

Lógica fuzzy

Lógica difusa

Jorge Centeno



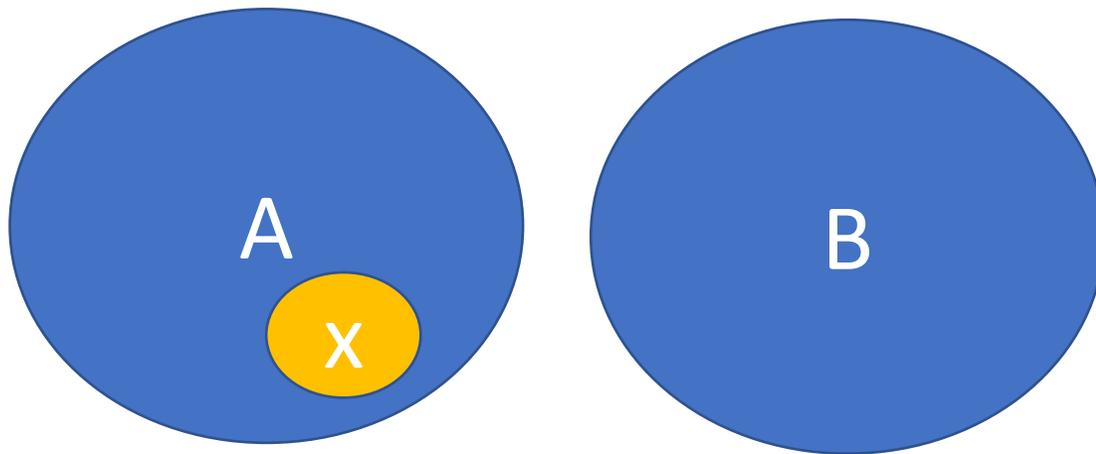
Lógica Fuzzy

- O conceito e conjuntos Difusos (fuzzy sets) foi originalmente proposto por Zadeh em 1965 e pode ser considerado como uma generalização da Teoria Clássica de Conjuntos Booleana para lidar com conceitos pouco definidos, ou cuja conceituação não pode ser claramente formalizada.
- Nas ciências naturais, muitas vezes nos deparamos com conceitos difíceis de explicar, como:
 - *“o rio sobe rapidamente”*
 - *“estou um pouco atrasado”*
 - *“falta só um pouquinho”*
 - *“coloque um pouco de sal”*

. Lógica Booleana

O grau de pertinência é binário

Grau de pertinência: descreve a associação entre o elemento e o conjunto.



Função de pertinência: $\mu(x) = [0 \text{ ou } 1]$



X pertence a A = TRUE
X pertence a B = FALSE

. Lógica Booleana

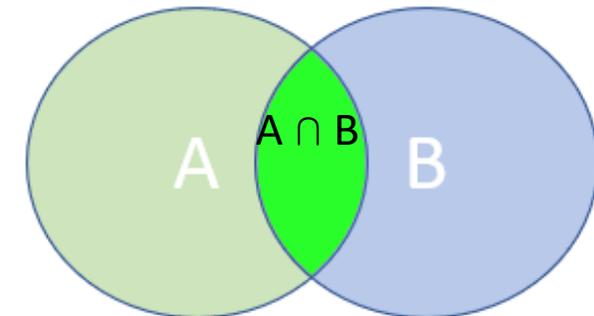
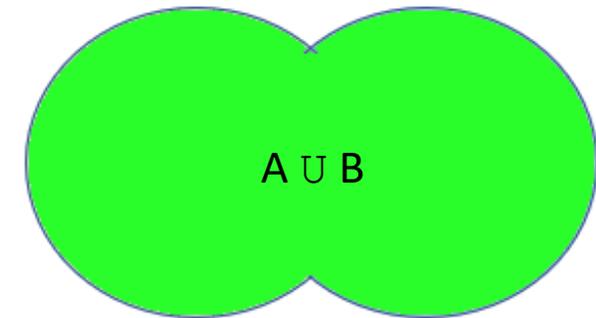
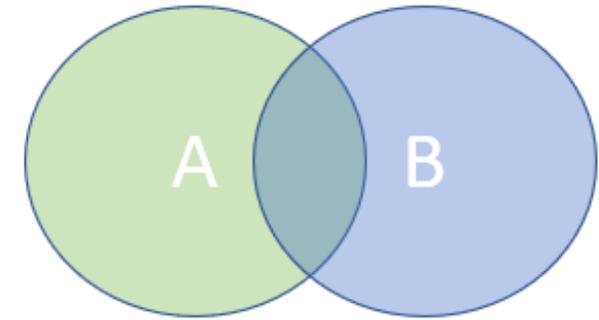
União e interseção.

A união B:

$A \cup B = A$ “ou” B , inclui os dois conjuntos

A interseção B:

$A \cap B = A$ “e” B , inclui a área ocupada pelos dois conjuntos



Uma variável

Exemplo:

A) “é menor que 1,80m”

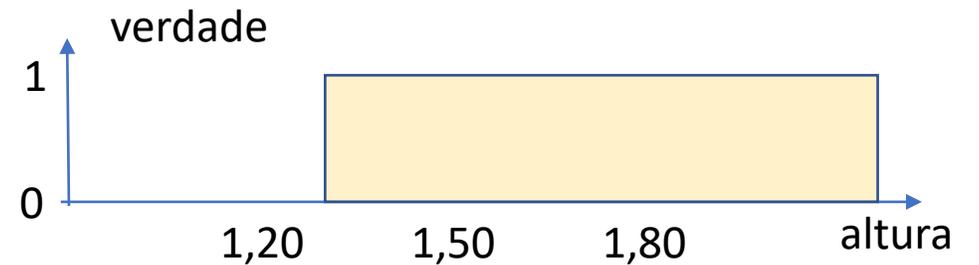
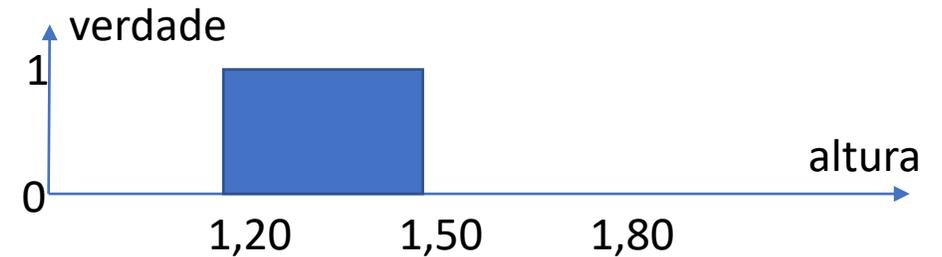
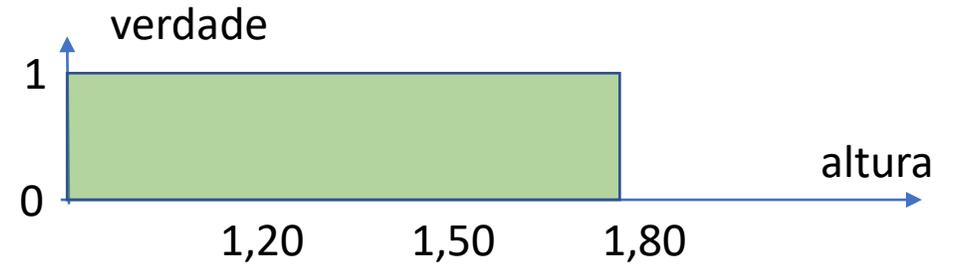
B) “está entre 1,20m e 1,50m”

C) “é maior que 1,30m”

Avalie:

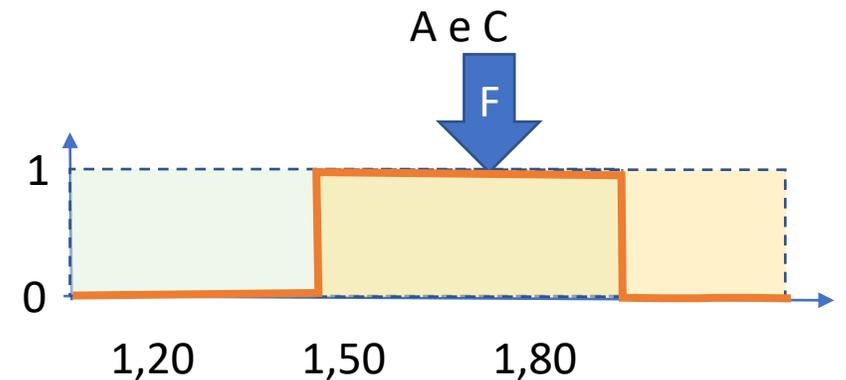
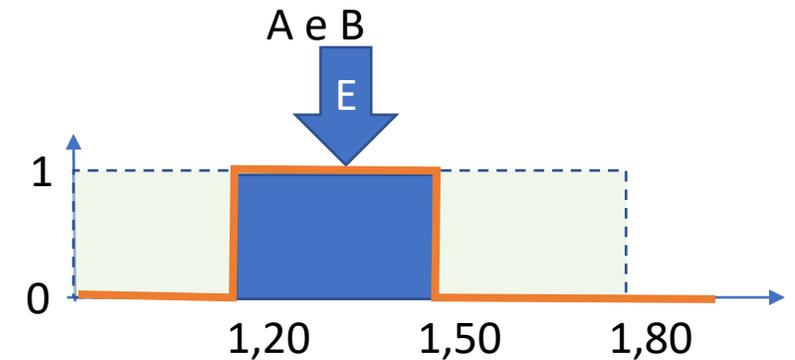
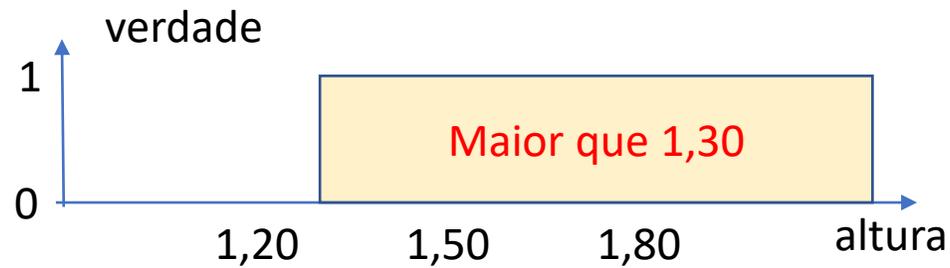
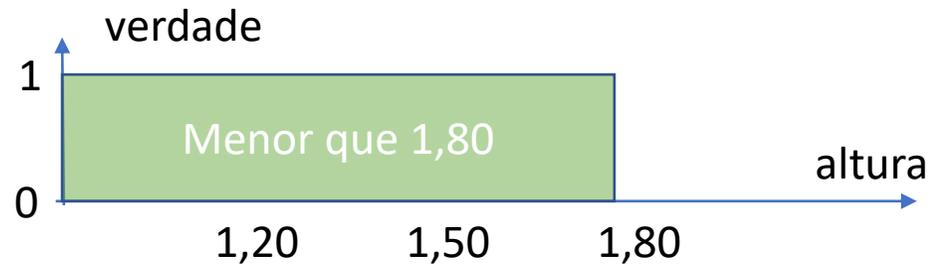
E) Pertence a A e a B: “é menor que 1,80m” e “está entre 1,20m e 1,50m”

F) Pertence a A e a C: “é menor que 1,80m” e “é maior que 1,30m”



Uma variável

E) Pertence a A e a B: “é menor que 1,80m” e “está entre 1,20m e 1,50m”



F) Pertence a A e a C: “é menor que 1,80m” E “é maior que 1,30m”



Lógica Fuzzy

Pretende refletir a maneira em que as pessoas pensam.

Modelando o senso de palavras, tomada de decisão ou senso comum .

Usando uma grande informações vagas e incertas, as quais podem ser traduzidas por expressões como:

“a maioria da vezes”,

“mais ou menos”,

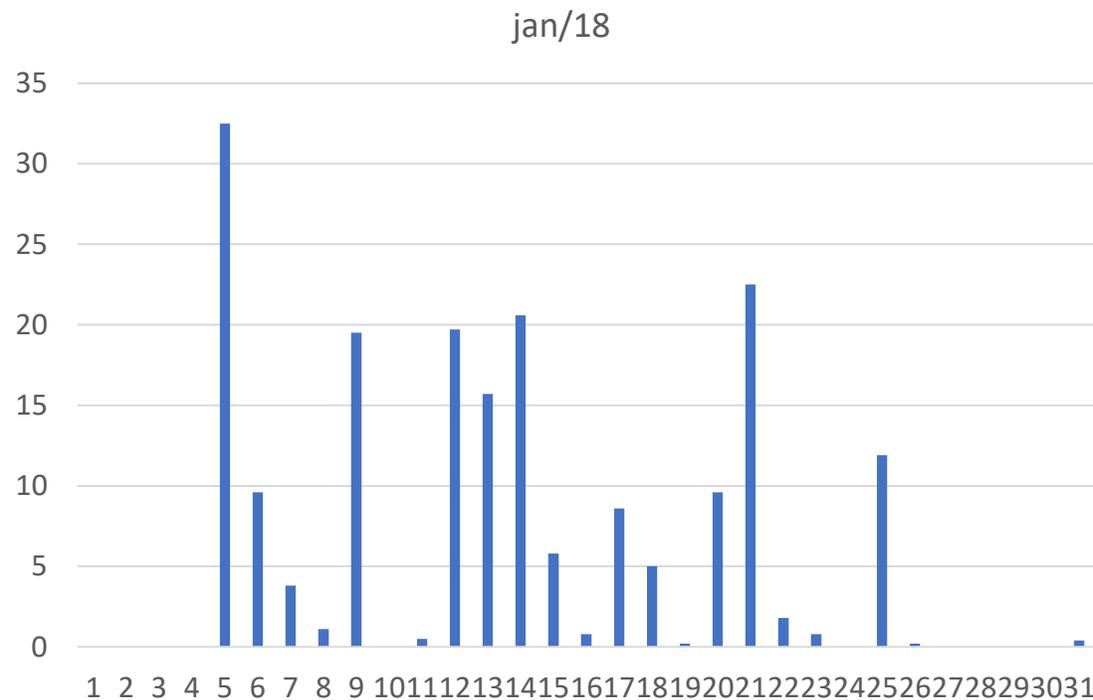
“próximo de”,

etc.

Conceitos difusos

“No dia 21 de janeiro de 2018 a precipitação foi de 22,5mm”

“no dia 21/01/18 choveu muito”



Choveu
“pacas”



Booleano

SE dispormos de um LIMIAR, um LIMITE que diferencie muito de pouco,

ENTÃO poderíamos raciocinar de forma Booleana

Ex: Limiar = 20

No dia 21 de janeiro de 2018 a precipitação foi de 22,5mm”

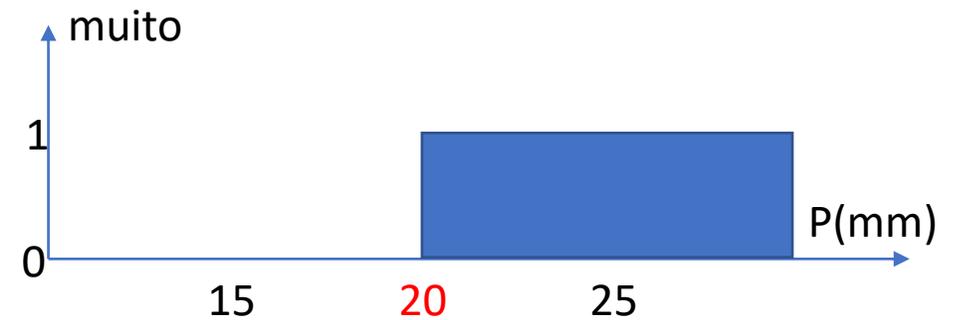
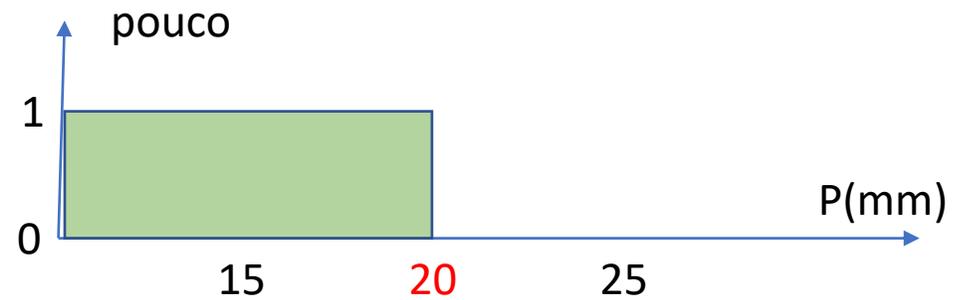
$P(21) = 22,5 \text{ mm}$

Como

$P(21) > \text{LIMIAR}$

ENTÃO

“No dia 21/01/18 choveu muito”



Eu já falei isso!

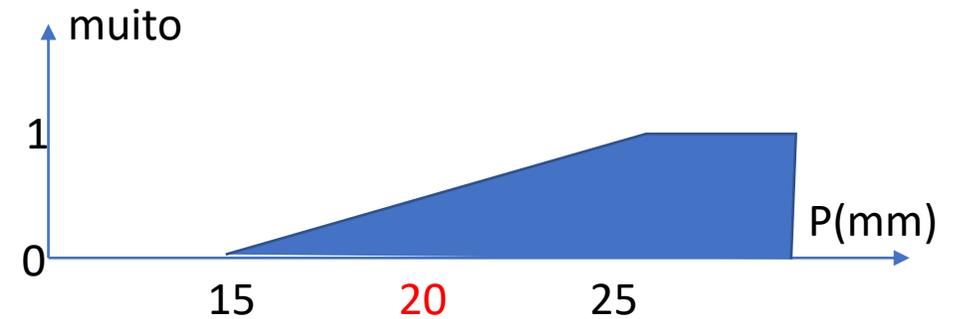
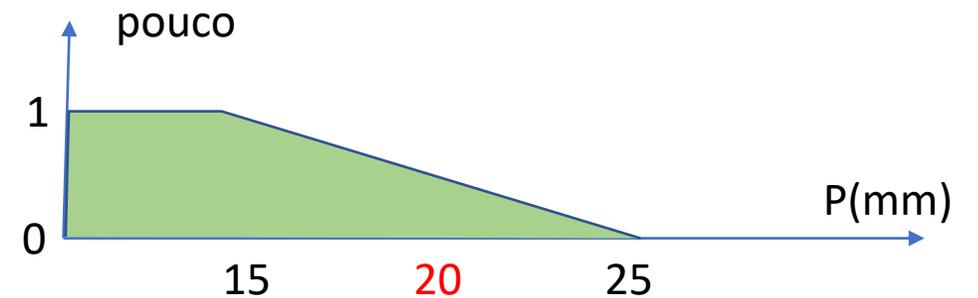
Fuzzy

Ou podemos representar isto com um grau de variação... Com termos “relativos” ou “incertos”... fuzzy

“chove pouquinho”

“choveu muito mesmo”

“choveu um dilúvio”



Eu já falei isso, “pacas”!

Função de pertinência Fuzzy

Representa o grau de associação entre o elemento e o conjunto.

A precipitação de 22,5mm (elemento) pertence ao grupo de dias chuvosos?

Também podemos afirmar que esta precipitação tem associação com o conjunto de “dias pouco chuvosos”, mas ela é menor.

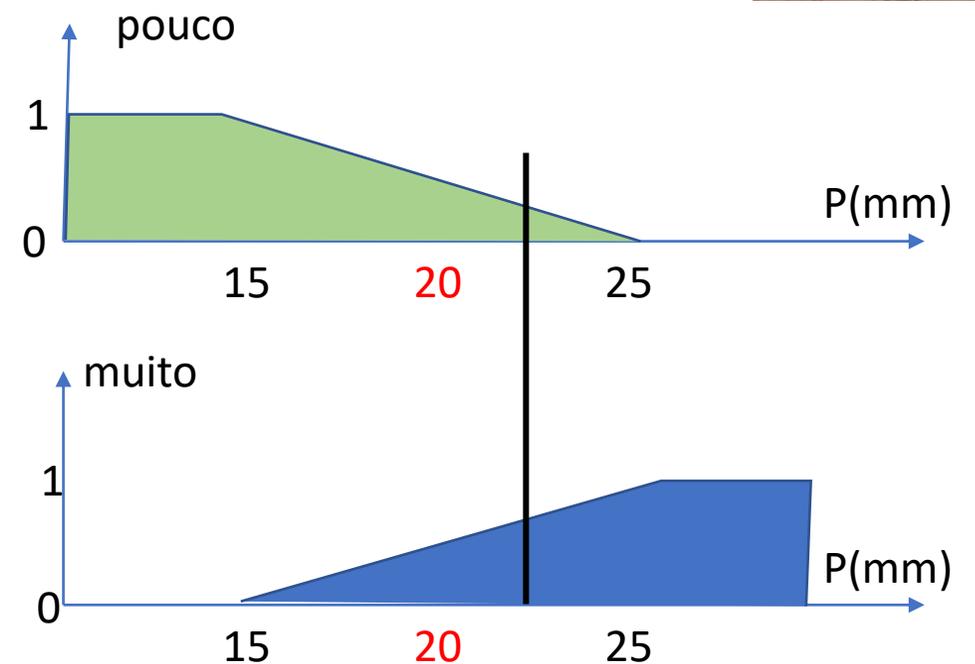
Para representar isto, usamos uma Função de pertinência:

$$\mu_A(x) = [0, 1]$$

Que pode ter valores que variam entre zero e um.

0= não pertence (mesmo!)

1= pertence totalmente.



. Lógica Fuzzy

O grau de pertinência é contínuo.

Quando os limites da função de pertinência são zero e um, se chama de função normalizada. É a mais usada.

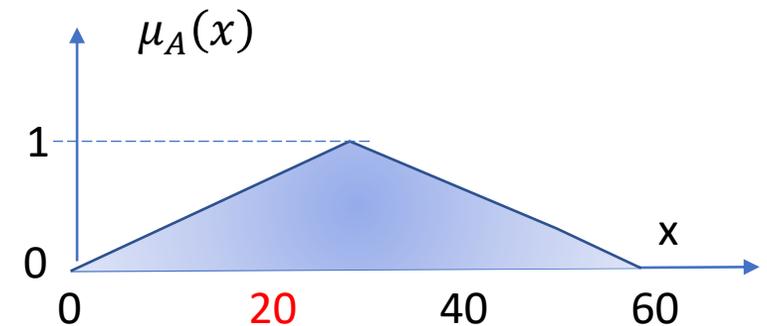
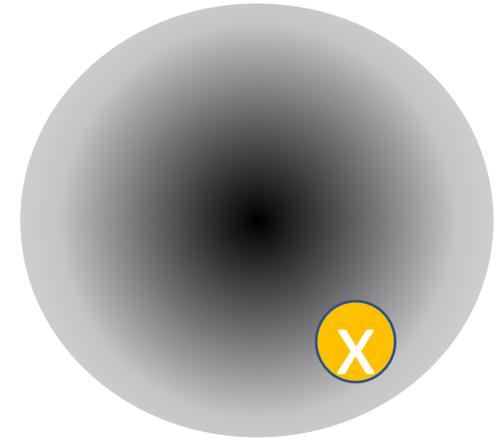
Assim, formalmente, um conjunto Fuzzy é definido como

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_A(x)) | x \in X \}$$

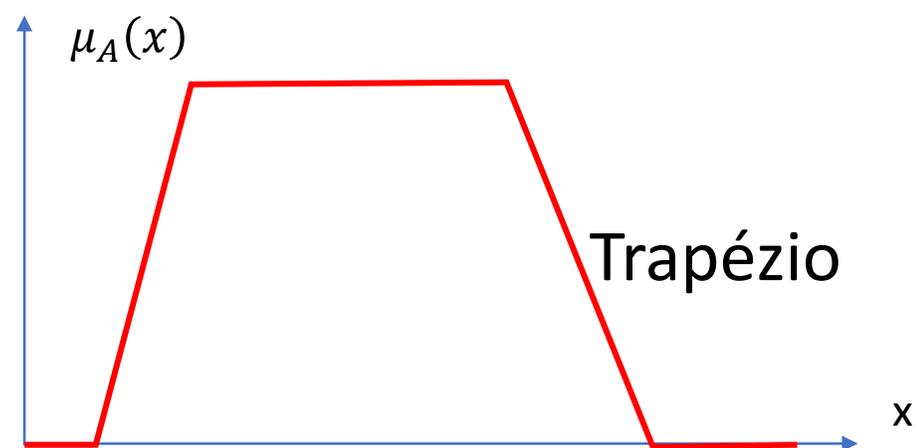
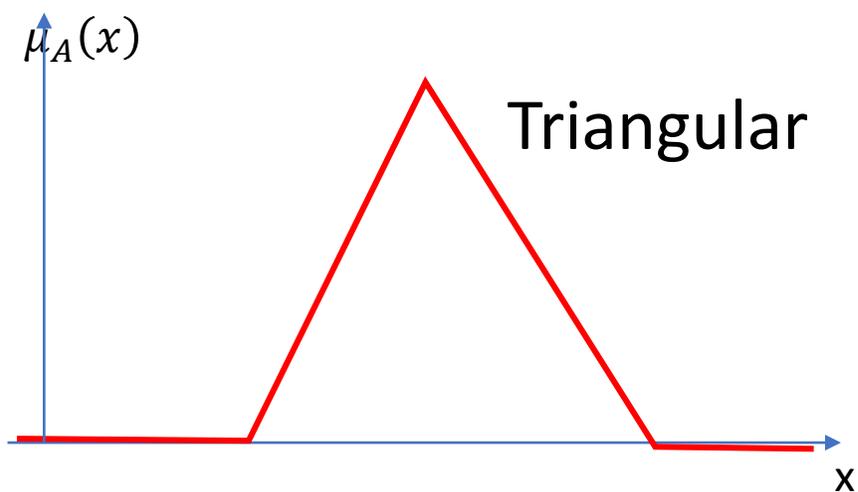
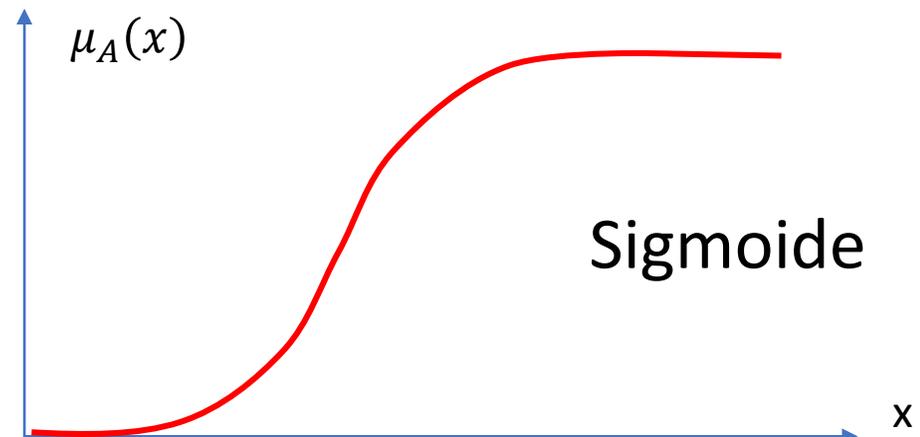
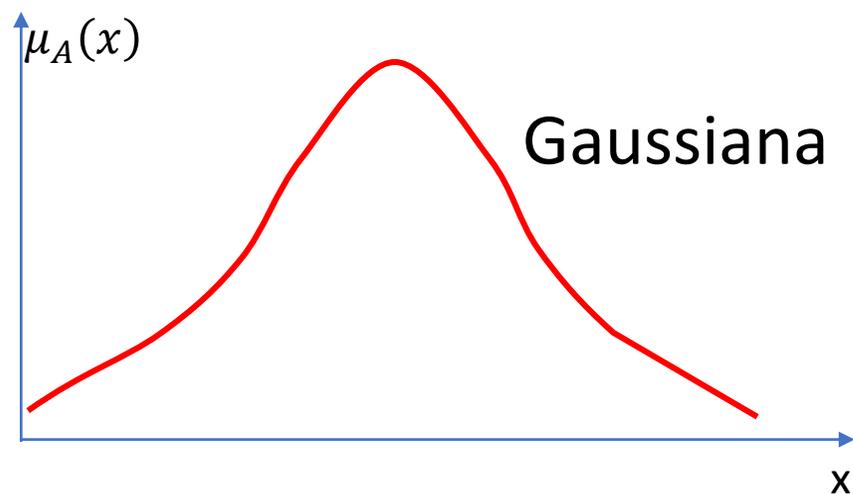
A função de pertinência pode assumir diversas formas para descrever o grau de pertinência.

Por exemplo, ao lado, uma função triangular com um valor máximo no centro.

Poderia descrever “valores próximos a 30”



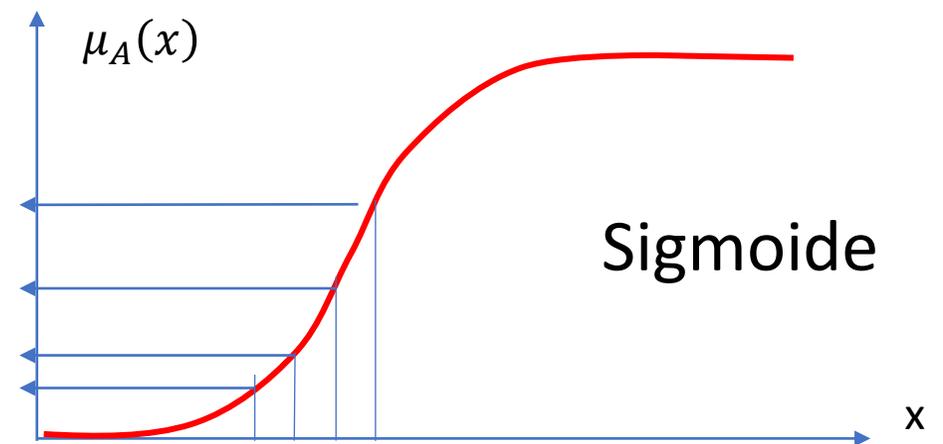
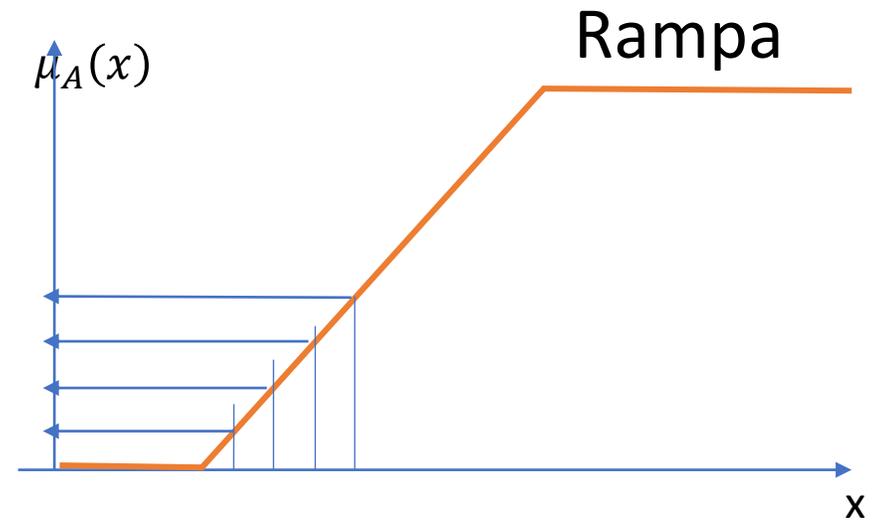
Funções de pertinência Fuzzy



Comparação

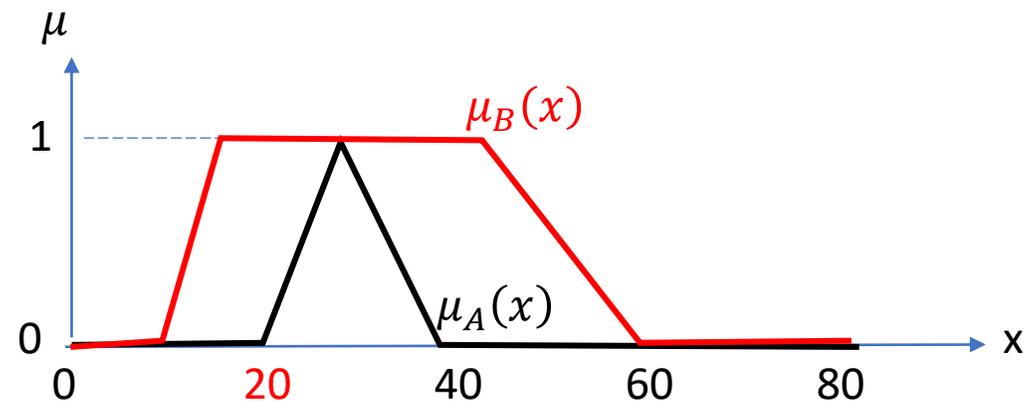
Para as mesmas diferenças de "x" a função pode dar:

- a) Mesma diferença ...
- b) Diferentes diferenças



Operações: subconjunto

Um conjunto fuzzy B está contido em um conjunto fuzzy A se a função de pertinência de B é sempre menor que a função de pertinência de A



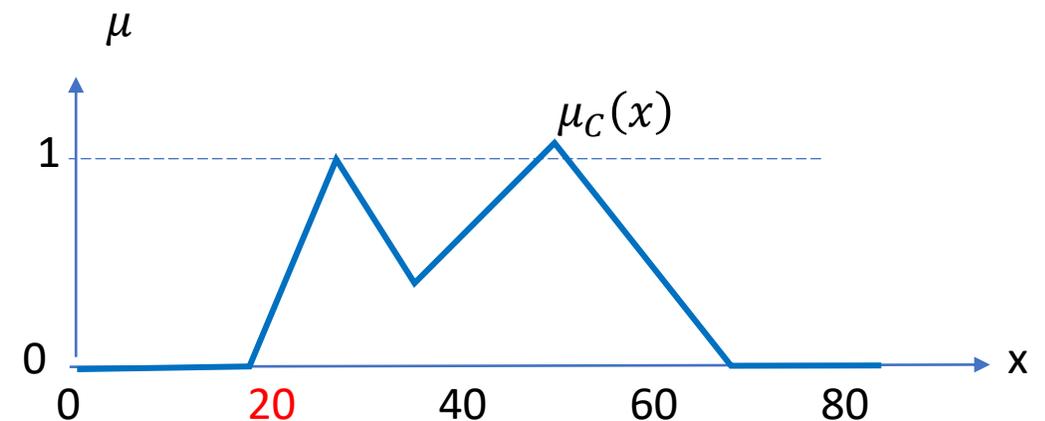
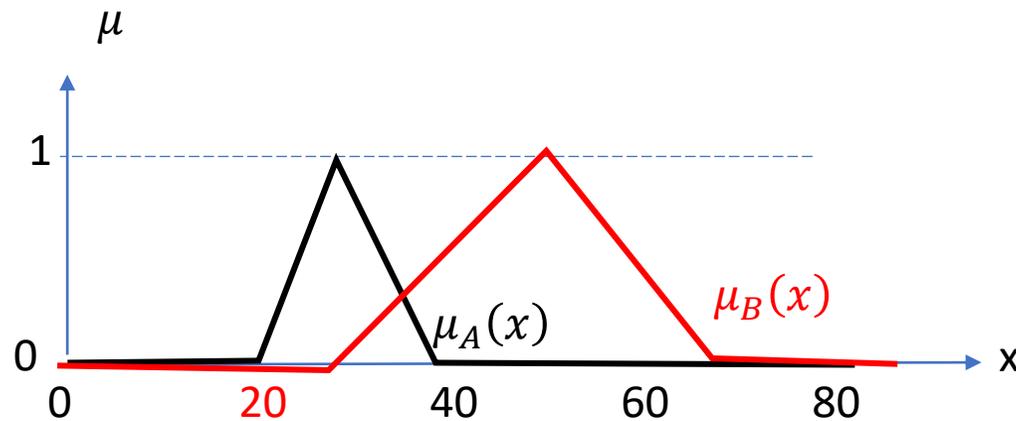
Como $\mu_A(x)$ é sempre menor que $\mu_B(x)$, então A está contido em B

Operações: União

A função de pertinência de um conjunto fuzzy C, resultado da união de dois conjuntos fuzzy A e B é o **MAIOR** valor da função de pertinência dos dois conjuntos A e B.

$$C = A \cup B$$

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \text{ para todo } x \in X$$



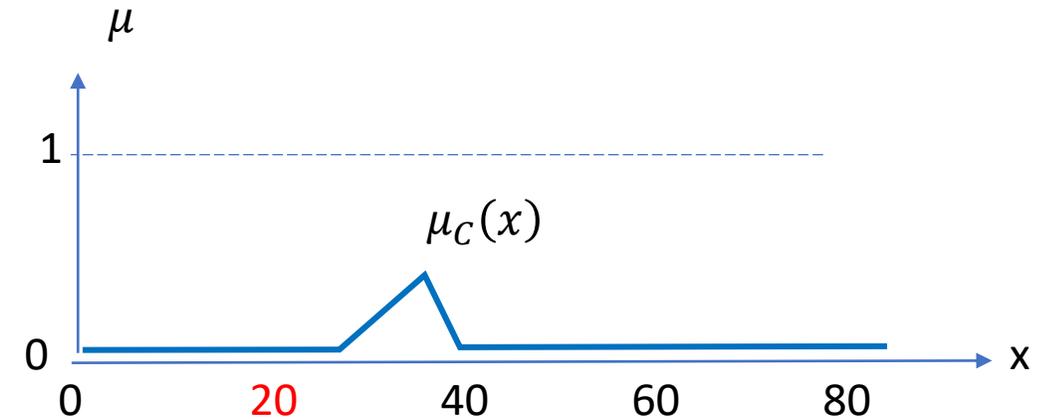
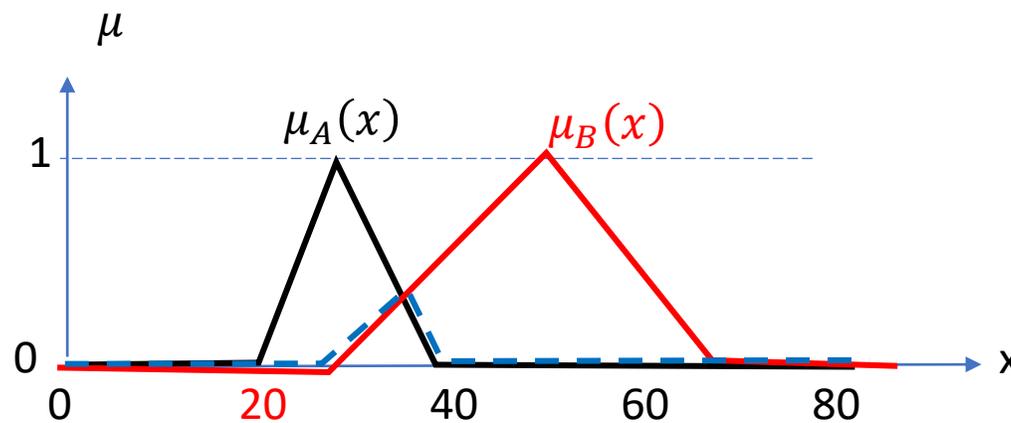
Também chamada Norma S

Operações: Interseção

A função de pertinência de um conjunto fuzzy C, resultado da Interseção de dois conjuntos fuzzy A e B é o **MENOR** valor da função de pertinência dos dois conjuntos A e B.

$$C = A \cap B$$

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \text{ para todo } x \in X$$



Também chamada Norma T

Operações: Exemplo

Dada a variável:

x : temperatura da piscina

E os seguintes conjuntos,

A: FRIO

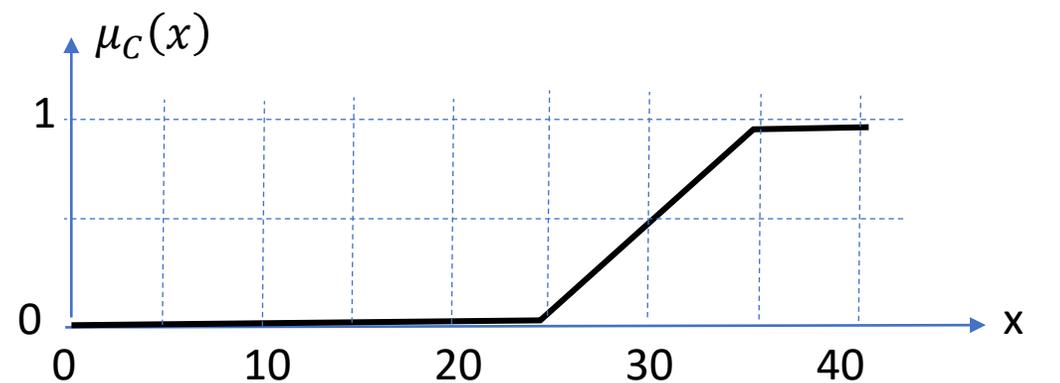
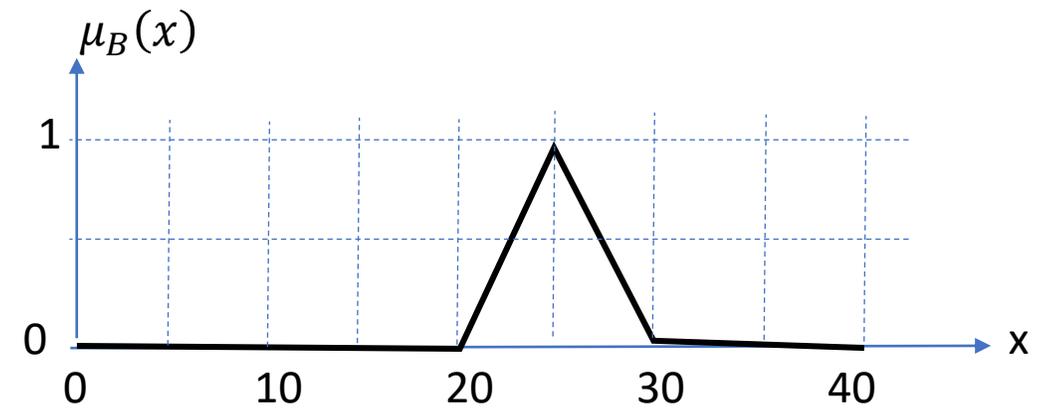
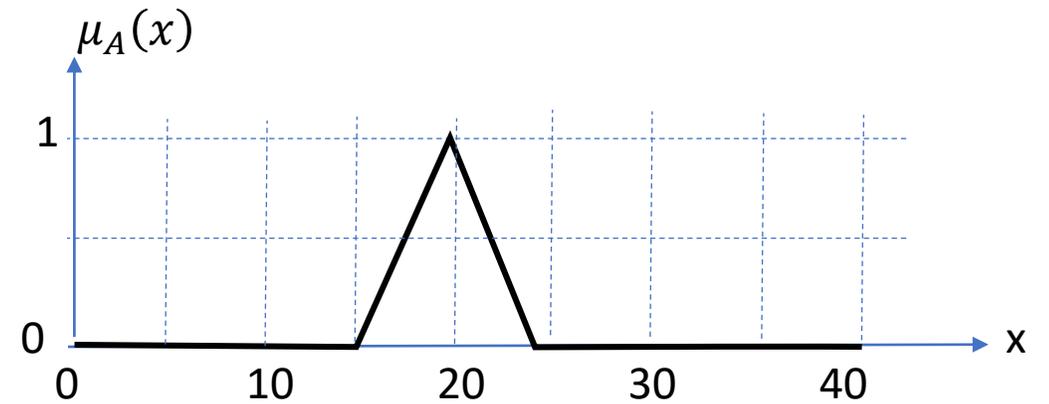
B) AGRADAVEL

C) QUENTE

elabore o gráfico de

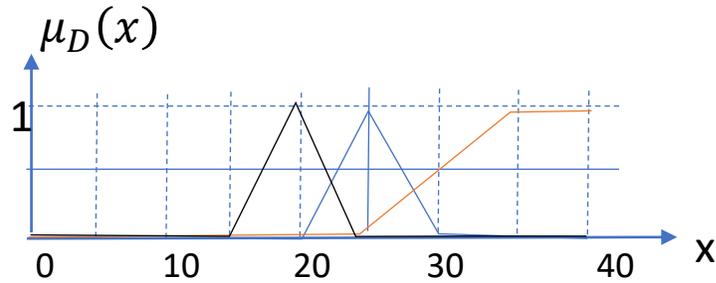
a) D: A piscina está agradável ou quente

b) E: A piscina está quente e agradável

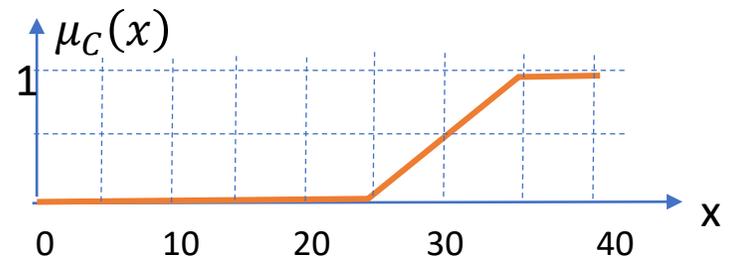
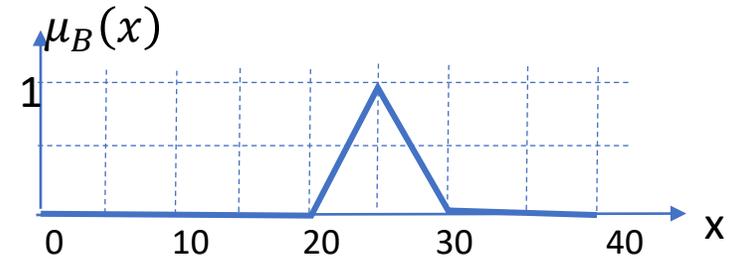
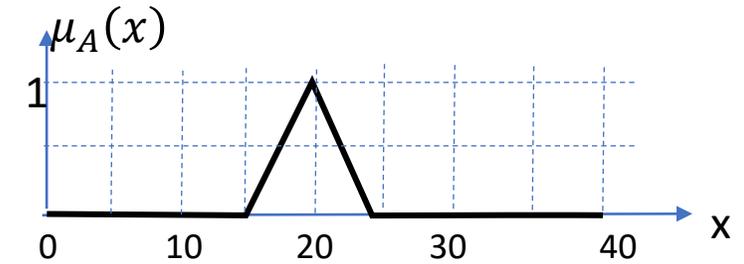
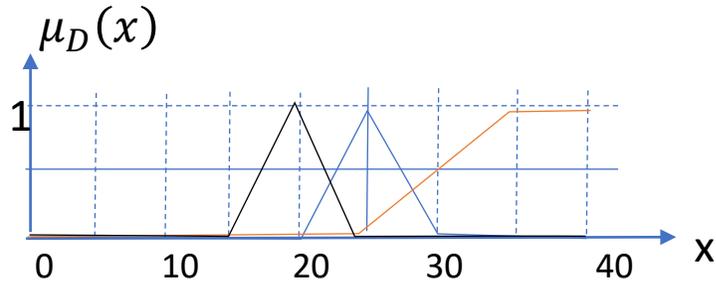


Operações: Exemplo

D: A piscina está agradável ou quente



E: A piscina está quente e agradável



Inferência Fuzzy

É possível deduzir conclusões fuzzy aplicando os conceitos de lógica fuzzy ao raciocínio. Este é o caso dos sistemas Fuzzy de regras.

Sistemas baseados em lógica fuzzy são usados para gerar estimativas, tomadas de decisão, sistemas de controle mecânico...

Alguns exemplos

- Ar condicionado.
- Auto Foco de câmeras (*out-of-focus*).
- smart Houses.
- Controladores de processo industrial.



Samsung Fuzzy Logic AF / AF Zoom 1050

Exemplo

Secadora XXXXX traz alto desempenho e economia. Tecnologia avançada possibilita secagem e esterilização de até 17 kg de roupas.

A secadora é repleta de recursos avançados que agilizam a secagem dos mais variados itens de vestuário...bla, bla, bla...!

Além disso, o equipamento é dotado do exclusivo controle de lógica Fuzzy. Essa tecnologia é capaz de escolher dentre os 13 ciclos disponíveis qual o melhor para secar determinada quantidade de roupas. Dessa forma, ela consome apenas a energia necessária para cada situação!





Inferência Fuzzy

Os sistemas de regras são recomendados para modelar processos cujos comportamentos não podem ser descritos de maneira objetiva e sim com termos aproximados.

Também são usados quando não é possível estabelecer um modelo matemático suficiente por se desconhecer o processo ou as variáveis que o influenciam.

Os sistemas de inferência fuzzy se assemelham aos sistemas especialistas, pois eles são programados para resolver um problema específico através da representação explícita das regras.

USA REGRAS, que são combinadas com lógica fuzzy.



Componentes

- a) A REGRA: a regra deve ser formalizada e expressa no sistema.
- b) Ela pode usar **variáveis linguísticas**

A variável linguística é a unidade básica da representação do conhecimento na inferência fuzzy.

Nas regras, as variáveis de entrada e saída são variáveis linguísticas

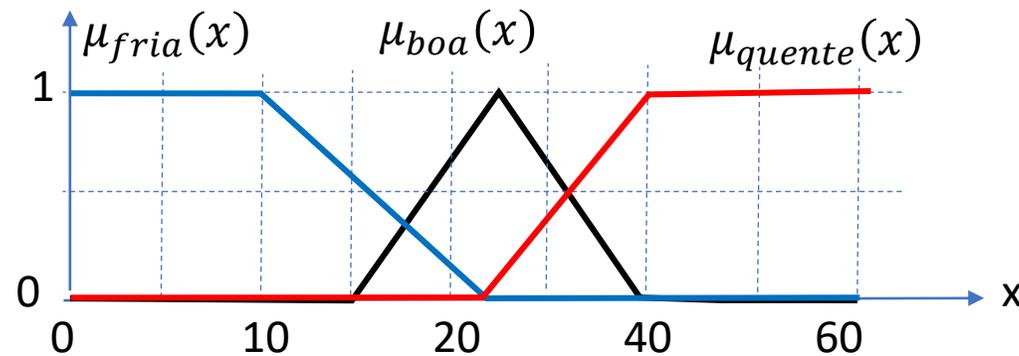
Por exemplo:

“precipitação”, “temperatura”, “peso”, “altura”

Termos linguísticos

As variáveis linguísticas se utilizam de termos (p.ex: adjetivos), representados como conjuntos fuzzy, para representar o comportamento da validade de uma afirmação, ou verdade.

Ex: A “temperatura da água” pode ser “**fria**”, “boa” ou “**quente**”



Recomendações

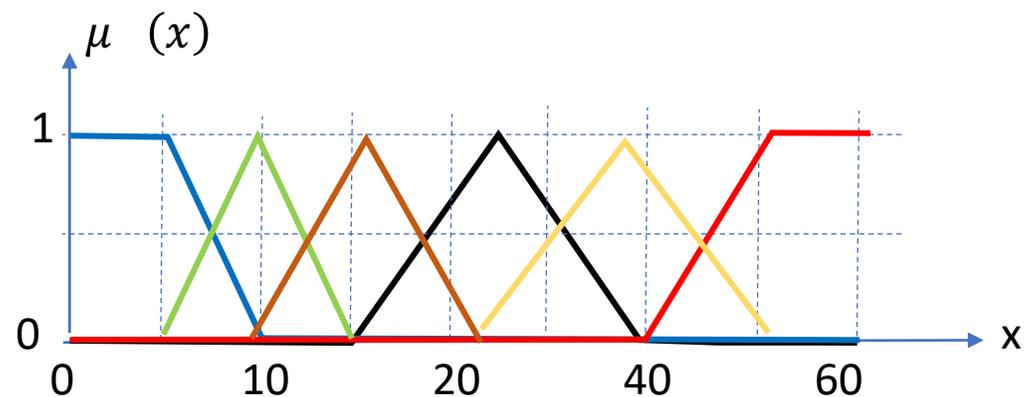
Usar funções simétricas

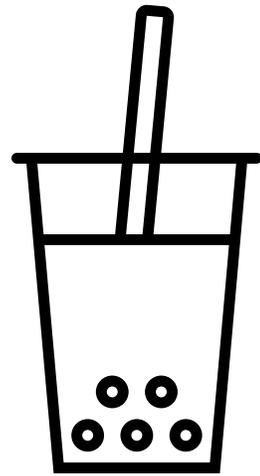
Uso de funções triangulares e trapezoidais facilita no início.

Procurar superposição de domínios de diferentes funções

É melhor se a interseção entre funções ocorre em apenas um ponto, com 0,5

Se houver vários pontos de cruzamento, procure que a soma não seja superior a 1.





Fuzzificação

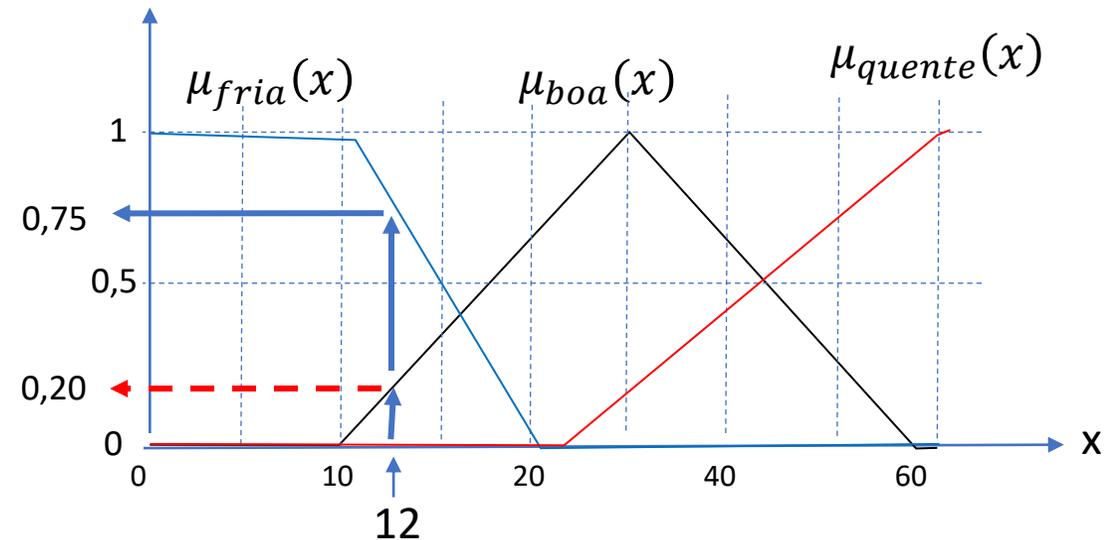
A fuzzificação é a Transformação da forma determinística para a fuzzy e é necessária para representar valores determinísticos como variáveis fuzzy.

Ex: A “temperatura da água” pode ser “fria”, “boa” ou “quente”

T=12 graus ?

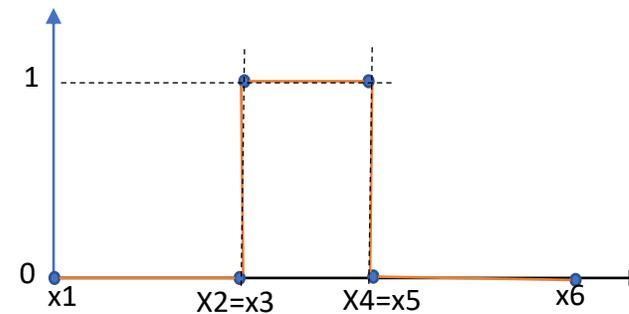
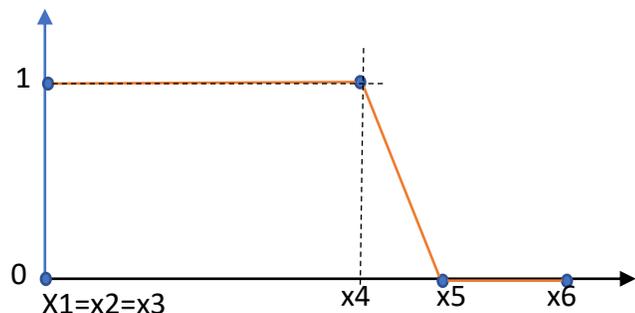
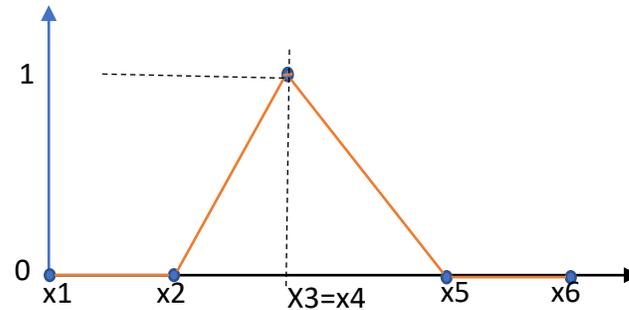
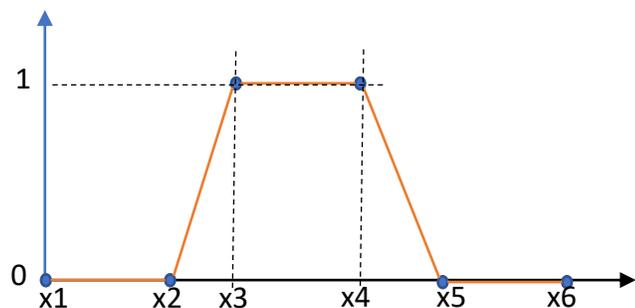
$$\mu_{fria}(12)=0,75$$

$$\mu_{boa}(12)=0,20$$



Você

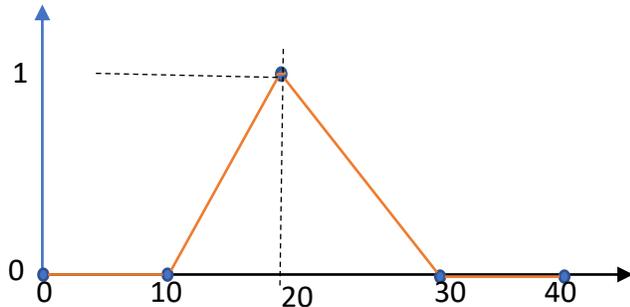
Podemos representar funções triangulares, binárias ou “rampa” usando como base o trapézio. O trapézio é descrito por 6 pontos. Os dois do meio tem valor $Y=1$, os outros $Y=0$.



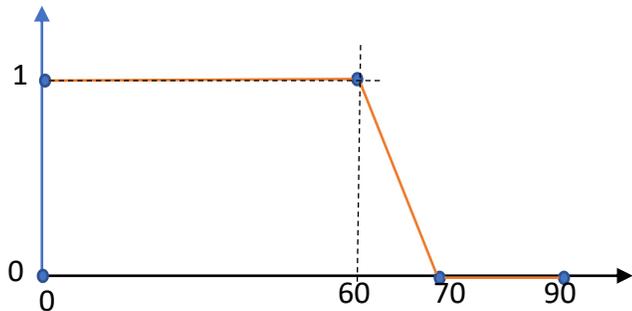
Então basta definir as coordenadas de “x” para representar funções simples. Exemplo,

Você

Então basta definir as coordenadas de “x” para representar funções simples.



Por exemplo o triângulo é dado pela série:
 $X = [0, 10, 20, 20, 30, 40]$

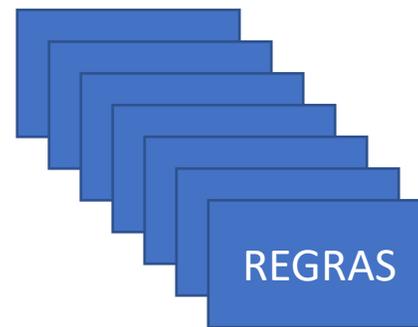


A rampa é modelada pela série:
 $X = [0, 0, 0, 60, 70, 90]$

Regras

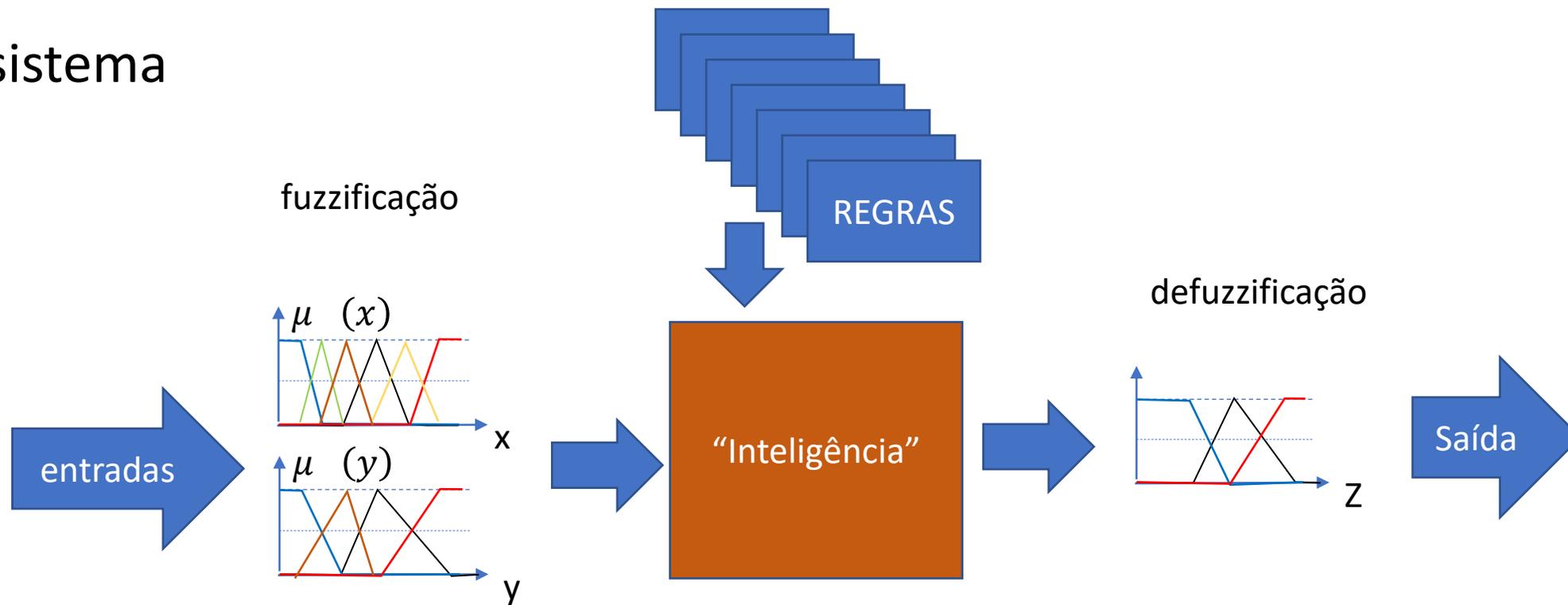
Relacionam as variáveis de entrada (antecedentes, premissas) com as variáveis de saída (conclusões, consequências).

O analista propõe as regras e é através delas, e os conjuntos fuzzy associados às variáveis linguísticas, que representa o conhecimento.



Regras

sistema





Cuidados

Completeza: qualquer combinação de variáveis de entrada ativará PELO menos uma regra

Consistência: Duas regras com as mesmas entradas não podem gerar saídas mutuamente exclusivas ou conflitantes

Continuidade: Não deve haver regras com saídas cujas funções de pertinência não tenham interseção.



Cuidados

Completeza: qualquer combinação de variáveis de entrada ativará PELO menos uma regra

Regras:

Se Altura” é “alto” e “peso” é “baixo” então “magrão”

Se Altura” é “baixo” e “peso” é “baixo” então “guri”

Se Altura” é “alto” e “peso” é “baixo” ou “peso é “alto” então “Altão”

E se o sujeito for “baixo” e seu peso “alto”?



Cuidados

Consistência: Duas regras com as mesmas entradas não podem gerar saídas mutuamente exclusivas ou conflitantes

Regras:

Se Altura” é “alto” e “peso” é “baixo” então “magrão”

Se Altura” é “baixo” e “peso” é “baixo” então “guri”

Se Altura” é “alto” e “peso” é “baixo” ou “peso é “alto” então “Altão”

Se Altura” é “alto” e “peso” é “baixo” então “Comprido”

.



Cuidados

Completeza: qualquer combinação de variáveis de entrada ativará PELO menos uma regra

Consistência: Duas regras com as mesmas entradas não podem gerar saídas mutuamente exclusivas ou conflitantes

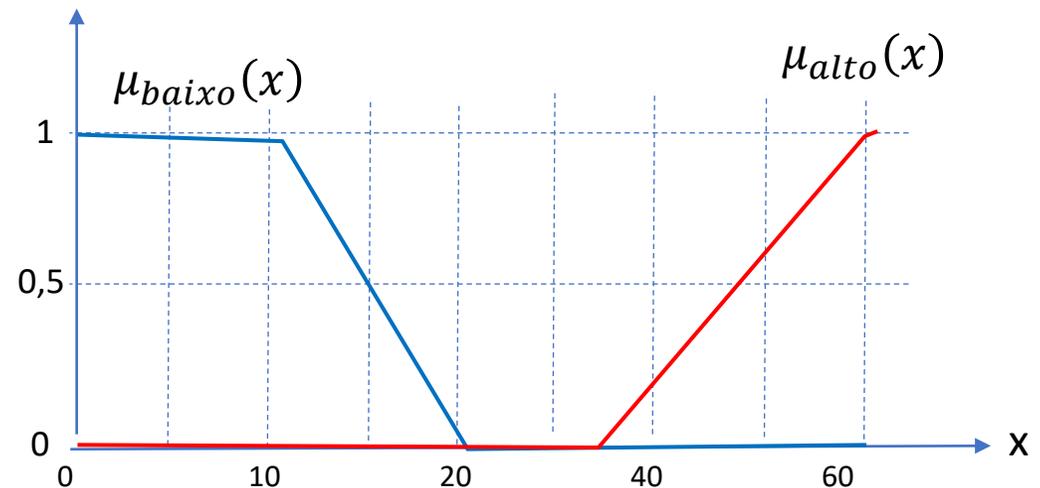
Continuidade: Não deve haver regras com saídas cujas funções de pertinência não tenham interseção.

Continuidade: Não deve haver regras com saídas cujas funções de pertinência não tenham interseção

O que ocorre se a saída gera um valor $z=30$?

Não teremos conclusão?

Nem alto nem baixo, muito pelo contrário?





Inferência

Processo de avaliar as regras que relacionam as variáveis de entrada com as de saída, possibilitando uma conclusão.

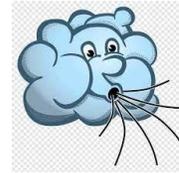
Dado um conjunto de dados de entrada:

- a) Cada regra deve ser avaliada. Algumas podem não ser disparadas, mas pelo menos uma será disparada e gerará uma saída.
- b) Todas as saídas válidas são então avaliadas e combinadas, para gerar uma única saída.

Uma maneira muito popular de fazer isto é o sistema “min-max”, também conhecido como “de Zadeh” ou “Mandani”.

Exemplo:

Variável termos
TEMPeratura (baixa, média, alta)
VENTO (fraco, médio, forte)
PISCINA (nunca, possível, sempre)



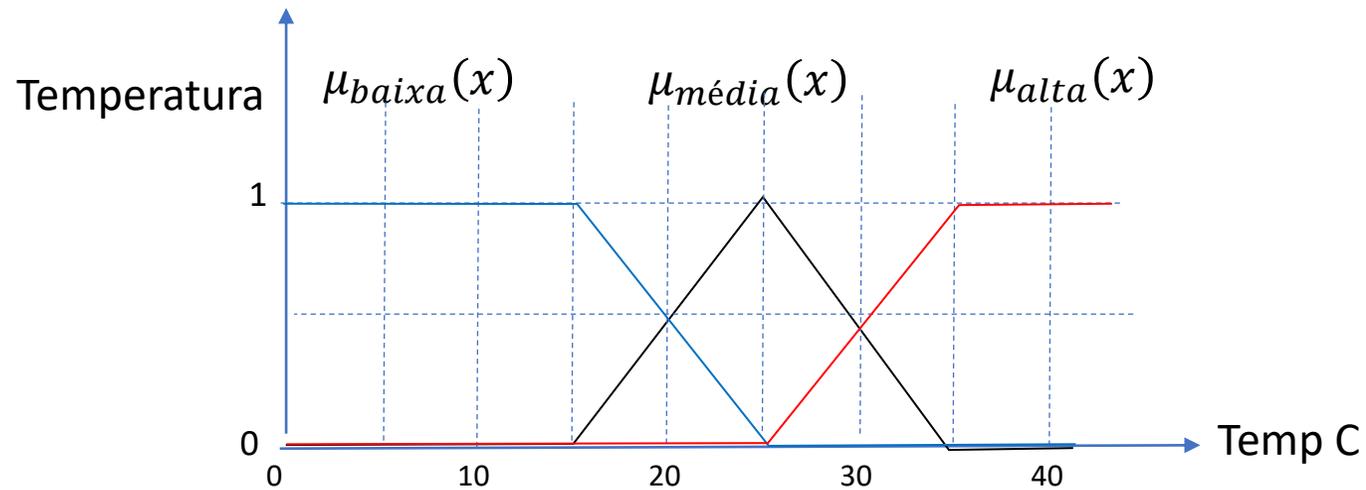
	baixa	média	alta
Fraco	possível	possível	sempre
médio	nunca	possível	possível
forte	nunca	nunca	nunca

Regras:

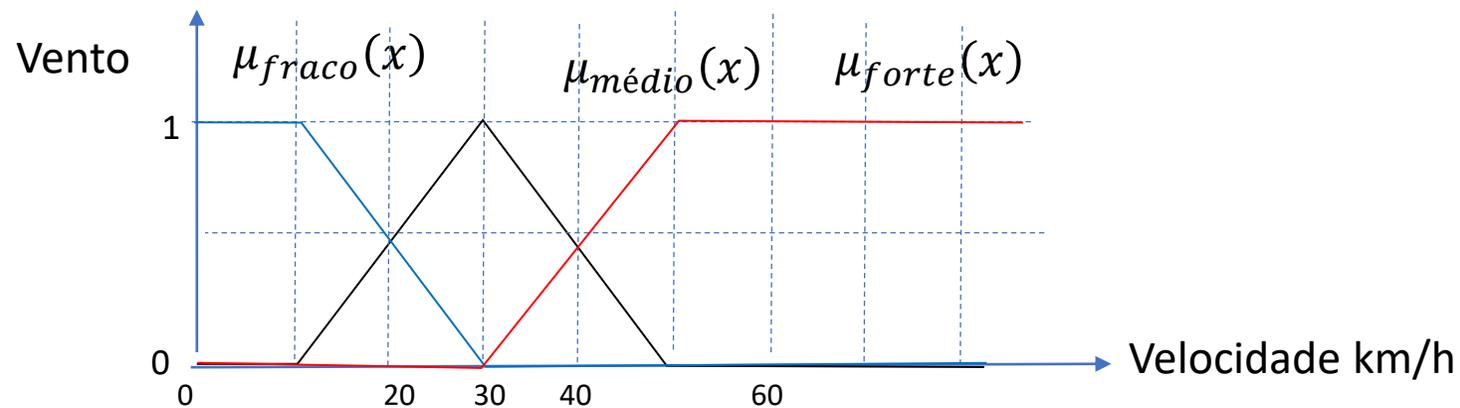
Se Temp=baixa E	VENTO=fraco	ENTÃO PISCINA=possível
Se Temp=baixa E	VENTO=médio	ENTÃO PISCINA=nunca
Se Temp=baixa E	VENTO=forte	ENTÃO PISCINA=nunca
Se Temp=média E	VENTO=fraco	ENTÃO PISCINA=possível
Se Temp=média E	VENTO=médio	ENTÃO PISCINA=possível
Se Temp=média E	VENTO=forte	ENTÃO PISCINA=nunca
Se Temp=alta E	VENTO=fraco	ENTÃO PISCINA=sempre
Se Temp=alta E	VENTO=médio	ENTÃO PISCINA= possível
Se Temp=alta E	VENTO=forte	ENTÃO PISCINA=nunca



Piscina = F(Temperatura, Vento)

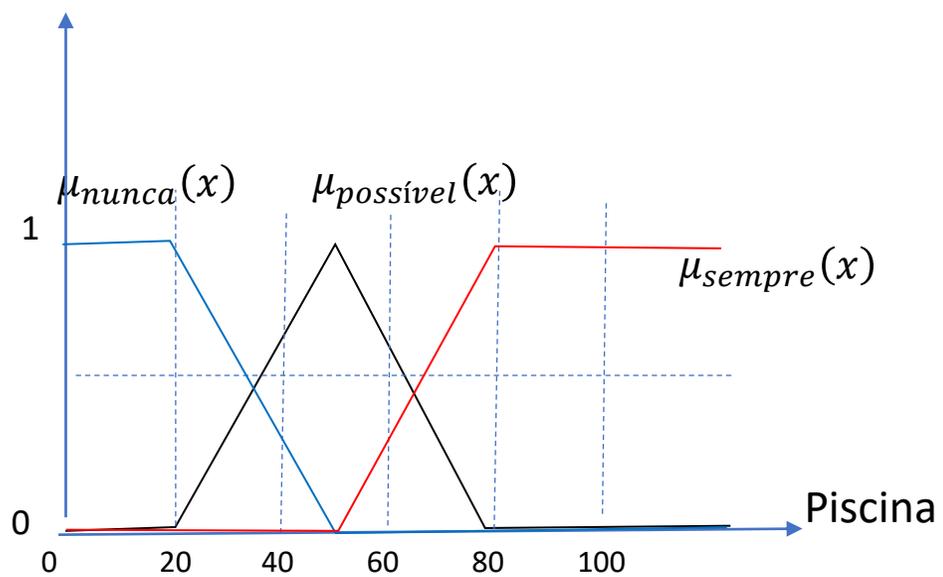


Funções de pertinência das variáveis de entrada e seus predicados



Saída fuzzy

% de Recomendação



E devemos também ter uma função fuzzy de pertinência para a saída

Dados, dados, dados!
Mais dados!



Fuzzificação

Agora, você proponha, com base na sua experiência, funções simples (triângulo ou rampa, para as seguintes variáveis e termos linguísticos.

Variável: Temperatura

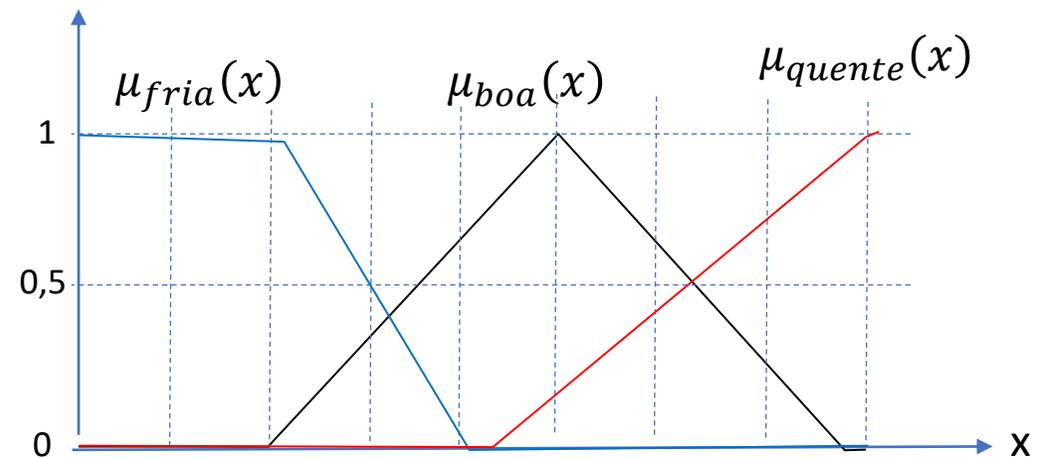
termos: baixa, média, alta

Variável: Vento

Termos: fraco, médio, forte

Variável: Recimendação

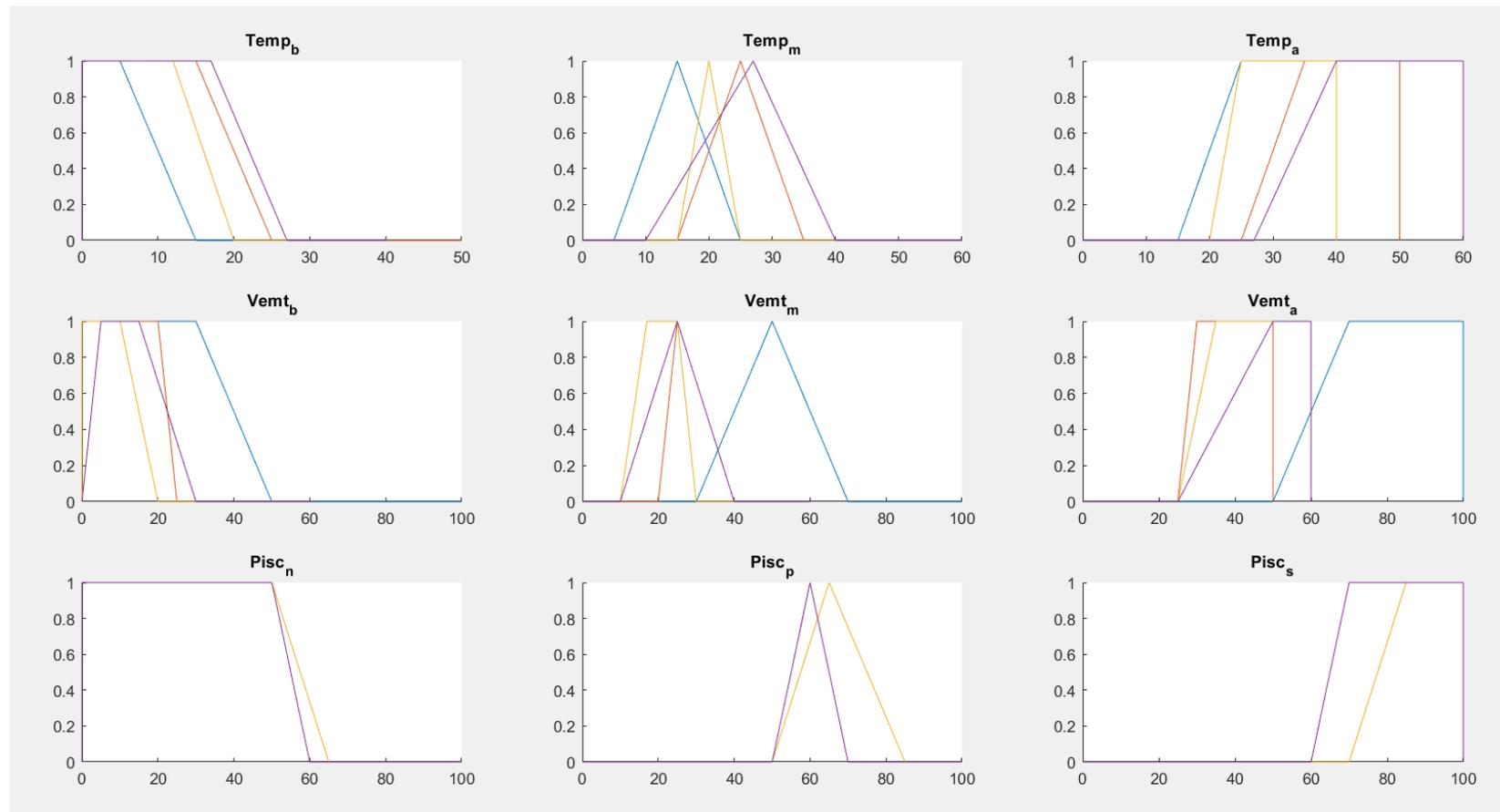
nunca, possível, sempre





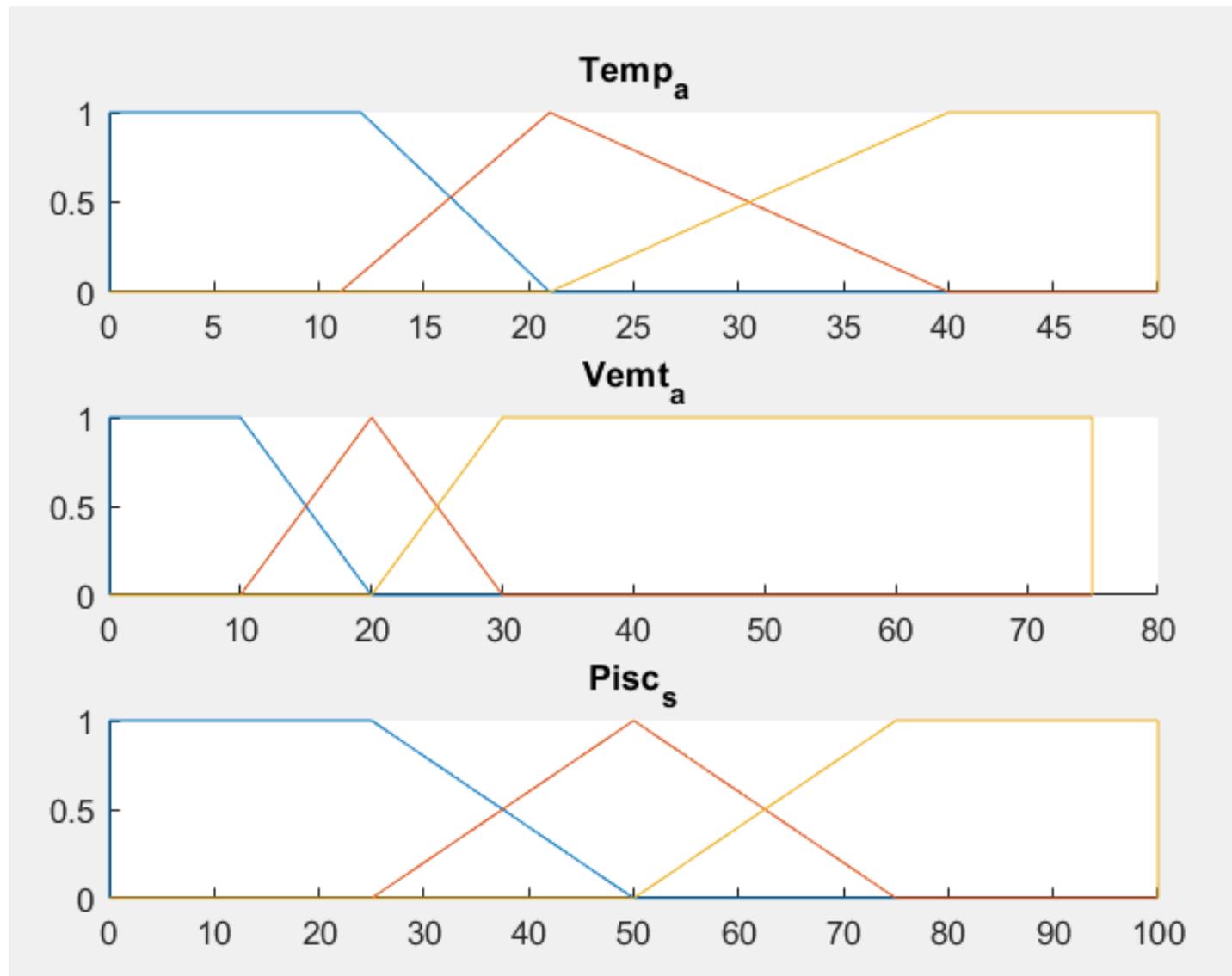
[insira aqui seus dados]

Resultado



resultado

'Temp_b'	0	0	0	12	21	46
'Temp_m'	0	11	21	21	31	50
'Temp_a'	0	21	31	50	50	50
'Vent_b'	0	0	1	19	33	96
'Vent_m'	0	18	31	33	46	96
'Vent_a'	0	33	49	70	70	96
'Pisc_n'	0	0	0	50	61	100
'Pisc_p'	0	50	61	61	73	100
'Pisc_s'	0	62	73	100	100	100



SE $T=22$ e velocidade= 32 km/h ? Vamos?

Devemos tomar a decisão...

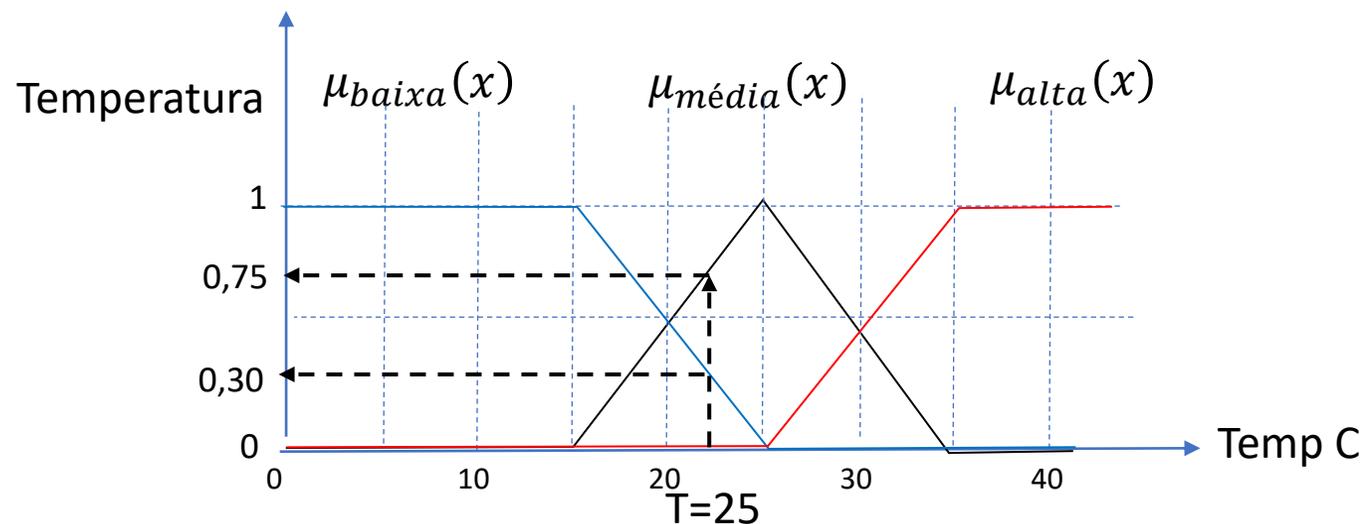
Pai, Vamos à piscina?



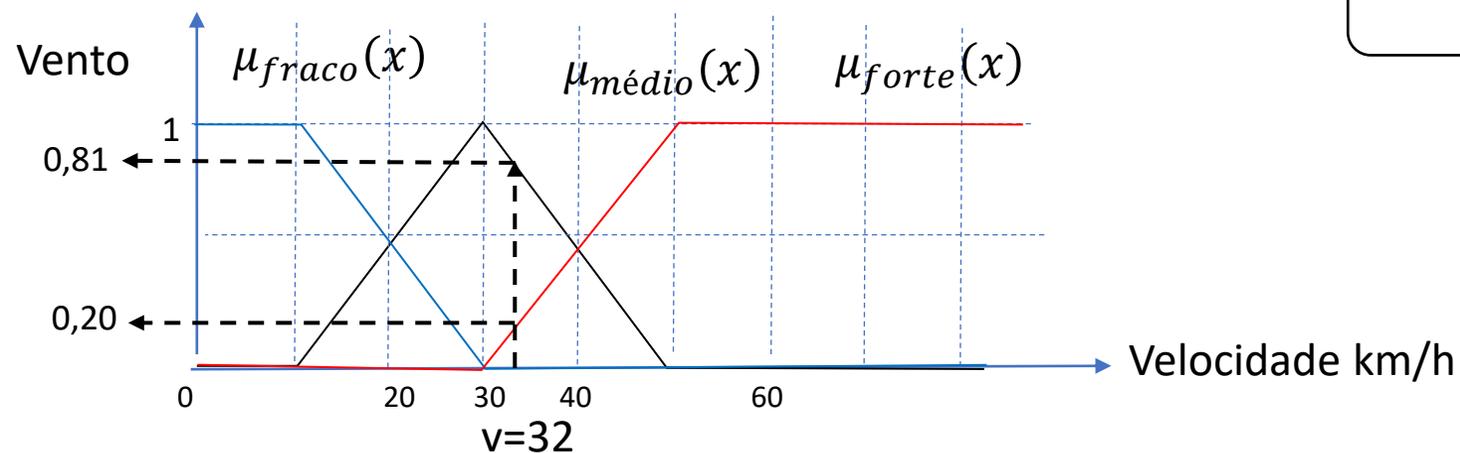
Esperem, devo consultar
me computador!



Piscina = F(T=25, V=32 km/h)



Com base nos valores num\u00e9ricos e as fun\u00e7\u00f5es de pertin\u00eancia, devemos transformar os valores determin\u00edsticos em fuzzy (fuzzyfica\u00e7\u00e3o)

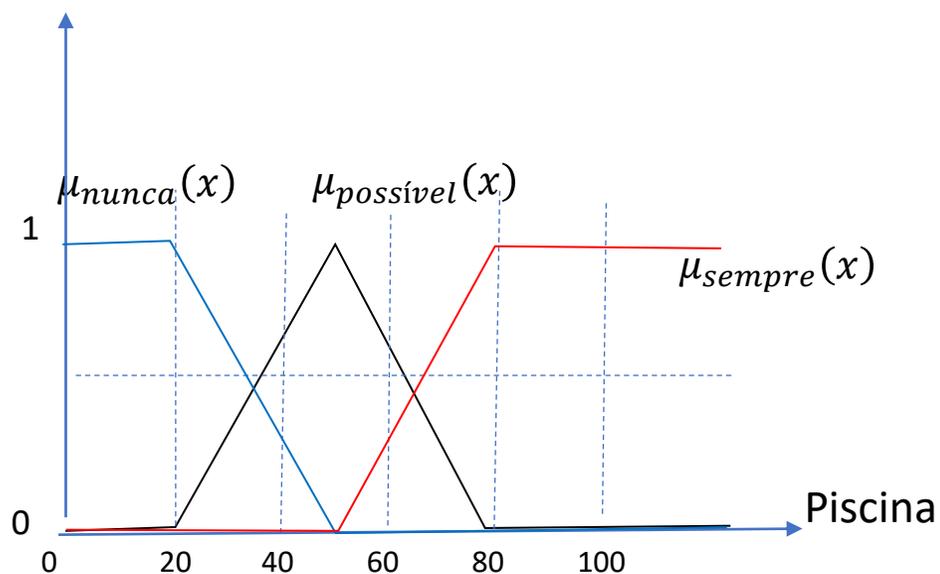


Dados, dados, dados!
Fuzzifica\u00e7\u00e3o!



função de pertinência também de Piscina

% de Recomendação



E devemos também ter uma função fuzzy de pertinência para a saída

Dados, dados, dados!
Mais dados!



Identificação das regras ativas

Algumas regras não podem ser ativadas, como por exemplo quando Temp=alta e vento=fraco (em vermelho)

Regras:

Se Temp=baixa E	VENTO=fraco	ENTÃO PISCINA=possível
Se Temp=baixa E	VENTO=médio	ENTÃO PISCINA=nunca
Se Temp=baixa E	VENTO=forte	ENTÃO PISCINA=nunca
Se Temp=média E	VENTO=fraco	ENTÃO PISCINA=possível
Se Temp=média E	VENTO=médio	ENTÃO PISCINA=possível
Se Temp=média E	VENTO=forte	ENTÃO PISCINA=nunca
Se Temp=alta E	VENTO=fraco	ENTÃO PISCINA=sempre
Se Temp=alta E	VENTO=médio	ENTÃO PISCINA= possível
Se Temp=alta E	VENTO=forte	ENTÃO PISCINA=nunca



Exercício

Mesmo assim, ficam várias regras ativas, ou “disparam”, levando a conclusões que podem ser diversas. Vamos numerar as regras

Regras:

- | | | |
|--------------------|-------------|------------------------|
| 1. Se Temp=média E | VENTO=médio | ENTÃO PISCINA=possível |
| 2. Se Temp=média E | VENTO=forte | ENTÃO PISCINA=nunca |
| 3. Se Temp=baixa E | VENTO=médio | ENTÃO PISCINA=nunca |
| 4. Se Temp=baixa E | VENTO=forte | ENTÃO PISCINA=nunca |

E devemos avaliar cada uma delas.

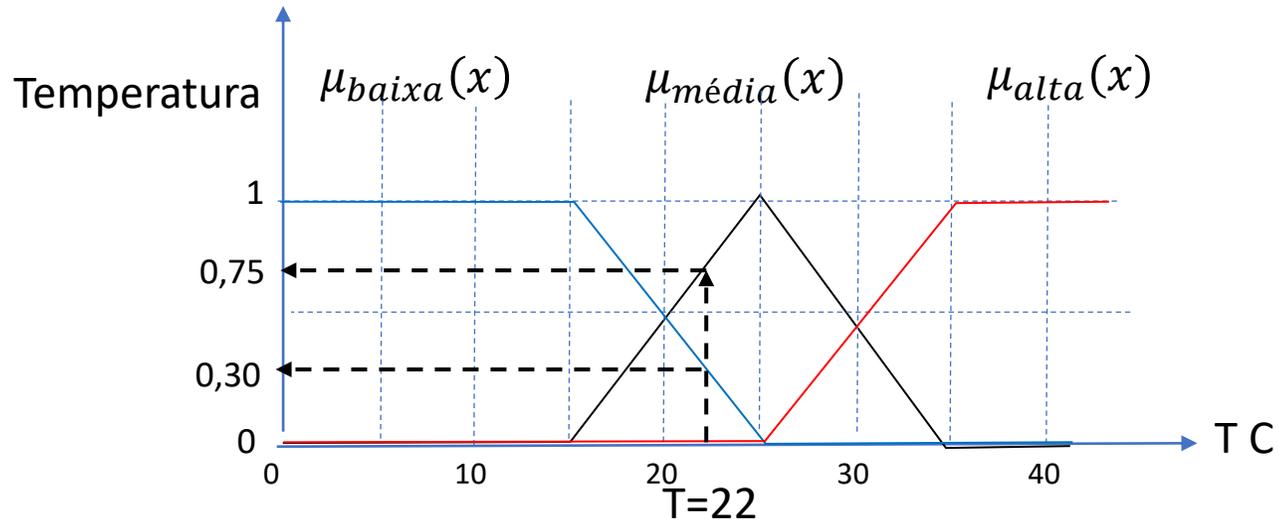
Primeiro, para fins de exercício, vamos analisar apenas as duas primeiras regras, OK?

Regras:

1. Se Temp=média E
2. Se Temp=média E

VENTO=médio
VENTO=forte

ENTÃO PISCINA=possível
ENTÃO PISCINA=nunca



T=25:

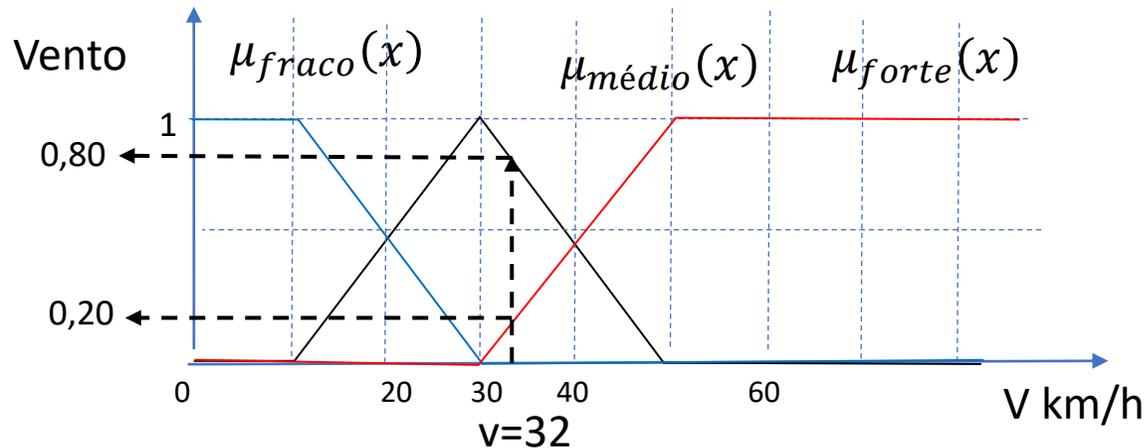
$$\mu_{baixa}(T)=0,30$$

$$\mu_{média}(T)=0,75$$

V=32

$$\mu_{forte}(v)=0,20$$

$$\mu_{média}(v)=0,80$$



Já terminou?



Regras:

1. Se Temp=média **E** VENTO=médio ENTÃO PISCINA=possível
2. Se Temp=média **E** VENTO=forte ENTÃO PISCINA=nunca

Operador “E” é a interseção, logo aplicamos o mínimo!

Regra 1: $\min\{ \mu_{T_m\u00e9dia}(25), \mu_{V_m\u00e9dio}(32) \} = \min(0,75; 0,80) = 0,75$

Regra 2: $\min\{ \mu_{T_m\u00e9dia}(25), \mu_{V_forte}(32) \} = \min(0,75; 0,20) = 0,20$

Já terminou?



Uma regra fala “nunca”, mas a outra fala que é “possível”

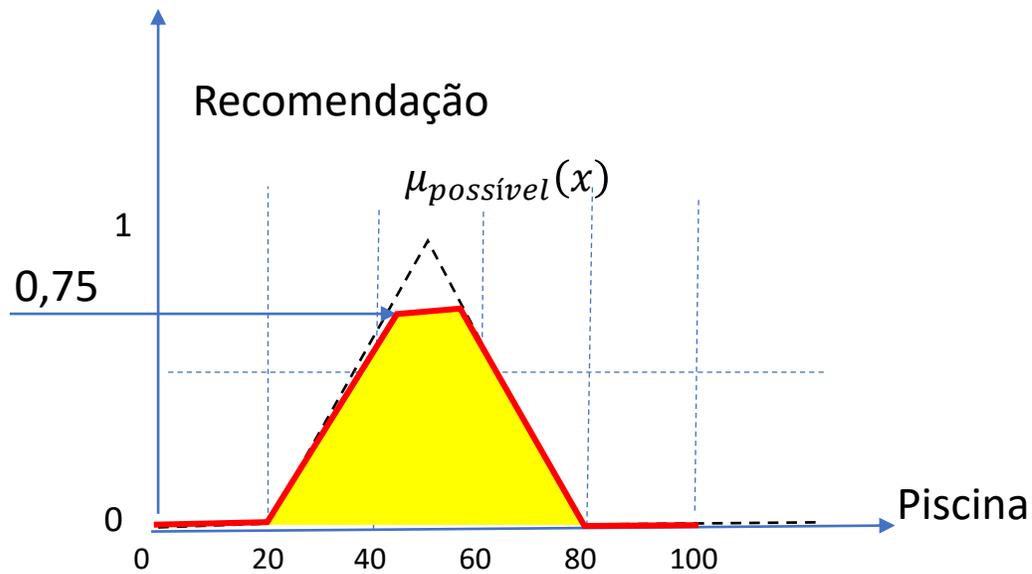


Primeira regra: conclusão= 0,75

Se Temp=média E VENTO=médio ENTÃO PISCINA=possível

Regra 1: $\min\{ \mu_{T_média}(25), \mu_{V_médio}(32) \} = \min(0,30; 0,81)=0,30$

Transferimos esse valor à conclusão correspondente (possível) e cortamos a função neste valor:



Dados, dados, dados!
Mais dados!



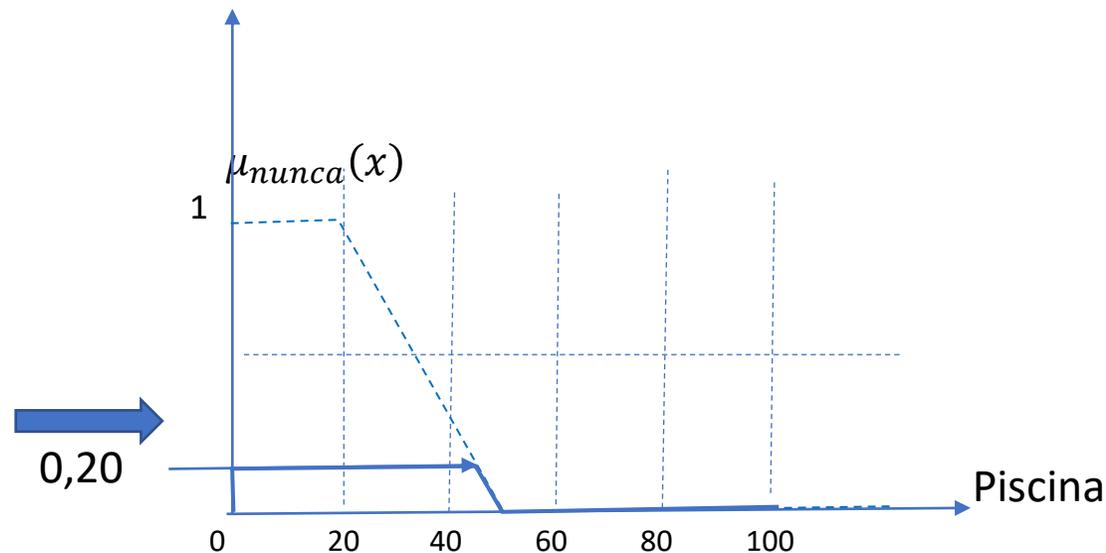
Segunda regra: conclusão= 0,20

1. Se Temp=média E VENTO=forte ENTÃO PISCINA=nunca

Regra 2: $\min\{ \mu_{T_média}(25), \mu_{V_forte}(32) \} = \min(0,30; 0,20) = 0,20$

Transferimos esse valor à conclusão correspondente (NUNCA) e cortamos a função neste valor:

Recomendação



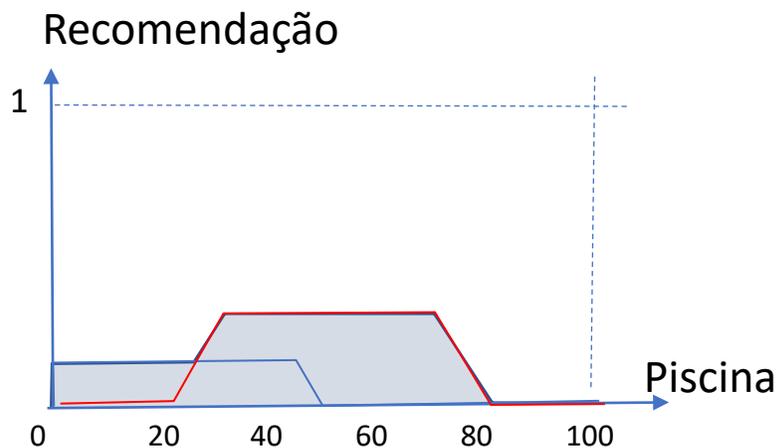
Já terminou?



Combinar as conclusões

1. Para combinar os conjuntos fuzzy das conclusões, usa-se o operador “OU”. Ou uma ou a outra regra... logo

Resumo da Conclusão: $\max\{ \mu_{P_nunca}(p), \mu_{P_possivel}(p) \}$



Isso é um conjunto fuzzy,
necessito um valor, entre 0 e
100, para decidir!

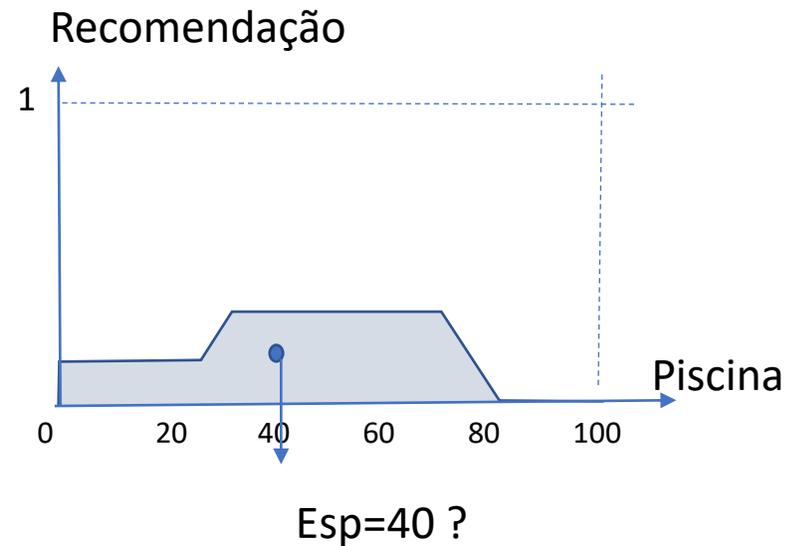


Defuzzificação

O conjunto fuzzy resultante já exprime a incerteza associada ao prognóstico. Caso seja necessário obter um valor determinístico que traduza o significado, é feita a defuzzificação.

O método mais usado é o do Centróide do conjunto de saída

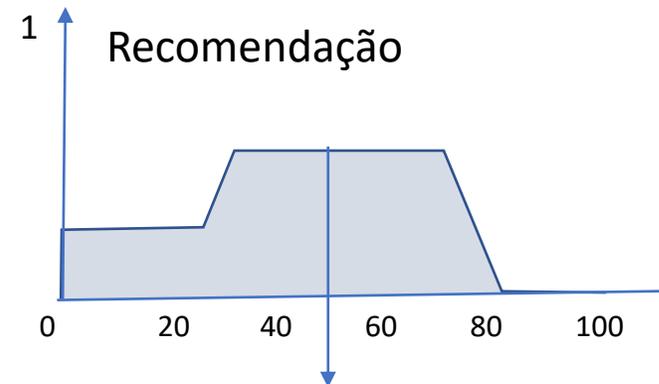
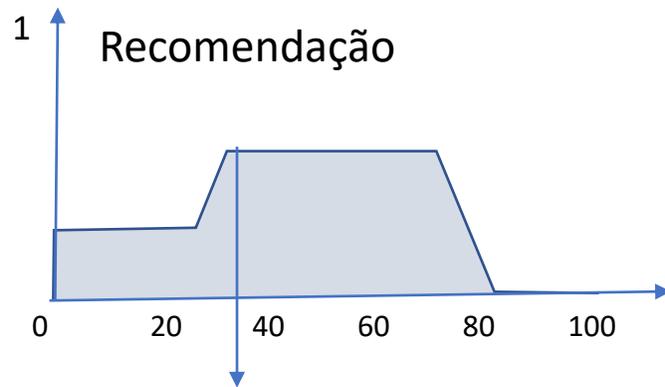
$$Esp = \frac{\int_x x \mu(x) dx}{\int_x \mu(x) dx}$$



Defuzzificação

Também pode ser usado o critério do primeiro máximo

Ou do máximo (este é mais ambíguo). Pode adotar a média da região de máximo...



Agora é com você!

OK. Agora, com base nesse conhecimento, aplique todas as regras e obtenha a conclusão!

As funções tem os seguintes valores:

Temperatura:

Baixa (0,1), (15,1), (25,0), (60,0)

Média (0,0), (15,0), (25,1), (50,0), (60,0)

Alta (0,0), (25,0), (35,1), (60,1)

Vento

fraco (0,1), (10,1), (30,0), (80,0)

Média (0,0), (10,0), (30,1), (50,0), (80,0)

Alta (0,0), (30,0), (50,1), (60,1)

Recomendação (%)

Nunca (0,1), (20,1), (50,0), (100,0)

possível (0,0), (20,0), (50,1), (80,0), (100,0)

Sempre (0,0), (50,0), (80,1), (100,1)



Qual % de “*dar piscina*” teremos em...

- | | |
|-----------------|---------|
| 1. Beijing | Alana |
| 2. Berlin | Aline |
| 3. Buenos Aires | Bruno |
| 4. Cairo | Cássia |
| 5. Cape Town | Carlos |
| 6. Istanbul | Eileen |
| 7. Extremadura | Eneas |
| 8. London | Luis |
| 9. Rhode Island | Ricardo |

... amanhã entre as 10-as 14:00?



referencias

GALVAO, C. de O. (1999). **Sistemas inteligentes: aplicações a recursos hídricos e ciências ambientais**. Colecao ABRH de Recursos Hidricos, Volume 7. Editora UFRGS: ABRH. ISBN 8570255276, 9788570255273, 246 páginas.

Artificial Intelligence - Fuzzy Logic Systems.

https://www.tutorialspoint.com/artificial_intelligence/artificial_intelligence_fuzzy_logic_systems.htm









