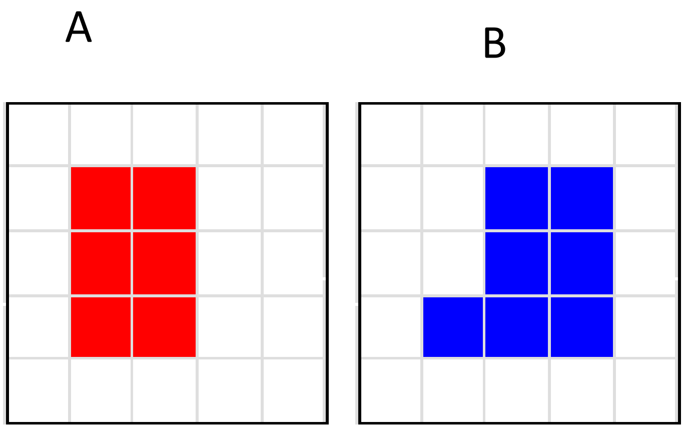


A U B =





Interseção



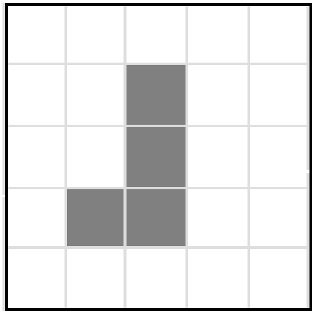
$A \cap B$

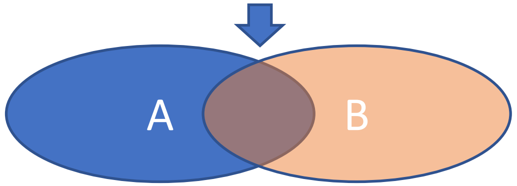
Quais locais tem valor ativo na imagem A **e** na imagem B?

Verificar a hipótese A=ativo e B=ativo, equivale a um “E” lógico.

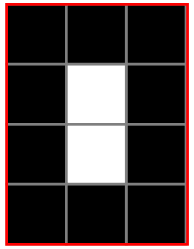
$A \cap B$: F(x,A)=1 AND F(x,B)=1

$A \cap B =$

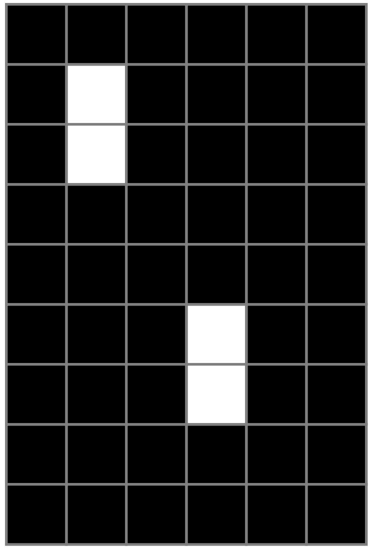




Juntando



A



B

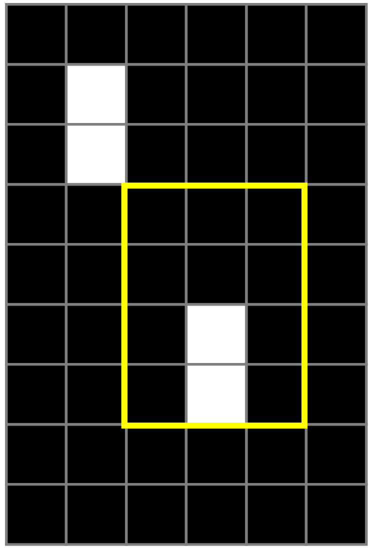
E se formos capazes de deslocar “A” ao longo de B?

(A+)= A+dx

Podemos verificar a veracidade de situações como

* (A U B) ou

* (A ∩ B)



Então, para cada deslocamento possível a hipótese pode ser verificada e o resultado armazenado na mesma posição da célula em uma imagem de saída

Exemplo: verifique se a interseção de A e B é plena se se desloca A com (+3,+2)

Quando ocorre plena interseção de A e B?

exemplo

A

1	0
1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0

Deslocando A ao longo de B, quantas vezes é verificada a hipótese $(A \cap B)$=VERDADEIRO para todos os elementos de A? Onde ocorre?

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0

1	0
1	1

Uma solução seria deslocar o conjunto A ao longo de B e verificar quando se satisfaz B ∩ A = B

exemplo

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0
0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	**1**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	**1**	**1**	0	**1**	0	0	0	0
0	**1**	0	0	0	**1**	**1**	**1**	0	0
0	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0	0
0	0	**1**	**1**	0	0	0	**1**	0	0

1	0
1	1

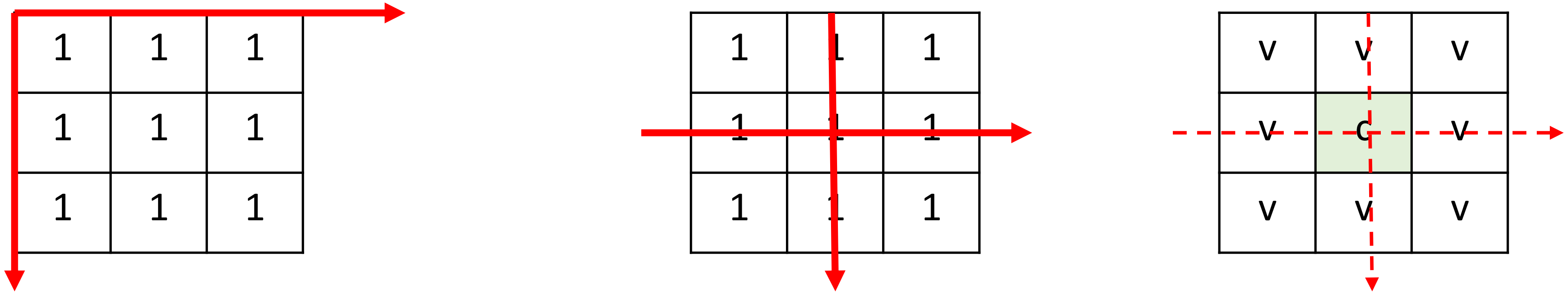
resultado

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Elemento estruturante

- Uma operação de morfologia matemática consiste em deslocar uma pequena matriz ao longo da imagem e verificar um teste lógico em cada posição possível.
- A matriz menor é chamada de *template* ou Elemento Estruturante).
- Para efetuar a translação desta pequena matriz, considera-se sua origem no seu "elemento central".

- Exemplo de elemento estruturante simples, um quadrado 3x3:



Elementos estruturantes...

- Quadrado

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

- "plus"

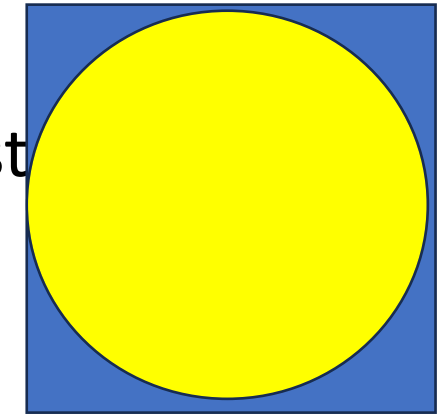
0	1	0
1	1	1
0	1	0

- Linha

0	0	0
1	1	1
0	0	0

1	1	1

- Disco (aproximado em um rast



	1	1	1	
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
	1	1	1	

exemplo

Central ou referência →

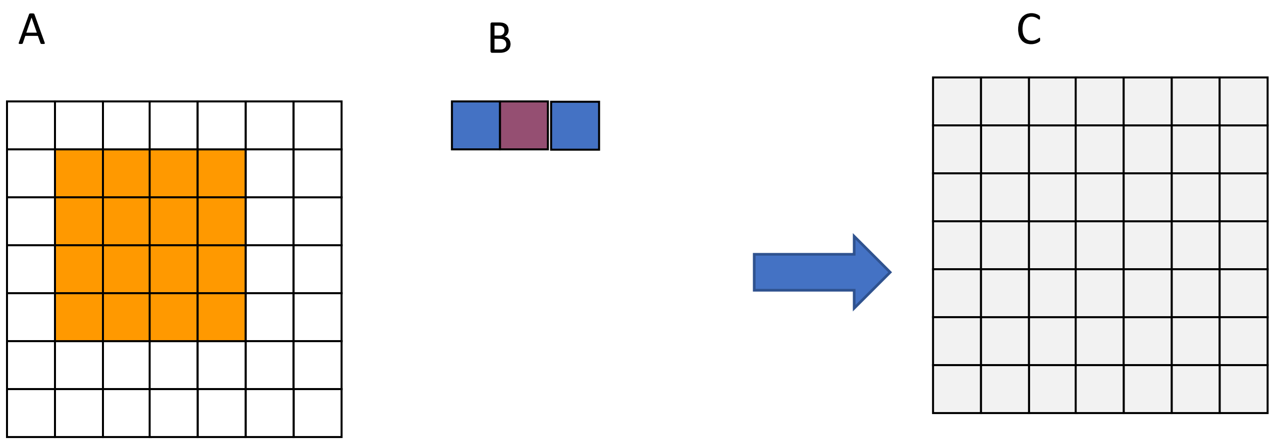
1	0
1	1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

O resultado é uma nova imagem binária

Exemplo, com interseção...



C = A ∩ B

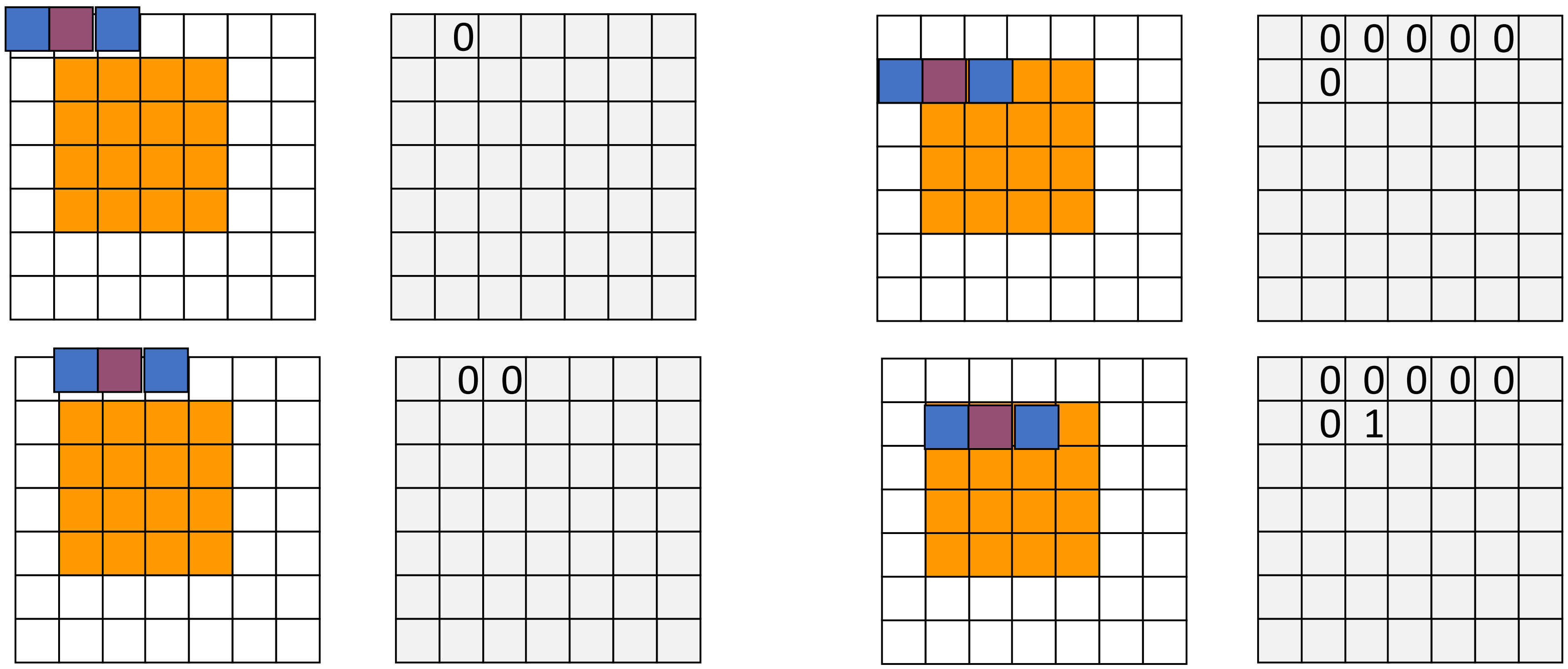
C = 1 se A ∩ B for verdadeiro;

0 se A ∩ B for falso.

Exemplo,

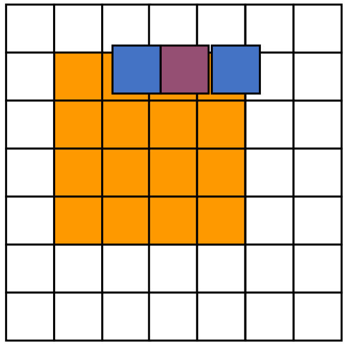
C=A ∩ B+

Por que... B+ ?
Que significa isto?

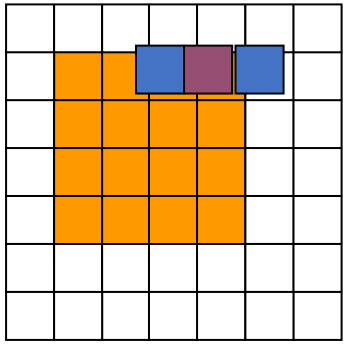


Exemplo,

A ∩ B+ = ?



	0	0	0	0	0	
	0	1	1			



	0	0	0	0	0	
	0	1	1	0		

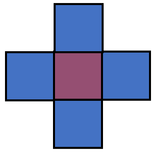
C

	0	0	0	0	0	
	0	1	1	0	0	
	0	1	1	0	0	
	0	1	1	0	0	
	0	1	1	0	0	
	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	

Exemplo

O deslocamento do elemento estruturante ao longo da imagem e o tipo de operação que é efetuada em cada ponto imprimem mudanças nas formas da imagem.

- O que aconteceria se o elemento estruturante fosse:



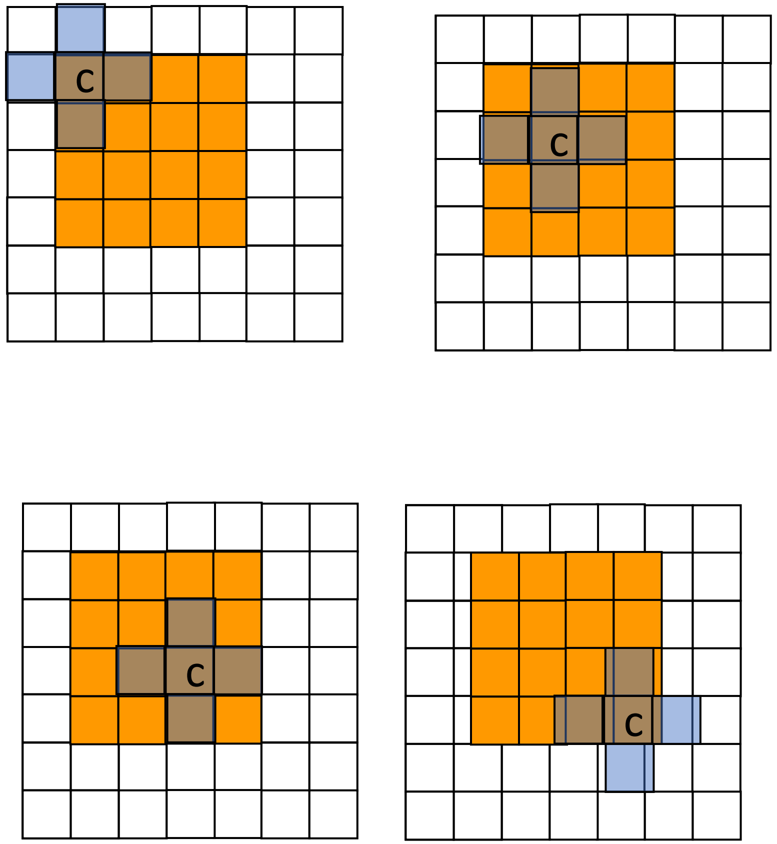
B

0	1	0
1	1	1
0	1	0

- E se a operação fosse:

  $C = A \cap B+$?

A ∩ B+



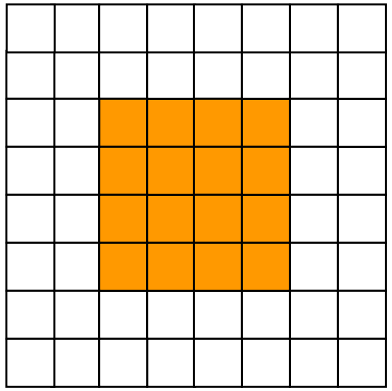
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Poderíamos dizer:
a hipótese é verdadeira se o elemento estruturante deslocado está “contido” no conjunto da imagem

Exemplo

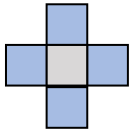
- E se a operação fosse "União"?

C=A U B+;



A

B



0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

A

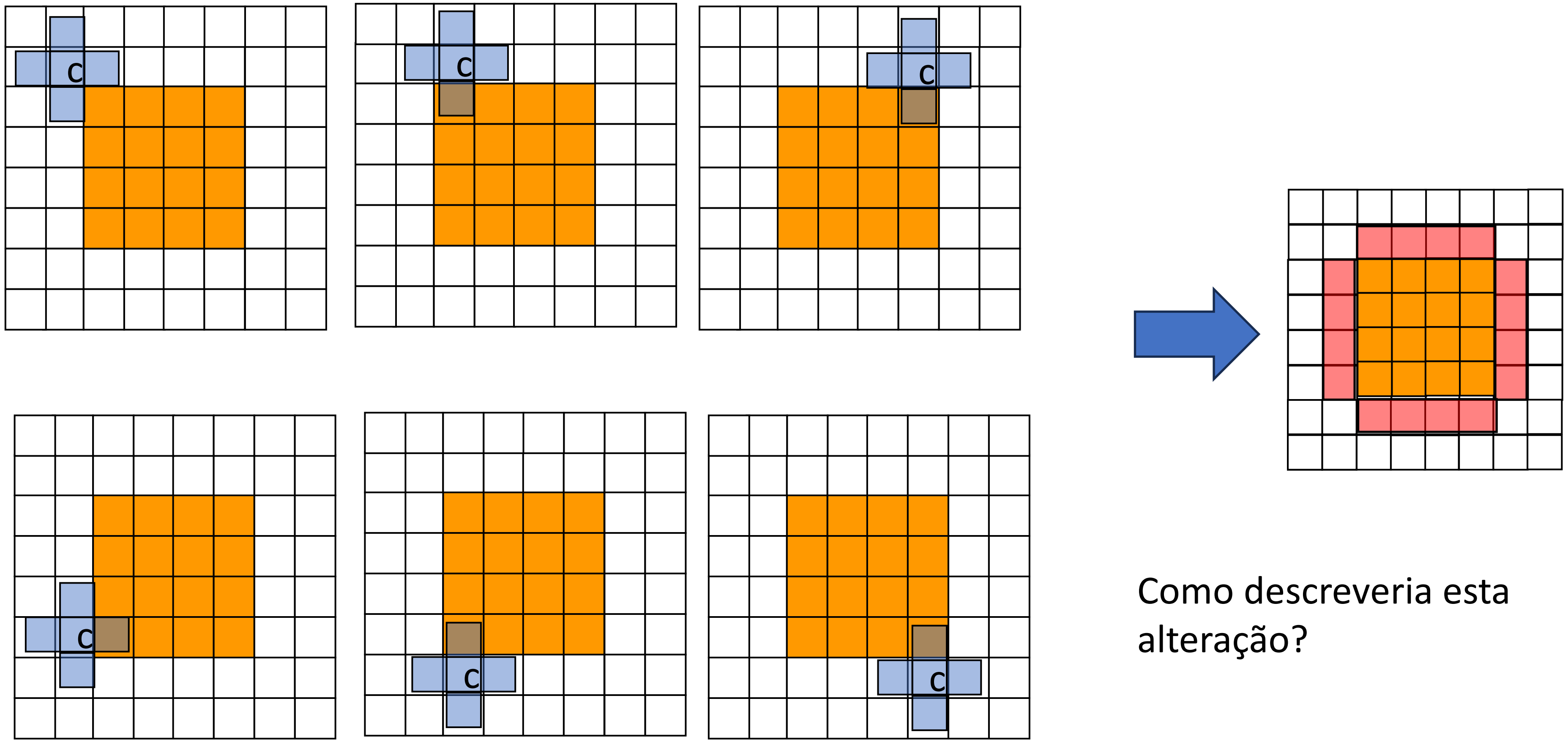
0	1	0
1	1	1
0	1	0

B

Exemplo

- E se a operação fosse “União”?

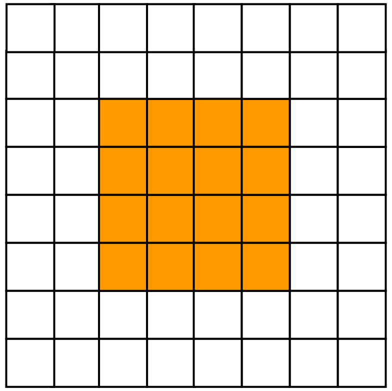
  C=A U B+



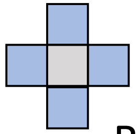
Como descreveria esta alteração?

compare

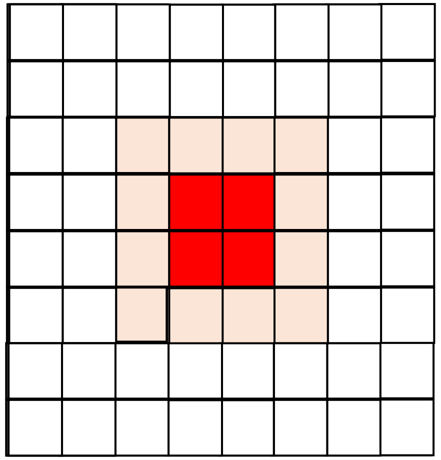
- Como descreveria o efeito destas duas operações? Que nome daria a cada uma?



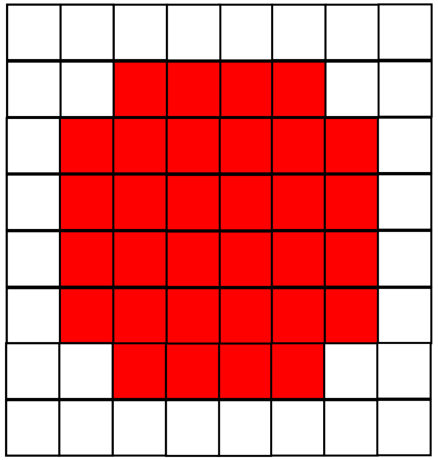
A



B



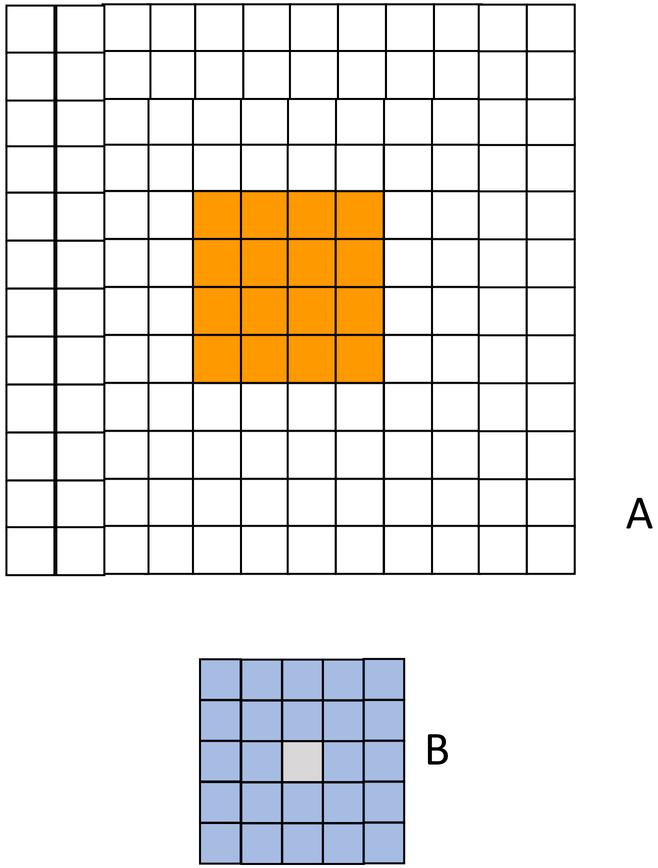
A ∩ B+



A U B+

Exemplo

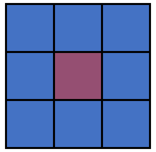
Imagine o que ocorreria se se usa um elemento estruturante maior e A ∪ B+ ?



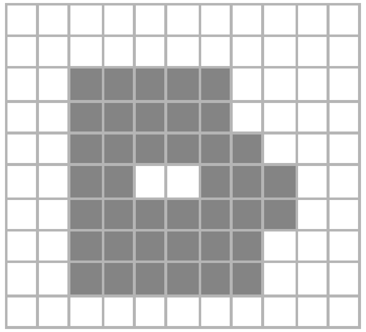
- **PAUSA**

OPERADORES MAIS COMUNS

M



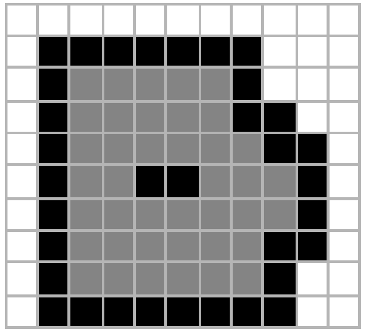
G



- **Dilatação**

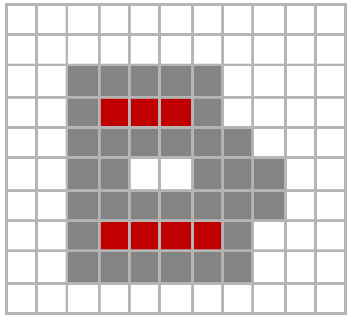
  Matematicamente:

  D(G,M)= { p : M+ ∩ G não nulo}

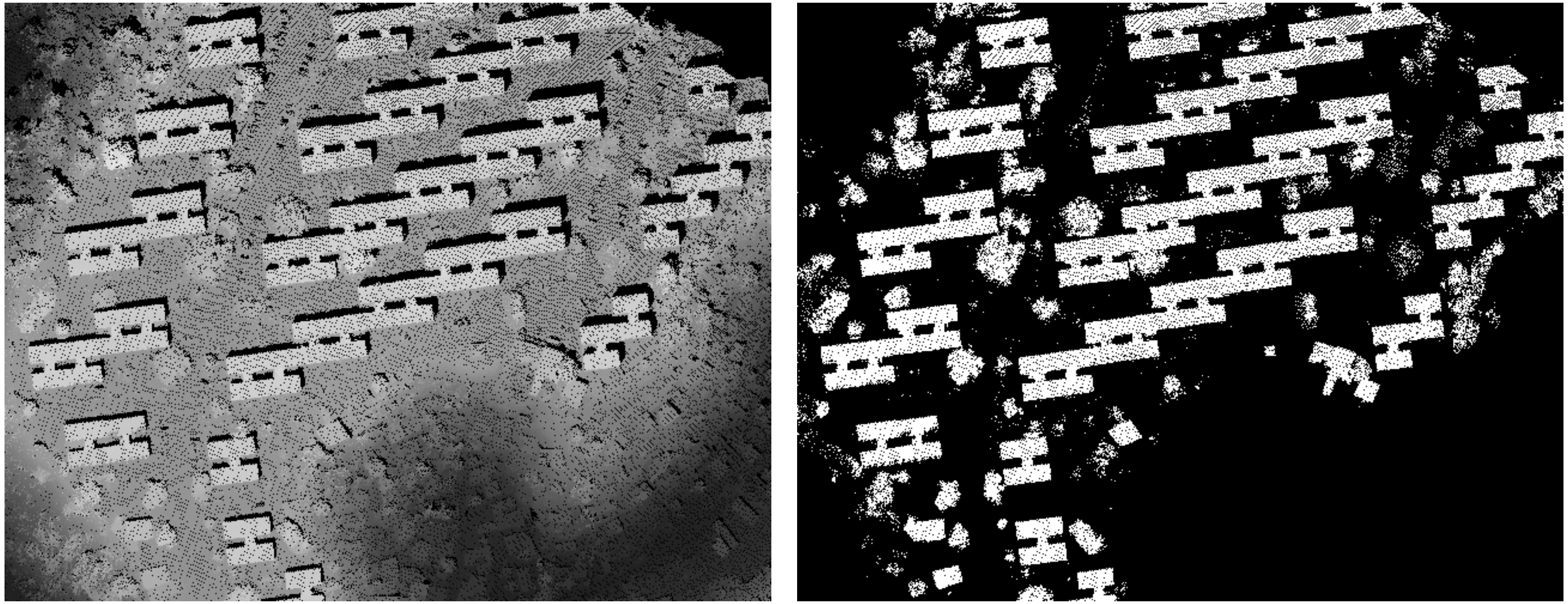


- **Erosão**

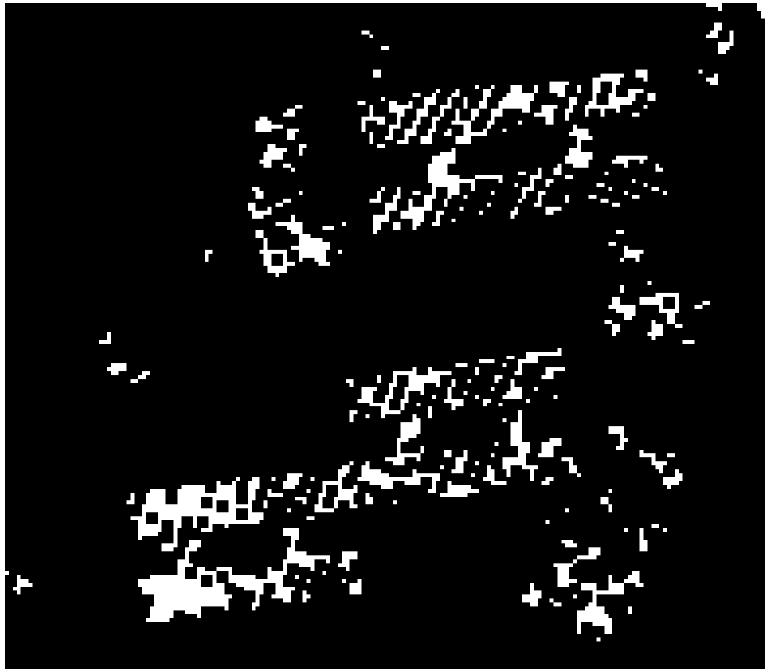
  E(G,M)={p : M+ subconjunto de G}



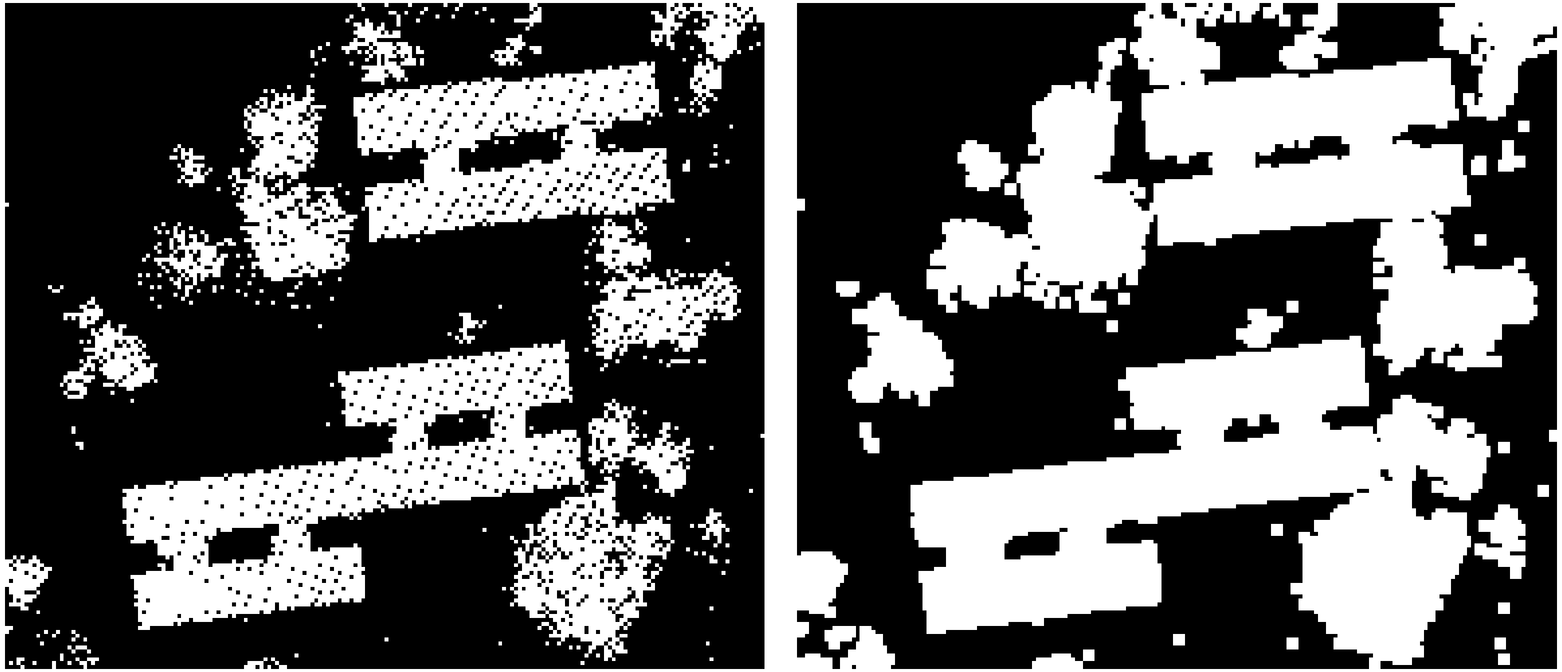
binary



erosion

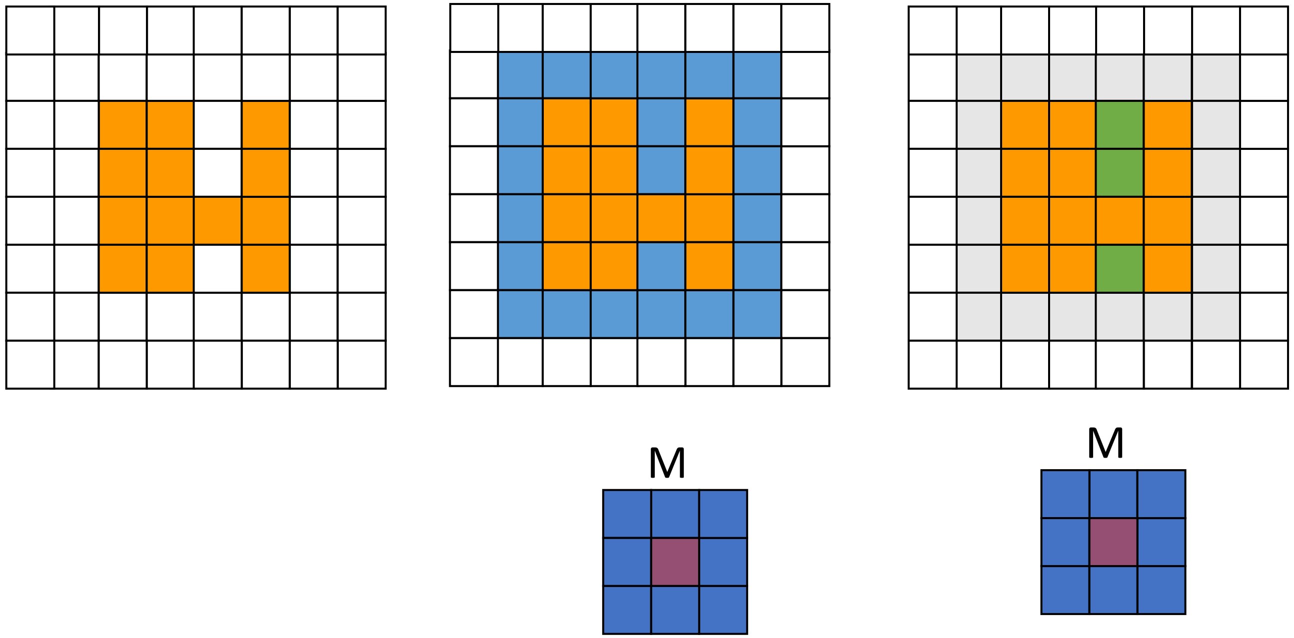


dilation



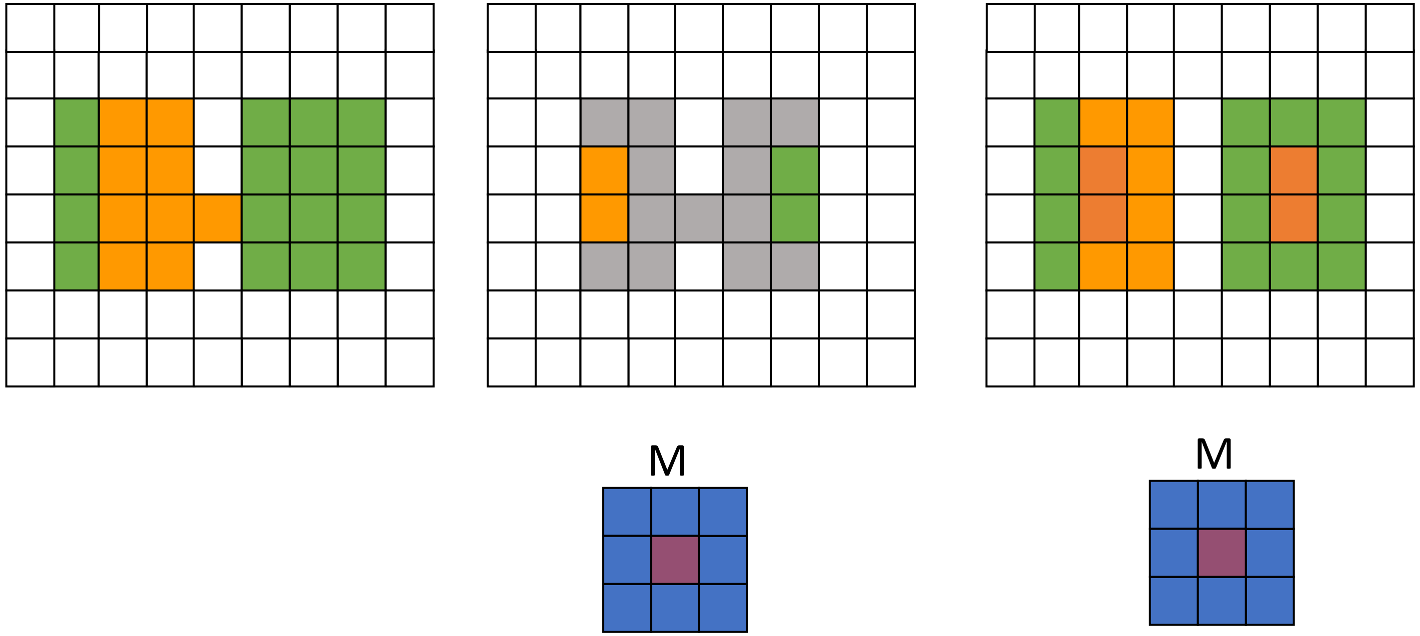
OPERADORES MAIS COMUNS

- **Fechamento:** dilatação seguida de erosão



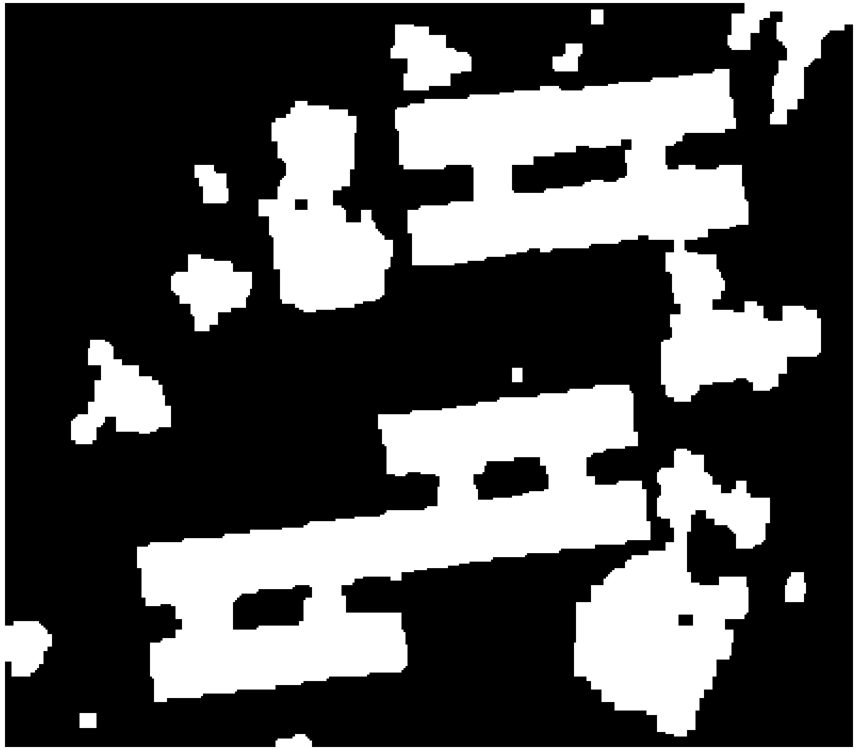
OPERADORES MAIS COMUNS

- **Abertura:** Erosão seguida de dilatação



closing

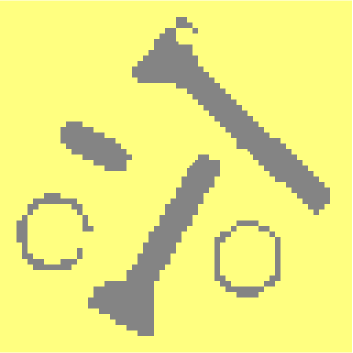
Opening (after closing)



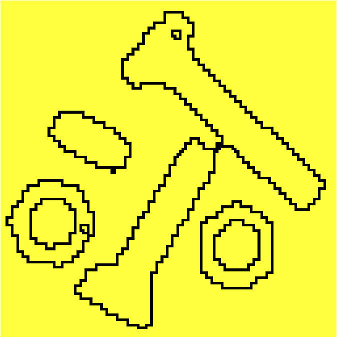
Detecção de bordas

- Imagem original - Erosão ... How?

-



=



Esqueleto (eixo médio)

- O esqueleto de uma imagem binária corresponde ao mínimo conjunto de pixels conexos que representem o eixo médio da figura.
- O esqueleto pode ser obtido executando várias erosões seletivas e sucessivas das bordas das figuras.
- Na determinação do esqueleto, deve se cuidar para não remover “pontas” nem “pixels intermediários” que garantem a conectividade.